



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!



$ab: 2^{15} \cdot 7^{11} \quad (1)$
 $bc: 2^{17} \cdot 7^{12} \quad (1)$
 $ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \quad (3)$
 (найти $abc(mn)$)

перемножим все алфа и гриве триплети:
 $(ab \cdot bc \cdot ac): (2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2^{17} \cdot 7^{12} \cdot 2^{23} \cdot 7^{39})$
 $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2: 2^{55} \cdot 7^{62}$

Каждое ab , наименьшими значениями $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$ для ab тогда, когда
 $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2: 2^{55} \cdot 7^{62}$ Но! $a, b, c \in \mathbb{N}$ (по ум. соотв) abc — кратна натур
 А $2^{55} = 2^{54} \cdot 2$ Если ab или ac кратны 2 , то получится:
 $7^{39} \cdot 2^{27} \cdot \sqrt{2}$ но $\sqrt{2}$ — не натур. Соотв, или можно упростить 2^{55} (умножить)
 тогда на какое-то число, тогда будет всего наименьшими

Можно, что тогда можно упростить 2^{55} на 2 . Тогда:
 $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2^{56} \cdot 7^{62} \quad (abc > 0)$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{31}$$

Почему не а могу упростить? По условию, у нас числа кратные
 (из (1), (1), (3)) соотв, числа a, b, c могут быть любыми, но кратко
 делит числа (наприм: $ab: 2^k \cdot 7^l$, где k, l — любые, $\in \mathbb{N}$)

соотв, min число будет тогда, когда все k для равно 1.
 (k_1, l_1, k_2)
 $(1, 1, 1)$

Но, такой случай рассмотрен или уже выше. Но ~~зачем~~

~~что/если/или/зачем/или/квартет~~

А наша ab а может быть в итоге из $k(k_1, l_1, k_2)$
 разницы нет, ведь главное за-
 чать.

Ответ $abc: 2^{28} \cdot 7^{31}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b}$ - несократим (а, b - взаимно простые числа).

$a \in \mathbb{N}^+, b \in \mathbb{N}^+$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ ← как можно сократить дробь?

Перепишем и (там разность, в каком виде мне представить дробь (перепишем или обобщим, как устно или явно и то же самое).

$$\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b} \quad \text{соотн.} \quad \frac{a^2+2ab+b^2-9ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2-9ab}{a+b}$$

$$= a+b - \frac{9ab}{a+b} \quad \text{соотн. т.к. } \frac{ab}{a+b} \text{ не кратно (никак не делится)},$$

то $(a+b) \nmid 9ab$ (*).

1) рассмотрим несколько случаев. Пусть $a=3, b=5$ $\frac{3}{5}$ - макс дробь (лучше).

соотн. $\frac{3+5}{9-7 \cdot 5 \cdot 3+25} = \frac{8}{71}$ т.е. дробь не сократима (только если $m=1$)).

2) пусть $b=3, a=23$ $\frac{23}{3}$ - макс дробь, (13.2).

$$\frac{26}{23^2-7 \cdot 3 \cdot 23+9} = \frac{26}{23 \cdot 2+9} = \frac{26}{55} \quad \text{(тоже не сократима)}$$

Пусть, что получ. 1 группа 2 группы, которые и, которых не сократим, что получ. дробь такая не сократима (даже если это другая дробь).

Пусть $m=1$. соотн. $m(\max)=1$.

но если не две какие-то, то пусть $a=7k, b=7p$

Ответ: 1. соотн. $\frac{7(k+p)}{49k^2-7 \cdot 7k \cdot p+49p^2} = \frac{k+p}{7k^2-49kp+7p^2}$

или самым тем, если этот m должно быть только две не числа, то иными, тем m больше. и если брать

какой-то чис. коэффициент. пусть k и p , и тогда дробь сократима этот коэффициент. пусть m - б.е. (не вар) + то укажем

3) но вернемся к *. $(a+b) \nmid 9$ не получается

Ответ: 2. Пусть $a=4, b=5$. тогда $\frac{4+5}{16-7 \cdot 4 \cdot 5+25} = \frac{9}{-119}$ соотн. $m(\max)=9$ (по условию не получается)

