МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 5

1. [4 балла] Решите уравнение

$$3\operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение $abc$ равно $2^{150} \cdot 3^{150}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2 x - (x-1)\ln(2x) + (\ln 2)\ln x \geqslant 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра $a$ и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника $ABC$ описана окружность $\Omega$. Точки $D$ и $E$ – середины сторон $AC$ и $AB$ соответственно, $CF$ – биссектриса треугольника $ABC$. Лучи $DE$ и $CF$ пересекаются в точке $G$, принадлежащей $\Omega$. Найдите углы треугольника $ABC$, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$.

6. [5 баллов] Числа $x$, $y$ и $z$ не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения $xyz$.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Ребро $SD$ – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, $SAB$, $SBC$ и ребра $SD$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$$3\,tg\,2x+1=tg\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$3\left(\frac{2\,tg\,x}{1-tg^2x}\right)+1=\frac{tg\,x-1}{tg\,x+1}$$

$$\frac{6\,tg\,x}{1-tg^2x}+\frac{1-tg^2x}{1-tg^2x}=\frac{(tg\,x-1)(1-tg\,x)}{1-tg^2x}$$

$$\frac{6\,tg\,x+1-tg^2x+(1-tg\,x)^2}{1-tg^2x}=0$$

$$\frac{6\,tg\,x+1-tg^2x+1-2\,tg\,x+tg^2x}{1-tg^2x}=0$$

$$\frac{4\,tg\,x+2}{1-tg^2x}=0$$

$$tg\,x=-\frac{1}{2}$$

$$x=arctg\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $arctg\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$(a,b,c)$ – геом. прогрессия, значит $b^2=ac$, $b^3=abc=2^{150}\cdot 3^{150}$, $b=2^{50}\cdot 3^{50}$.

$c=\frac{b^2}{a}\in\mathbb{Z}$, значит $b^2 \vdots a$, $2^{100}\cdot 3^{100}\vdots a$.

$2^{100}\cdot 3^{100}$ имеет $101^2$ положительных целых делителей,
$2\cdot 101^2$ целых делителей.

Выбрав число $a$ среди целых делителей числа $2^{100}\cdot 3^{100}$, число $c$ однозначно определяется как $c=\frac{b^2}{a}$ и является целым.

Так как $b^2=ac$ – необходимое и достаточное условие для того, чтобы ненулевые $a,b,c$ составляли геом. прогрессию, выбранное среди делителей $2^{100}\cdot 3^{100}$ число $a$ однозначно определяет прогрессию $(a,b,c)$ целых чисел с произведением $2^{150}\cdot 3^{150}$.

Всего $2\cdot 101^2$ вариантов числа $a$, значит столько же троек $(a,b,c)$.

Ответ: $2\cdot 101^2$.

№3

$$\ln^2 x - (x-1)\ln(2x) + (\ln 2)\ln x \geq 0 \qquad (x>0)$$

$$\ln^2 x - (x-1)(\ln 2 + \ln x) + (\ln 2)\ln x \geq 0$$

$$\ln^2 x - x\cdot\ln 2 + \ln 2 - x\cdot\ln x + \ln x + (\ln 2)\ln x \geq 0$$

$$(\ln 2 + \ln x)(1 - x + \ln x) \geq 0$$

$$\ln(2x)\cdot\left(\ln(x\cdot e) - \ln(e^x)\right) \geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln 2x = 0 \\ \ln(x\cdot e) = \ln(e^x) \\ \begin{cases} \ln 2x < 0 \\ \ln(x\cdot e) < \ln(e^x) \end{cases} \\ \begin{cases} \ln 2x > 0 \\ \ln(x\cdot e) > \ln(e^x) \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x\cdot e = e^x \\ \begin{cases} 0 < 2x < 1 \\ x\cdot e < e^x \end{cases} \\ \begin{cases} 2x > 1 \\ x\cdot e > e^x \end{cases} \end{array}\right.$$

Функция $e^x$ в точке $x=1$ равна $e$ и имеет производную $e$.

Функция $x\cdot e$ в точке $x=1$ равна $e$ и имеет производную $e$.

$e^x$ выпукла вниз, $x\cdot e$ – прямая.

