



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Решите уравнение

$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg} \left(x + \frac{3\pi}{4} \right).$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{150}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2 x - (x - 1) \ln(2x) + (\ln 2) \ln x \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg} \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) \quad \#1$$

$$3 \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \right) + 1 = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}$$

$$\frac{6 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{(\operatorname{tg} x - 1)(1 - \operatorname{tg} x)}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\frac{6 \operatorname{tg} x + 1 - \operatorname{tg}^2 x + (1 - \operatorname{tg} x)^2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\frac{6 \operatorname{tg} x + 1 - \operatorname{tg}^2 x + 1 - 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\frac{4 \operatorname{tg} x + 2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(a, b, c) - геом. прогрессия, ^{№2} значит $b^2 = ac$, $b^3 = abc = 2^{150} \cdot 3^{150}$, $b = 2^{50} \cdot 3^{50}$.

$c = \frac{b^2}{a} \in \mathbb{Z}$, значит $b^2 : a$, $2^{100} \cdot 3^{100} : a$.

$2^{100} \cdot 3^{100}$ имеет 101^2 положительных целых делителей,
 $2 \cdot 101^2$ целых делителей.

Выбрав число a среди целых делителей числа $2^{100} \cdot 3^{100}$,

число c однозначно определяется как $c = \frac{b^2}{a}$ и является целым.

Так как $b^2 = ac$ - необходимое и достаточное условие для
того, чтобы ненулевые a, b, c составили геом. прогрессию,

выбранное среди делителей $2^{100} \cdot 3^{100}$ число a однозначно

определяет прогрессию (a, b, c) целых чисел с геометрией $2^{150} \cdot 3^{150}$.

Всего $2 \cdot 101^2$ вариантов числа a , значит столько же троек (a, b, c) .

Ответ: $2 \cdot 101^2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln^2 x - (x-1) \ln(2x) + (\ln 2)^3 \ln x \geq 0 \quad (x > 0)$$

$$\ln^2 x - \cancel{(\ln 2)^2 \ln x} \cancel{(\ln 2)^2 \ln x} (x-1)(\ln 2 + \ln x) + (\ln 2)^3 \ln x \geq 0$$

$$\ln^2 x - x \cdot \ln 2 + \ln 2 - x \cdot \ln x + \ln x + (\ln 2)^3 \ln x \geq 0$$

$$(\ln 2 + \ln x)(1 - x + \ln x) \geq 0$$

$$\ln(2x) \cdot (\ln(x \cdot e) - \ln(e^x)) \geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln 2x = 0 \\ \ln(x \cdot e) = \ln(e^x) \\ \left\{ \begin{array}{l} \ln 2x < 0 \\ \ln(x \cdot e) < \ln(e^x) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \ln 2x > 0 \\ \ln(x \cdot e) > \ln(e^x) \end{array} \right. \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x \cdot e = e^x \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < 2x \leq 1 \\ x \cdot e < e^x \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2x > 1 \\ x \cdot e > e^x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Функция e^x в точке $x=1$ равна e и имеет производную e .

Функция $x \cdot e$ в точке $x=1$ равна e и имеет производную e .

e^x выпукла вниз, $x \cdot e$ - прямая.

Значит $e^x > x \cdot e$ на $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; $e^x = x \cdot e$ при $x=1$.

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in (0; \frac{1}{2}) \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x \in (0; \frac{1}{2}) \\ x = 1 \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x \in (0; \frac{1}{2}] \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Ответ: $x \in (0; \frac{1}{2}] \cup 1$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4
Центр квадрата совпадает с началом координат, значит квадрат $ABCD$
имеет координаты вершин $A(x_0, y_0)$, $B(y_0, -x_0)$, $C(-x_0, -y_0)$, $D(-y_0, x_0)$.

Пусть AC лежит на $y = -4x$. Координаты точки A , C удовлетворяют
 $x^3 - ax = -4x$. Если $x_0 = 0$, то, т.к. $y_0 = -4x_0$, точка A лежит в
начале координат, чего не может быть. Аналогично для C . Значит $x \neq 0$.

$$x^2 - a = -4, \quad x^2 = a - 4, \quad x = \pm \sqrt{a - 4}.$$

Б.о.о. пусть $x_0 = \sqrt{a - 4}$. Тогда $y_0 = -4\sqrt{a - 4}$.