Ответ: если m должно быть две не $(4,5)$, то $m=1, m=9$ если $a=4, b=5$ $(a+b)=9$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$O_1(W, R_1)$

$O_2(\Omega, R_2)$

AB кас. W в P, C

$AC = 17$ ($AC = 17x$)

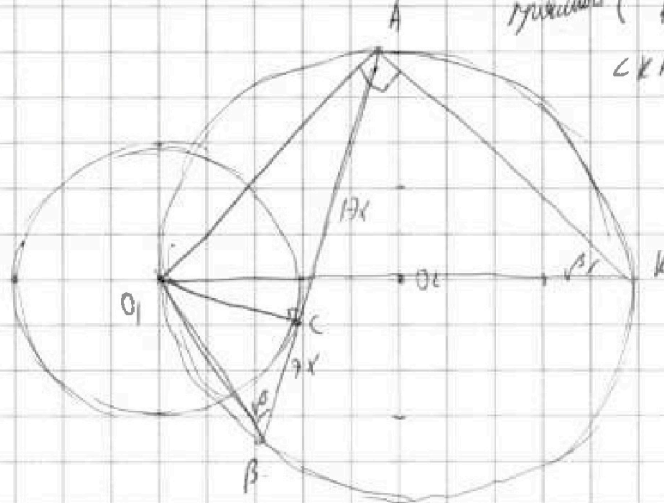
$BC = 7$ ($BC = 7x$)

$R_1 = 7$

$R_2 = 13$

$AB \perp$

Решение:
 $BC = 7x$



O_1, O_2, K - на одной
прямой (A, P - диаметр,
 $\angle KAO_1 = 90^\circ$)

пусть $\angle O_1BA = \beta$, тогда:

$$\angle O_1BA = \angle O_1KA = \beta, \quad (90^\circ); (\beta)$$

тогда, $\triangle O_1CB \sim \triangle O_1AK$ (по 2-м углам)

$$\frac{BO_1}{KO_1} = \frac{O_1C}{AO_1}, \quad \text{по подобию (по радиусу)}$$

$$KO_1 = 26, \quad (= 2R_2)$$

$$O_1C = 7 = R_1 \text{ (кас. AB)}$$

$$\frac{BO_1}{26} = \frac{7}{AO_1},$$

$$AO_1 \cdot BO_1 = 7 \cdot 26.$$

тогда, по св-ву кас. и сек. (см. BO_1 и AO_1):

$$49x^2 = (BO_1 - 7) \cdot (BO_1 + 7)$$

$$289x^2 = (AO_1 - 7) \cdot (AO_1 + 7)$$

$$289x^2 = (AO_1 - 7) \cdot (AO_1 + 7)$$

$$49x^2 = BO_1^2 - 49$$

$$289x^2 = AO_1^2 - 49$$

$$49x^2 = \frac{49 \cdot 26^2}{AO_1^2} - 49$$

$$289x^2 = AO_1^2 - 49$$

$$289x^2 = \frac{26^2}{x^2 + 1} - 49,$$

$$289x^4 + 289x^2 = 26^2 - 49x^2 - 49$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$(x^2 + 1)AO_1 = 26^2$$

$$x^2 = \frac{26^2}{AO_1^2} - 1,$$

$$\text{тогда, } AO_1 = \frac{26}{x^2 + 1}$$

$$x^2 = \frac{169 \pm \sqrt{289}}{289}$$

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{289} \pm 169}{289}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 = \frac{207 - 169}{289}$$

$$207 = 169^2 + 289 \cdot 627$$

$$x = \frac{\sqrt{169^2 + 289 \cdot 627} - 169}{17}$$

$$AB = \frac{24}{17} \cdot \sqrt{169^2 + 289 \cdot 627} - 169$$

$$\text{Ответ: } \frac{24}{17} \cdot \sqrt{169^2 + 289 \cdot 627} - 169$$

$$\frac{24}{17} \cdot \sqrt{209705} - 169$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

003. $\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 & ① \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 & ② \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} D = 9 - 12 = -3 < 0 \\ D = 9 - 12 = -3 < 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ всегда ≥ 0

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x + 1 = -9x + 1 \quad (1 - 9x) : \text{умнож!}$$