Значит $e^x > x\cdot e$ на $(-\infty; 1)\cup(1; +\infty)$; $e^x = x\cdot e$ при $x=1$.

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ \begin{cases} x \in (0; \frac{1}{2}) \\ x \in \mathbb{R}\setminus 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x \in (0; \frac{1}{2}) \\ x = 1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \in (0; \frac{1}{2}] \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (0; \frac{1}{2}] \cup 1$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

Центр квадрата совпадает с началом координат, значит квадрат ABCD имеет координаты вершин $A(x_0, y_0)$, $B(y_0, -x_0)$, $C(-x_0, -y_0)$, $D(-y_0, x_0)$.

Пусть AC лежит на $y=-4x$. Координаты точек A, C удовлетворяют $x^3 - ax = -4x$. Если $x_0=0$, то, т.к. $y_0=-4x_0$, точка A лежит в начале координат, чего не может быть. Аналогично для C. Значит $x \neq 0$.

$x^2 - a = -4$, $x^2 = a-4$, $x = \pm\sqrt{a-4}$.

Б.о.о. пусть $x_0 = \sqrt{a-4}$. Тогда $y_0 = -4\sqrt{a-4}$.

Т.к. $AC \perp BD$, BD лежит на прямой $y = \frac{1}{4}x$. Координаты точек B, D удовлетворяют уравнению $x^3 - ax = \frac{1}{4}x$, где $x \neq 0$.

$x^2 - a = \frac{1}{4}$, $x^2 = a + \frac{1}{4}$, $x = \pm\sqrt{a+\frac{1}{4}}$.

Модуль ординаты точки A равен модулю абсциссы точки B, то есть

$|-4\sqrt{a-4}| = |\pm\sqrt{a+\frac{1}{4}}|$, $4\sqrt{a-4} = \sqrt{a+\frac{1}{4}}$, $16a - 64 = a + \frac{1}{4}$,

$a = \frac{64+\frac{1}{4}}{15}$.

Площадь квадрата с диагональю $2d$ равна $2d^2$. $d^2 = x_0^2 + y_0^2$.

$d^2 = a-4+16(a-4) = 17(a-4) = 17\left(\frac{64+\frac{1}{4}}{15} - \frac{60}{15}\right) = 17\left(\frac{4+\frac{1}{4}}{15}\right) = 17\cdot\frac{17}{60}$

$S = 2d^2 = \frac{2\cdot 17^2}{60} = \frac{289}{30}$

Ответ: $a = \frac{64+\frac{1}{4}}{15}$, $S = \frac{289}{30}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7

а) $\Delta ABC$ и $\Delta ADC$ равнобедренные, значит высоты из $B$ и $D$ на $AC$ попадают в середину $AC$, назовём её $H$. $AH=CH$; $B, D, H$ на одной прямой.

$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{2-1} = 1.$

$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{5-1} = 2.$

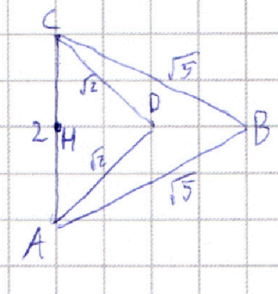
Если $B$ и $D$ лежат по разные стороны от $AC$, то $BD = BH + HD = 3$,

$SA + SB = \sqrt{SD^2 + AD^2} + \sqrt{SD^2 + BD^2} = \sqrt{SD^2+2} + \sqrt{SD^2+9} \geqslant \sqrt{2} + 3 > 2 + \sqrt{5}.$

Значит $B$ и $D$ лежат по одну сторону от $AC$, $BD = BH - HD = 1.$

$SA + SB = \sqrt{SD^2 + AD^2} + \sqrt{SD^2 + BD^2} = \sqrt{SD^2+2} + \sqrt{SD^2+1} = 2 + \sqrt{5}$

Т.к. $f(x) = \sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}$ возрастает при $x>0$, $f(x) = 2+\sqrt{5}$ имеет не более одного положительного решения. $SD = \sqrt{3}$ является решением.