Т.к. $AC \perp BD$, BD лежит на прямой $y = \frac{1}{4}x$. Координаты
точек B, D удовлетворяют уравнению $x^3 - ax = \frac{1}{4}x$, где $x \neq 0$.

$$x^2 - a = \frac{1}{4}, \quad x^2 = a + \frac{1}{4}, \quad x = \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}.$$

Модуль ординаты точки A равен модулю абсциссы точки B , то есть

$$|-4\sqrt{a - 4}| = |\pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}|, \quad 4\sqrt{a - 4} = \sqrt{a + \frac{1}{4}}, \quad 16a - 64 = a + \frac{1}{4},$$

$$a = \frac{64 + \frac{1}{4}}{15}.$$

Площадь квадрата с диагональю $2d$ равна $2d^2$. $d^2 = x_0^2 + y_0^2$.

$$d^2 = a - 4 + 16(a - 4) = 17(a - 4) = 17 \left(\frac{64 + \frac{1}{4}}{15} - \frac{60}{15} \right) = 17 \left(\frac{4 + \frac{1}{4}}{15} \right) = 17 \cdot \frac{17}{60}$$

$$S = 2d^2 = \frac{2 \cdot 17^2}{60} = \frac{289}{30}$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{64 + \frac{1}{4}}{15}, \quad S = \frac{289}{30}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а) $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ равнобедренные, значит высоты из B и D на AC попадают в середину AC , назовём её H . $AH = CH$; B, D, H на одной прямой.

$$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - 1} = 1.$$

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{5 - 1} = 2.$$

Если B и D лежат по разные стороны от AC , то $BD = BH + HD = 3$,

$$SA + SB = \sqrt{SD^2 + AD^2} + \sqrt{SD^2 + BD^2} = \sqrt{SD^2 + 2} + \sqrt{SD^2 + 9} \geq \sqrt{2} + 3 > 2 + \sqrt{5}.$$

Значит B и D лежат по одну сторону от AC , $BD = BH - HD = 1$.

$$SA + SB = \sqrt{SD^2 + AD^2} + \sqrt{SD^2 + BD^2} = \sqrt{SD^2 + 2} + \sqrt{SD^2 + 1} = 2 + \sqrt{5}$$

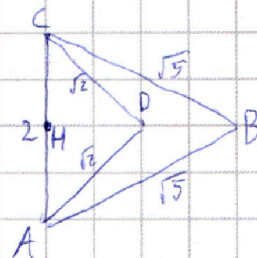
Т.к. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}$ возрастает при $x > 0$, $f(x) = 2 + \sqrt{5}$ имеет

не более одного положительного решения. $SD = \sqrt{3}$ является решением.

$$S_{ABCD} = S_{ABC} - S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot SD \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.