пусть

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = t$$

$$t \geq 0, p \geq 0$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = p$$

Тогда:

$$003. \quad 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$t - p = t^2 - p^2 \quad ; \quad t - p = (t - p)(t + p)$$

$$(t - p)(t + p - 1) = 0$$

$$① \quad t - p = 0$$

$$t = p$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

возводим в квадрат (оба ≥ 0)

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$1 = 9x$$

$$x = \frac{1}{9}$$

(проверим 003)

$$② \quad t + p = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

возведем в квадрат (оба ≥ 0)

$$3x^2 - 6x + 2 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 3x^2 + 3x + 1 = 1$$

$$6x^2 - 3x + 2 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = -6x^2 + 3x - 1$$

$$\text{умнож!} \quad 6x^2 - 3x + 2 \leq 0 \quad \begin{cases} -6x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ 6x^2 - 3x + 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{но:} \quad 6x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$D = 9 - 12 = -3 < 0 \quad \text{умнож!}$$

$$6x^2 - 3x + 2 > 0 \quad (\text{всегда})$$

$$\text{умнож!} \quad ② \quad \emptyset \quad (\text{корней нет})$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{9}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$O(0,0), P(-13,26), Q(3,26), R(16,0)$

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \quad 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$\tau A, B \in \text{паралл}$

$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$

$2(x_2 - x_1) = 14$

узнаем координаты.

1) узнаем, что еще

$x_2 - x_1 = 7$

$y_2 - y_1 = 14$

$y_2 = 0, y_1 = -14$

когда? если

$x_1 = x_2 = 0$

$y_2 - y_1 = 14$

$\min y_1 = 0$

$y_2 = 14$

когда? если

координаты

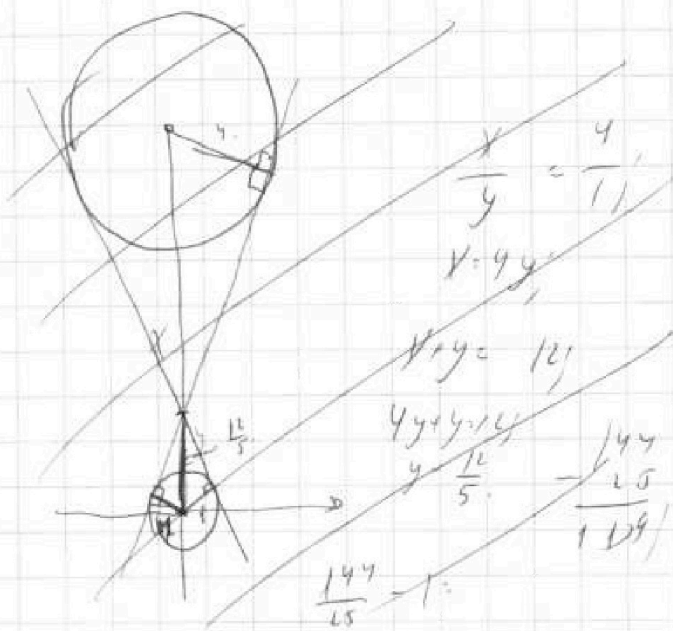
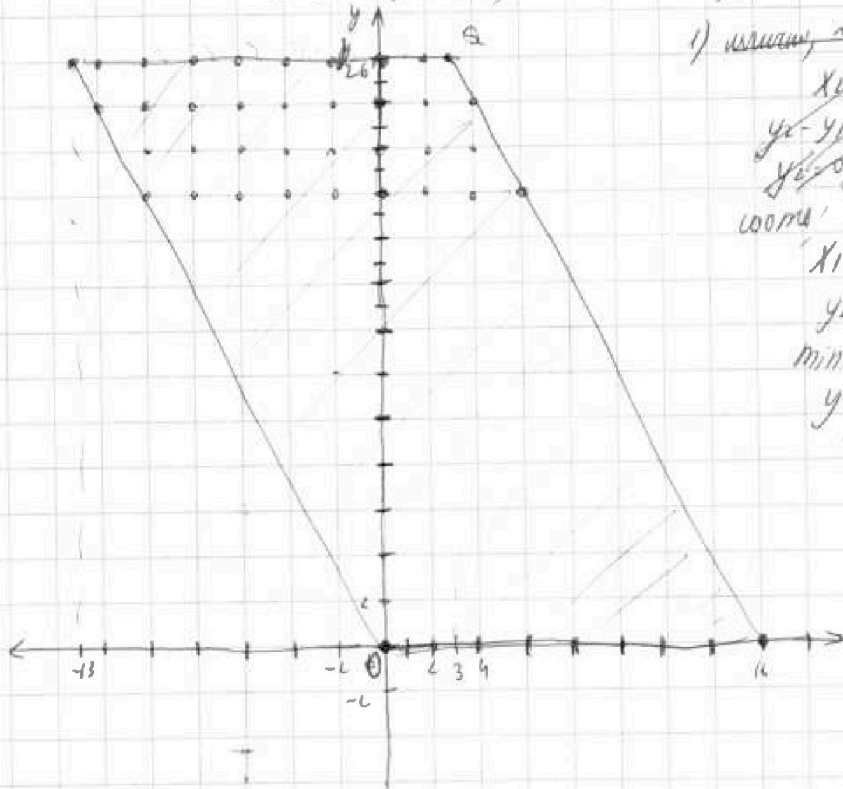
$y_2 = 26$