$S_{ABCD} = S_{ABC} - S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$

$V = \frac{1}{3} \cdot SD \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$

$tg 2x = \frac{\sin(x+x)}{\cos(x+x)} = \frac{2 tg x}{1 - tg^2 x}$

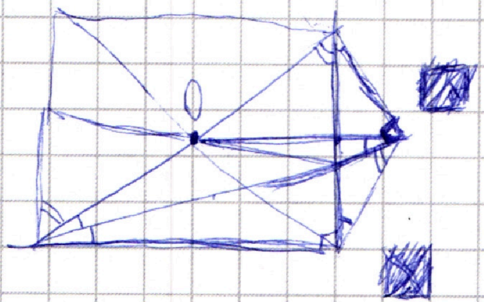
$tg\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sin x \cdot (-\frac{\sqrt2}{2}) + \cos x \cdot (\frac{\sqrt2}{2})}{\cos x (-\frac{\sqrt2}{2}) - \sin x (\frac{\sqrt2}{2})} = \frac{-\sin x + \cos x}{-\cos x - \sin x} = \frac{-tg x + 1}{-1 - tg x} = \boxed{\frac{tg x - 1}{tg x + 1}}$

$\frac{6 tg x}{1 - tg^2 x} + 1 = \frac{tg x - 1}{tg x + 1}$, $\frac{6 tg x + 1 - tg^2 x - (tg x - 1)(1 - tg x)}{1 - tg^2 x}$

$6 tg x + 1 - tg^2 x + (1 - tg x)^2 = 6 tg x + 1 - \cancel{tg^2 x} + 1 - 2 tg x + \cancel{tg^2 x} = \frac{2 + 4 tg x}{1 - tg^2 x} = 0$

$x = arctg\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$tg x = -\frac{1}{2}$

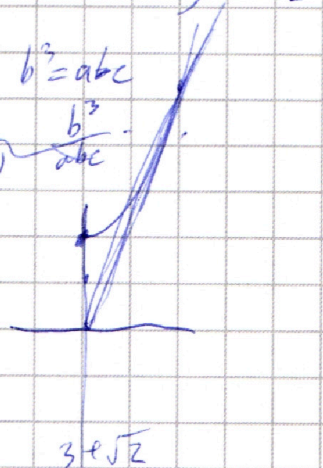



$b^2 = ac$ $b^3 = abc$

$\frac{b^2}{ac} = 1$, $\frac{b^3}{abc}$

$c = qb = \frac{b^2}{a}$

$e^{x-1} = x$



$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$

$3t = (a+b+c) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 6$

$t \geq 2$

| | |
|---|---|
| $2+\sqrt5$ | $3+\sqrt2$ |
| $\sqrt5$ | $1+\sqrt2$ |
| $5$ | $5+2\sqrt2$ |

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$b = 2^{50} \cdot 3^{50}$

$a = \pm 2^n 3^m$; $0 \le n, m \le 50$

$2 \cdot 100^2$ sign

② $\frac{13+}{34}$

④ $x(x^2 - a) = -4x$

$x^2 - a = -4$

$x^2 = a - 4$

$x = \pm\sqrt{a-4}$ (A, C), $y = \pm 4\sqrt{a-4}$

$y = \pm\sqrt{a-4}$ (B, D)

$x^3 - ax = \frac{1}{4}x$ (BD)

$x^2 - a = \frac{1}{4}$

$x = \pm\sqrt{a + \frac{1}{4}}$ (BD)

$4\sqrt{a-4} = \sqrt{a+\frac{1}{4}}$

$16a - 64 = a + \frac{1}{4}$

$15a = 64 + \frac{1}{4}$

$a = \frac{64 + \frac{1}{4}}{15}$

③ $\ln^2 x - (x-1)(\ln 2 + \ln x) + (\ln 2 \ln x) \ge 0$

$\ln^2 x - x\ln 2 + \ln 2 - x\ln x + \ln x + \ln 2 \ln x \ge 0$

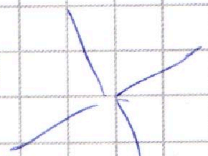
$\ln 2(1 - x + \ln x) + \ln x(1 - x + \ln x)$