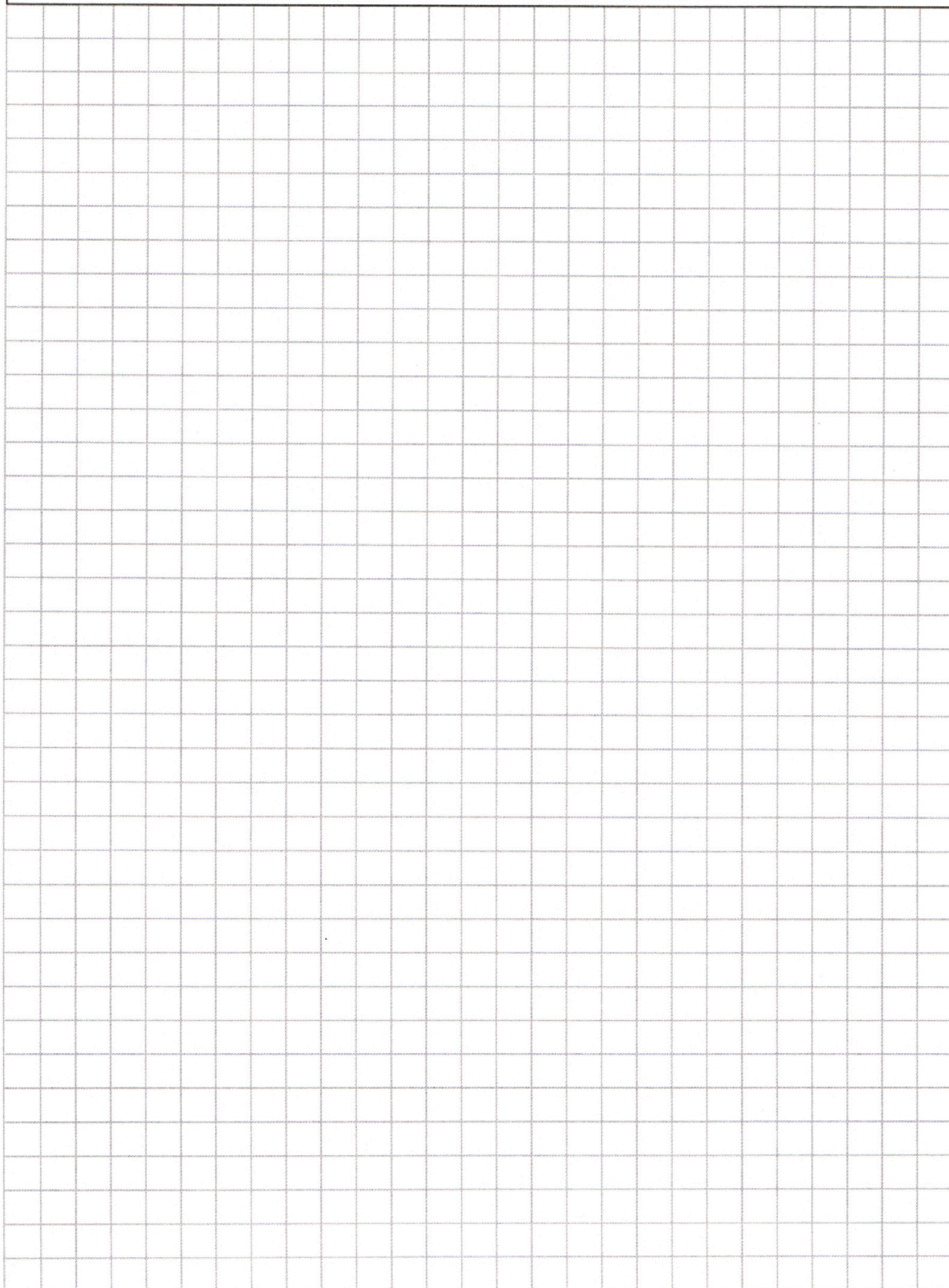
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





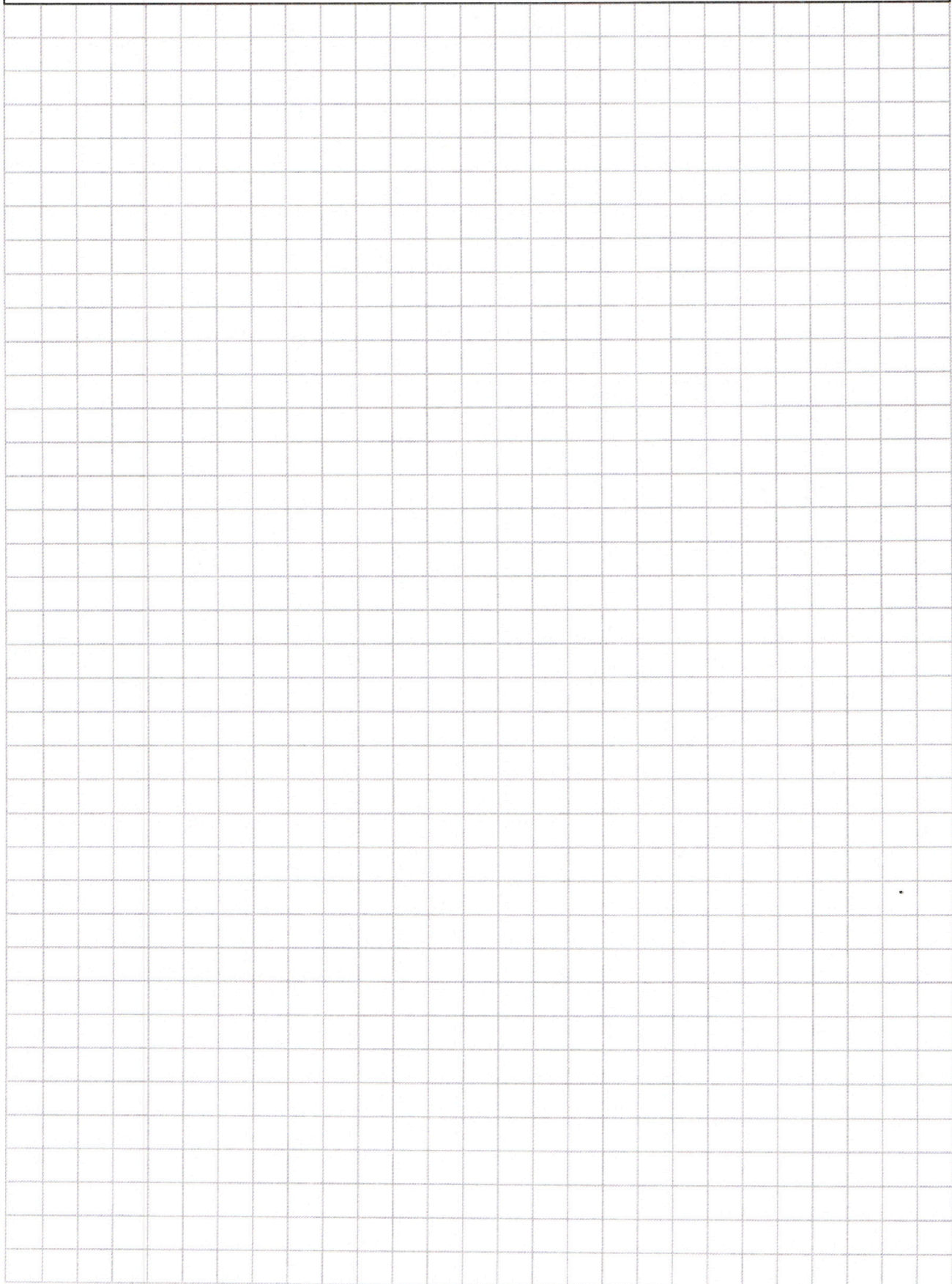
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