когда?

в 1-ой

$x_{\text{вср}} = 13$

1



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④[∞]

$$x^2 + (8b + ax + 12)^2 = 16$$

$$(x^2 + 64b^2 + 8abx + 96b + 8abx + a^2x^2 + 12ax + 96b + 144 + 16abx + 64b^2 + 192b + 240x + 121 = 0$$

$$x^2(x^2 + a^2 + 1) + 16abx + 64b^2 + 192b + 240x + 121 = 0$$

$$y'(a^2 + 1) + x(16ab + 240) + 64b^2 + 192b + 121 = 0$$

$$D = 0 \quad 8a(8ab + 12)$$

$$D = (16ab + 240)^2 -$$

$$D_1 = (8ab + 120)^2 - (a^2 + 1)(64b^2 + 192b + 121) = 0$$

$$(8ab + 120)^2 = (a^2 + 1)(64b^2 + 192b + 121)$$

$$a^2(8b + 12)^2 = (a^2 + 1)(64b^2 + 192b + 121) \quad \text{так как } a^2 = 1 - 64b^2$$

$$a^2(2b + 3)^2 = (a^2 + 1)(4b^2 + 12b + 8)$$

$$a^2(2b + 3)^2 = (a^2 + 1)(4b^2 + 12b + 8)$$

$$a^2(4b^2 + 12b + 9) = (a^2 + 1)(4b^2 + 12b + 8)$$

$$a^2(4b^2 + 12b + 8) + a^2 = a^2(4b^2 + 12b + 8) + 4b^2 + 12b + 8$$

$$a^2 = 4b^2 + 12b + 8$$

$$1 - 64b^2 = 4b^2 + 12b + 8$$

$$68b^2 + 12b + 7 = 0$$

$$D =$$

пусть:

$$\begin{cases} y^2 + (8b - ax)^2 = 1 \\ x^2 + (8b - ax - 12)^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a^2 = 64b^2 \\ a^2 = 4b^2 - 12b + 8 \end{cases}$$

(не нужно решать тут, пусть решит кто-то)

$$a^2 = 64b^2 - 1$$

$$64b^2 - 1 = 4b^2 - 12b + 8$$

$$60b^2 + 12b - 9 = 0$$

$$D_1 = 36 + 960 = 6616 = 6^2 \cdot 4^2$$

$$b_{1,2} = \frac{-6 \pm 24}{60}$$

$$b_1 = \frac{1}{5}, \quad b_2 = \frac{3}{10}$$

$$b_1 = \frac{1}{5}, \quad a_1^2 = \frac{64 \cdot 1}{5} - 1 = 1$$

$$a^2 = 15, \quad a = \pm \sqrt{15}$$

$$b_2 = \frac{3}{10}, \quad a_2^2 = \frac{64 \cdot 9}{100} - 1 = \frac{16 \cdot 9}{25} = 1, \quad a = \pm \frac{\sqrt{144}}{5} = \pm \frac{12}{5}$$

Ответ: $a = \pm \sqrt{15}, a = \pm \frac{12}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!