$(\ln 2 + \ln x)(1 - x + \ln x) \ge 0$

$(\ln 2 - \ln\frac{1}{x})(1 + \ln x - x) \ge 0$

$(\ln(ex) - \ln(e^x))$

$(\ln 2x)(\ln\frac{ex}{e^x}) \ge 0$



$x > 0$

$\ln 2x\,(\ln x \cdot e^{-x+1}) \ge 0$

$2x \vee 1$ $\quad x \cdot e^{-x+1} \vee 1$

$xe \vee e^x$

$x \vee \frac{1}{2}$ $\quad x \vee 1$

① $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin x\cos x + \sin x\cos x}{\sin x\sin x - \cos x\cos x} = \boxed{\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 1}}$

⑥ $z^3 - \frac{7}{z^3} = y^3 - \frac{7}{x^3}$ $\quad x^3 + \frac{7}{y^3} =$

$t + (y^3 - x^3) - \left(\frac{7}{y^3} + \frac{7}{x^3}\right)$

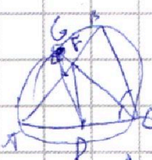
$c - \frac{7}{c} = t + (b - a) - 7\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$

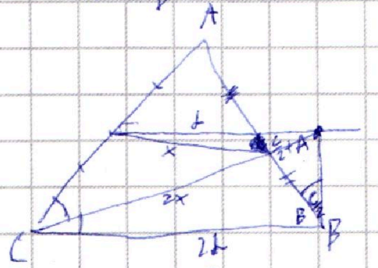
$7\left(\frac{a+b}{ab}\right)$

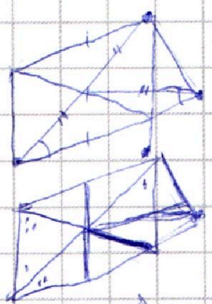
$S = 3t - 3 \cdot 7\left(\left(\frac{a+b}{ab}\right) + \left(\frac{b+c}{bc}\right) + \left(\frac{a+c}{ac}\right)\right)$

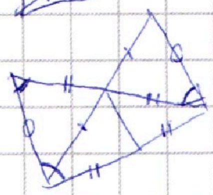
$\frac{a+b}{ab} \wedge \frac{b+c}{bc} \vee \frac{a+c}{ac}$

⑤

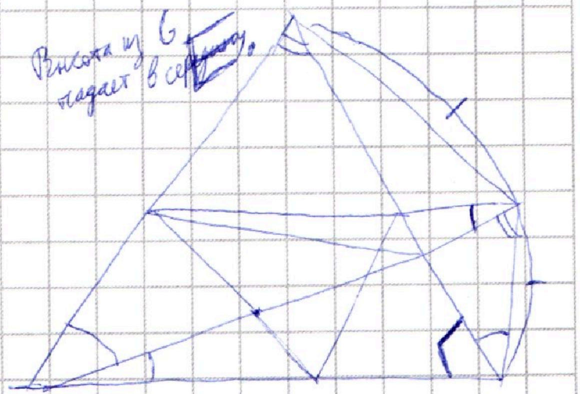


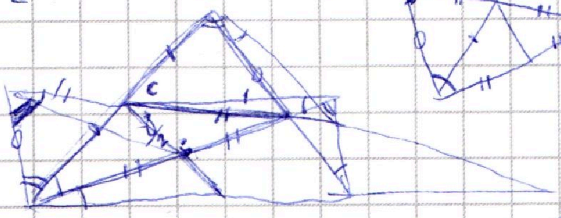






Высота из G падает в середину.

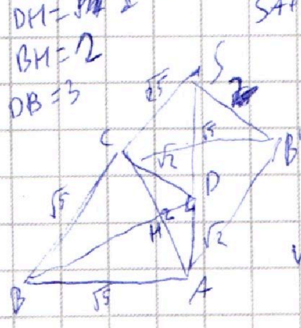




$DH = 1$

$BH = 2$

$DB = 3$



$SA + SB = \sqrt{2 + SD^2} + \sqrt{9 + SD^2} = 2 + \sqrt{5}$

$\ge 3 + \sqrt{2} > 2 + \sqrt{5}$

Значит $B = B'$, $DB = 1$.

$SA + SB = \sqrt{2 + SD^2} + \sqrt{1 + SD^2} = 2 + \sqrt{5}$

$SD^2 = 3$ $\quad SD = \sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2}(2 - 1)\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}}$