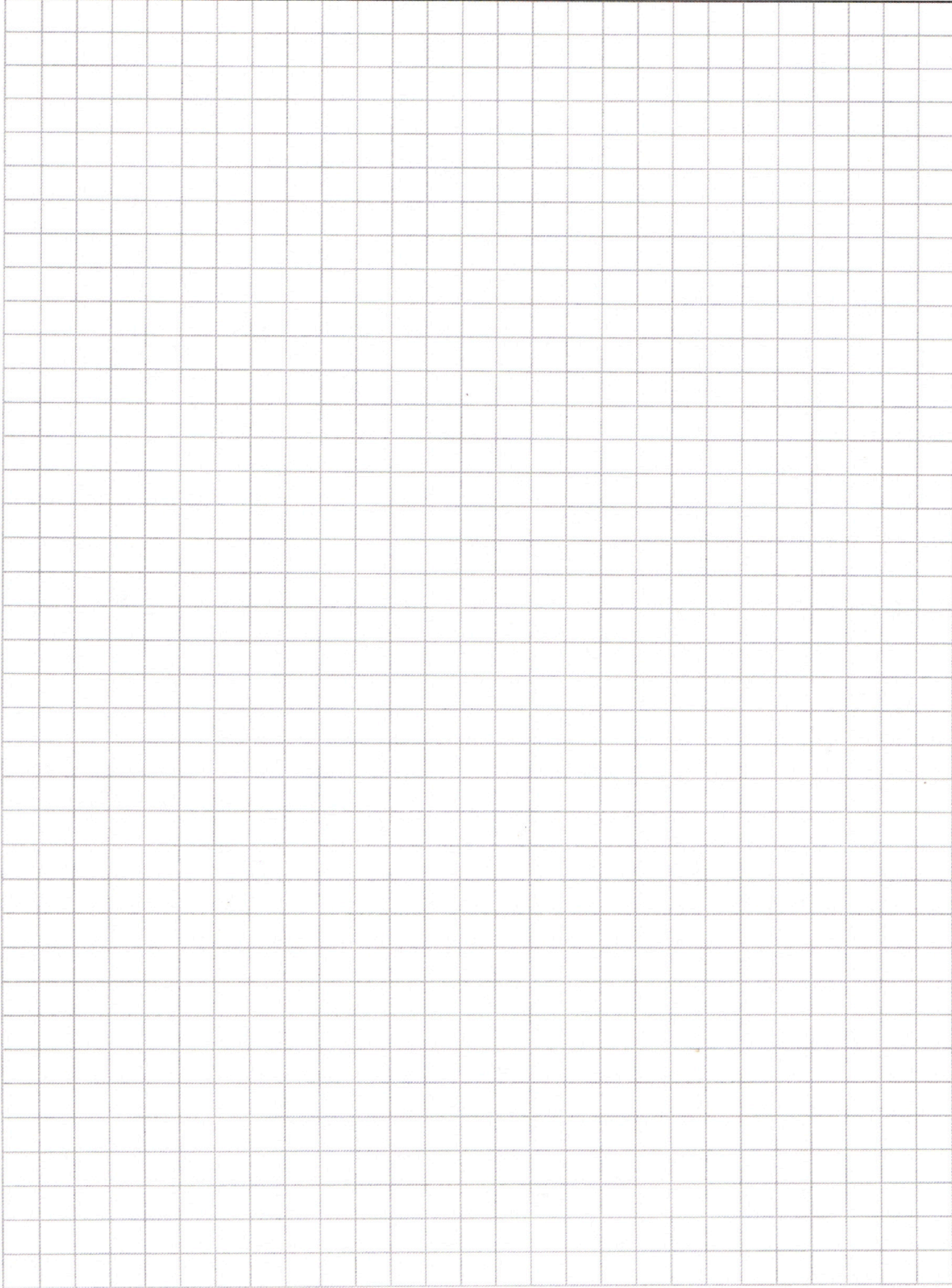
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