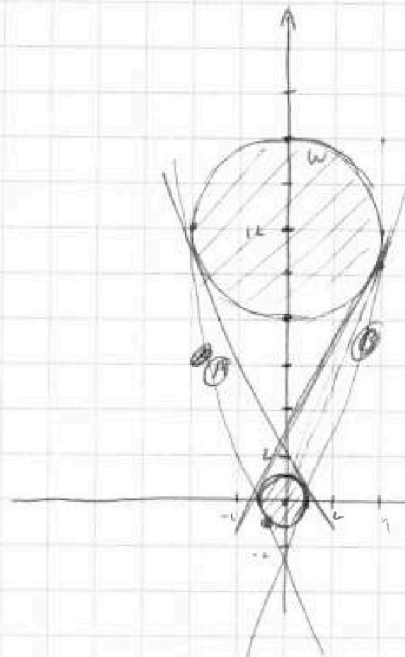


$$\begin{cases} ax+by \\ a(x+y-8b)=0 \quad (2) \end{cases} \quad y = +8b - ax$$

$$(x^2+y^2-1)(x^2+(y+1)^2-16) \leq 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2+y^2=1 \\ & x^2+(y+1)^2=16 \end{aligned} \quad \text{две окр.}$$

или показываю зигор - оба.



1) если $b=0$ то:

$y = -ax$
составляю min ширины -
кас. к окр. w
составляю

$$x^2 + (-ax-1)^2 = 16$$

$$x^2 + a^2x^2 + 24ax + 12/1 = 16$$

$$x^2(a^2+1) + 24ax + 448 = 0$$

$$D = 0 \quad (\text{одно реш.})$$

$$D: 12a^2 - 448(a^2+1) = 0$$

$$12a^2 = 448$$

$$12a^2 = 448(a^2+1)$$

$$448a^2 = 448(a^2+1)$$

$$a^2 = 2 \quad a = \pm 2\sqrt{2} \quad \text{но}$$

это значение не подходит.
иногда
или не имеет
или не имеет
или не имеет

4) если

2) су. бцр, пусть кас. показываю - a , b - кас. к 2 окр. сразу (прямая A и B)
или углубили) пусть

$$\begin{cases} x^2 + (8b-ax)^2 = 1 \quad (1) \\ x^2 + (-8b-ax-1)^2 = 16 \quad (2) \end{cases}$$

(1)

$$x^2 + 64b^2 + 16axb + a^2x^2 = 1$$

$$x^2(a^2+1) + 16axb + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = 0 \quad D: 64 -$$

$$D_1 = 64a^2b^2 - (a^2+1)(64b^2+1) = 0$$

$$64a^2b^2 - 64a^2b^2 - a^2 - 64b^2 + 1 = 0$$

$$a^2 + 64b^2 = 1 \quad (1)$$



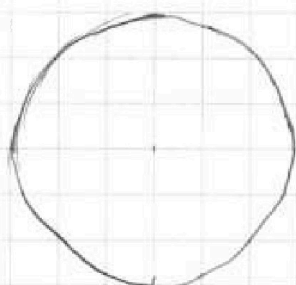
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 169 \\ \hline 1521 \\ 10140 \\ 16900 \\ \hline 28561 \\ + 81143 \\ \hline 209704 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \sqrt{621} \\ \hline 1963 \\ 5780 \\ 173400 \\ \hline 181193 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 11 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ + 48 \\ \hline 53 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ + 12 \\ \hline \end{array}$$

$$+ 14$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 16 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 1820 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 1820 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 200000 \\ 360000 \\ 500 \\ 250000 \\ 400 \\ \hline 250000 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