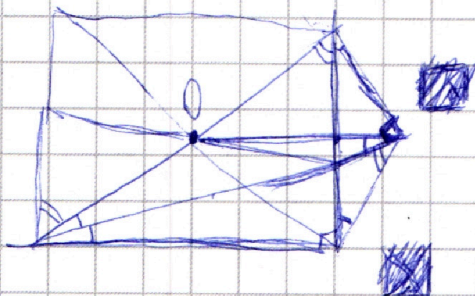
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sin x \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos x \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos x \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{-\sin x + \cos x}{-\cos x - \sin x} = \frac{-\operatorname{tg} x + 1}{-1 - \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}$$

$$\frac{6 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} \quad ; \quad \frac{6 \operatorname{tg} x + 1 - \operatorname{tg}^2 x - (\operatorname{tg} x - 1)(1 - \operatorname{tg} x)}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$6 \operatorname{tg} x + 1 - \operatorname{tg}^2 x + (1 - \operatorname{tg} x)^2 = 6 \operatorname{tg} x + 1 - \operatorname{tg}^2 x + 1 - 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x = 2 + 4 \operatorname{tg} x = 0$$

$$x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

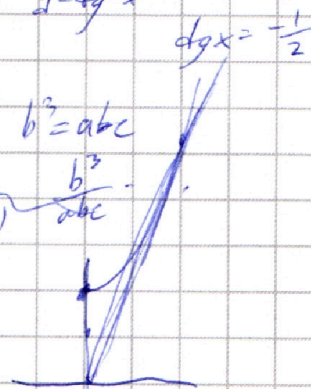


$$b^2 = ac \quad b^3 = abc$$

$$\frac{b^3}{ac} = \frac{abc}{abc}$$

$$c = qb = \frac{b^2}{a}$$

$$e^{x-1} = x$$



$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$$

$$3 + = (a+b+c) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 6$$

$$+ = 2$$

$$2 + \sqrt{9} \quad 3 + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{5} \quad 1 + \sqrt{2}$$

$$5 \quad 5 + 2\sqrt{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$b = 2^{50} \cdot 3^{50}$
 $a = \pm 2^n \cdot 3^m, 0 \leq n, m \leq 50$
 2^{100}

② $x(x^2 - a) = -4x$

$x^2 - a = -4$
 $x^2 = a - 4$
 $x = \pm \sqrt{a - 4} \text{ (A, C)}, y = \pm 4\sqrt{a - 4}$
 $y = \pm \sqrt{a - 4} \text{ (B, D)}$

$x^3 - ax = \frac{1}{4}x$ (BD)
 $x^2 - a = \frac{1}{4}$
 $x = \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}$ (BD)