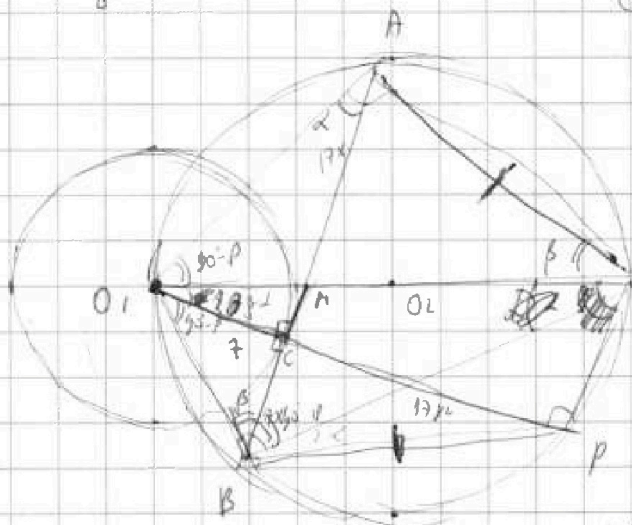
$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 169 \\ \hline 1521 \\ 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ + 8 \\ \hline 62 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 7 \\ \hline 33 \end{array}$$

$$(26-7)(26+7) =$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ \times 19 \\ \hline 297 \\ 510 \\ \hline 627 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 338 \\ \times 115 \\ \hline 21 \\ 13 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$13^4 + 17^4 (26^2 - 7^4)$$

$$\angle \alpha = \frac{7}{17}$$

$$\beta = 1$$

$$43 \alpha^2 = BO_1$$

$$\begin{array}{r} 284 \\ \times 46 \\ \hline 358 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 520 \\ \hline 626 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 284 \\ \times 46 \\ \hline 358 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 520 \\ \hline 626 \end{array}$$

$$\triangle CBO_1 \sim \triangle AKO_1$$

$$\frac{CB}{AK} = \frac{BO_1}{KO_1} = \frac{CO_1}{AO_1}$$

$$\frac{7x}{AK} = \frac{BO_1}{26} = \frac{7}{AO_1}$$

$$AO_1 \cdot BO_1 = 7 \cdot 26$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1.711 - 9h + \dots = 1.718 + 911.94.12$$

$$= (9 + 911.94) / 20$$

$$2x + y = 14$$

$$y = 14 - 2x$$

$$2x + y = 6$$

$$2x + y = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$

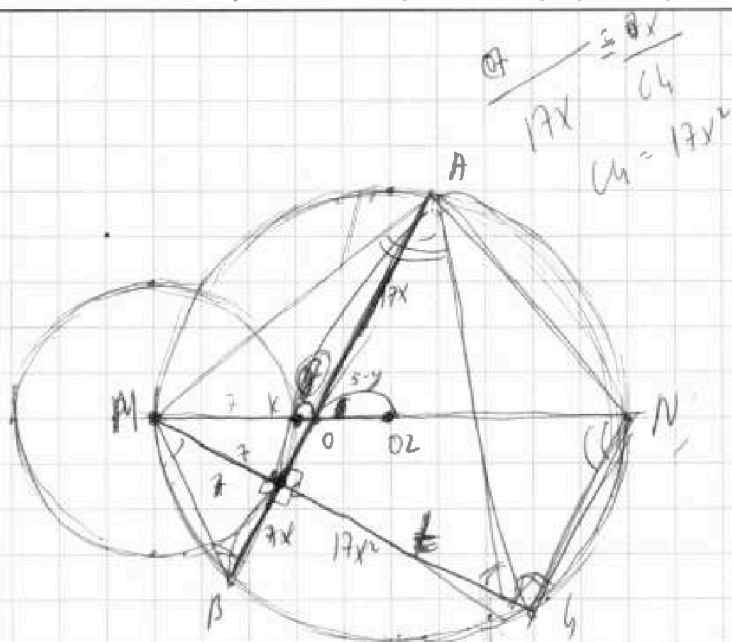
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{17x}{17y} = \frac{17z}{17w}$$

$$17x \sim 17y$$

$$\triangle MCB \sim \triangle ACU$$

$$\frac{7}{17x} = \frac{17y}{17z}$$

$$5-y+17=$$

$$17x \cdot 17y = 7 \cdot 17z$$

$$17x \cdot 17y = 7 \cdot 17z$$

$$17z = 17x \cdot 17y$$

$$5-y+17=$$

$$MO \cdot ON = PO \cdot OQ$$

$$(7+y) \cdot (17-y) = 7 \cdot 17z$$

$$\frac{7}{7+y} = \frac{7+y}{17z}$$

$$(7+y)(17-y) = 7 \cdot \frac{7 \cdot 17z - 7(7+y)}{7+y}$$

$$7 \cdot 17z = (7+y) \cdot 17 + 17(7+y)$$

$$\frac{7}{7+y} = \frac{7+y}{17z}$$

$$z = \frac{7 \cdot 17z}{7+y} - 1$$

$$z = \frac{7 \cdot 17z - 7(7+y)}{7+y}$$

$$\frac{7}{7+y} = \frac{7+y}{17z}$$

$$(7+y)^2 \cdot (17-y) = 7 \cdot 7 \cdot (17z - 7-y)$$

$$(7+y)^2 \cdot (17-y) = 49(17z - 7-y)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



15

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2-6x+2+9x-1} = 1-9x$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2-6x+2} = 1-9x$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$3x^2+3x+1 - 3x^2-6x-2 = 1-9x$$

$$-9x-1 = 1-9x$$

$$2x_1 + y_1 = k$$

$$2x_1 + y_1 = 14-k$$

$$1-t = t^2 - p = (t-p)(t+p)$$

$$(t-p)(t+p-1) = 0$$

$$t-p = 1$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} = 3x^2+3x+1$$

$$3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1$$

$$-9x+1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{9}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

$$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 = 1$$

$$6x^2-3x+2 = 0$$

$$2x_1 + y_1 = 14-k$$

$$6x^2-3x+2 \leq 0$$

$$4(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1) = (3x^2-3x+2)^2$$

$$4(9x^4+9x^3+3x^2-18x^3-18x^2+2) = 9x^4-9x^3-9x^2+2$$

$$6x^2-18x+2 = 0$$

$$3x^2-9x+1 = 0$$

$$4(9x^4-9x^3-9x^2+2) = 0$$

$$36x^4-36x^3-36x^2+8 = 0$$

$$6x^4-12x-4 = 0$$

$$x = \frac{36 \pm \sqrt{312}}{69}$$

$$9-11.4$$

$$6 = 2\sqrt{38}$$

$$x_1 = \frac{36 \pm \sqrt{312}}{69}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

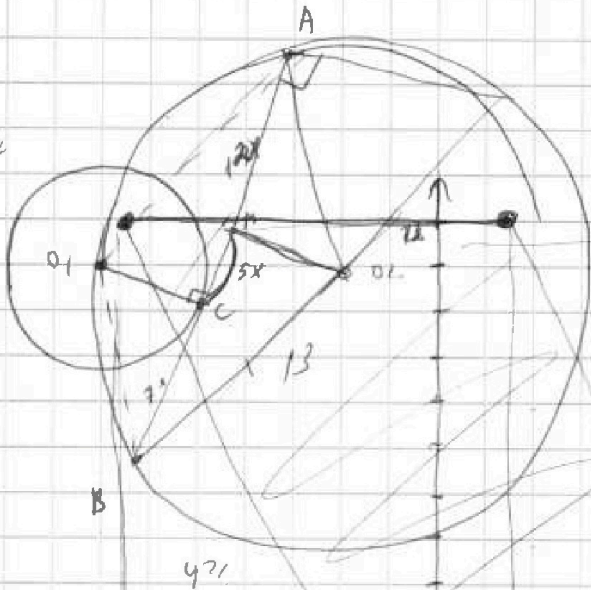
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} kx + b &= y_1 \\ kx_2 + b &= y_2 \\ kx_1 + b &= y_1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y &\leq 21 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

$$R_1 = 7$$

$$y \in R_1 = 13$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 - 6x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} &= 1 - 9x \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x} &= \sqrt{3x^2 + 3x + 2 - 9x} \end{aligned}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = t^2 \quad (t \geq 0 \text{ (числ.)})$$