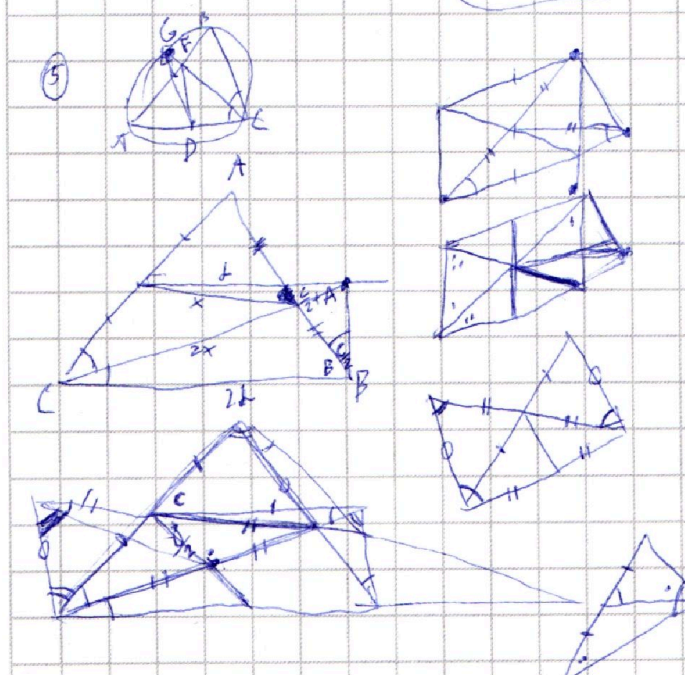
③ $\ln^3 x - (x-2)(\ln 2 + \ln x) + (\ln 2 \ln x) \geq 0$
 $\ln^2 x - x \ln 2 + \ln 2 - x \ln x + \ln x + \ln 2 \ln x \geq 0$
 $\ln 2(1-x + \ln x) + \ln x(1-x + \ln x) \geq 0$
 $(\ln 2 + \ln x)(1-x + \ln x) \geq 0$
 $(\ln 2 - \ln \frac{1}{2})(1 + \ln x - x) \geq 0$
 $(\ln(e^x) - \ln(1/x))$

$(\ln 2x)(\ln \frac{ex}{2x}) \geq 0$
 $\ln 2x (\ln x + e^{-x}) \geq 0$
 $2x \sqrt{1-x} \cdot x \cdot e^{-x} \sqrt{1-x}$
 $x \sqrt{1-x} \cdot x \sqrt{1-x}$

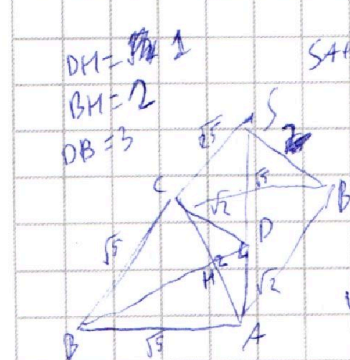
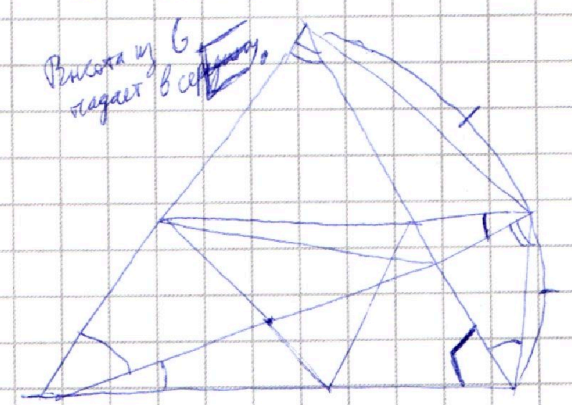
$4\sqrt{a-4} = \sqrt{a+\frac{1}{4}}$
 $16a - 64 = a + \frac{1}{4}$
 $15a = 64 + \frac{1}{4}$
 $a = \frac{64 + \frac{1}{4}}{15}$

④ $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin x \cos x - \cos x \sin x}{\sin x \cos x - \cos x \sin x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 1}$

⑤ $z - \frac{7}{z^2} = y^3 - \frac{7}{y^3}$
 $x^3 + \frac{7}{y^3} = \dots$



$t + (y^3 - x^3) = \left(\frac{7}{y^3} + \frac{7}{x^3}\right)$
 $t - \frac{7}{t} = t + (b-a) - 7\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$
 $S = 3t - 3 \cdot 7 \left(\frac{a+b}{ab} + \frac{b+c}{bc} + \frac{a+c}{ac}\right)$



$SA + SB = \sqrt{2 + SD^2} + \sqrt{9 + SD^2} = 2 + \sqrt{5}$
 $\geq 3 + \sqrt{2} > 2 + \sqrt{5}$
Значит $B = B'$, $DB = 1$
 $SA + SA' = \sqrt{2 + SD^2} + \sqrt{1 + SD^2} = 2 + \sqrt{5}$
 $SD^2 = 3, SD = \sqrt{3}$
 $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2-1) = \frac{\sqrt{3}}{6}$