$$\sqrt{t+p} - \sqrt{t} = p$$

$$\sqrt{t+p} = p + \sqrt{t}$$

$$0+p = p^2 + 2p\sqrt{t} + t$$

$$p^2 + 2p\sqrt{t} - p = 0, \quad p=0$$

$$p + 2\sqrt{t} - 1 = 0, \quad 2\sqrt{t} = 1-p$$

$$4t = 1 - 2p + p^2$$

$$4x^2 + 12x + 4 = 1 - 2 + 18x + 1 - 18x + 81x^2$$

$$4t = (1-p)^2$$

$$4 - 12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 6.614.69 =$$

$$= 66+t$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 4 \\ \hline 676 \\ + 276 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times 69 \\ \hline 648 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 3 \\ \hline 207 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 4 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9a \\ \times 1 \\ \hline 9a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9a \\ \times 1 \\ \hline 9a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \\ a/b = a \cdot b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 65 \\ \hline 845 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 81 \\ \hline 6561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 3 \\ \hline 207 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 3 \\ \hline 207 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 3 \\ \hline 207 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 1 = 0 \quad D = 9 - 12 = -3$$

$$D = 9 - 6 = 3$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0 \quad 1 - 9x = p$$

$$\sqrt{t - p} - \sqrt{t} = p$$

$$p > 0$$

$$t - p + t = 2\sqrt{t} \sqrt{t - p} = p^2$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{t + p} - \sqrt{t} = p$$

$$p > 0$$

$$\sqrt{t + p} - 2\sqrt{t} \sqrt{t + p} + t = p^2$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{t + p} - \sqrt{t} = p$$

$$\sqrt{t + p} = p + \sqrt{t}$$

$$t + p = p^2 + 2p\sqrt{t} + t$$

$$p^2 + 2p\sqrt{t} - p = 0$$

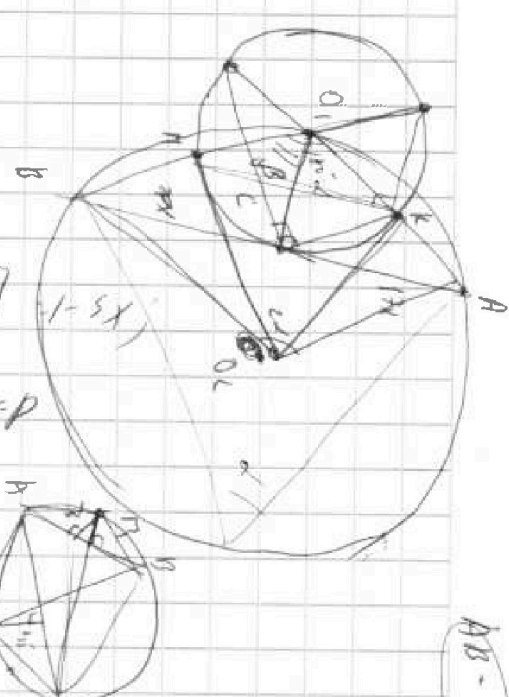
$$p(p + 2\sqrt{t} - 1) = 0$$

$$p + 2\sqrt{t} = 1 - p$$

$$4t = 1 - 4p + p^2$$

$$p + 2\sqrt{t} = 1 - p$$

$$4t = 1 - 4p + p^2$$



AB - 24x

$$R_1 = 7$$

$$R_2 = 13$$

$$R_3 = 13$$

$$R_4 = 13$$

$$R_5 = 13$$

$$R_6 = 13$$

$$R_7 = 13$$

$$R_8 = 13$$

$$R_9 = 13$$

$$R_{10} = 13$$

$$R_{11} = 13$$

$$R_{12} = 13$$

$$R_{13} = 13$$

$$R_{14} = 13$$

$$R_{15} = 13$$

$$R_{16} = 13$$

$$R_{17} = 13$$

$$R_{18} = 13$$

$$R_{19} = 13$$

$$R_{20} = 13$$

$$R_{21} = 13$$

$$R_{22} = 13$$

$$R_{23} = 13$$

$$R_{24} = 13$$

$$R_{25} = 13$$

$$R_{26} = 13$$

$$R_{27} = 13$$

$$R_{28} = 13$$

$$R_{29} = 13$$

$$R_{30} = 13$$

$$R_{31} = 13$$

$$R_{32} = 13$$

$$R_{33} = 13$$

$$R_{34} = 13$$

$$R_{35} = 13$$

$$R_{36} = 13$$

$$R_{37} = 13$$

$$R_{38} = 13$$

$$R_{39} = 13$$

$$R_{40} = 13$$

$$R_{41} = 13$$

$$R_{42} = 13$$

$$R_{43} = 13$$

$$R_{44} = 13$$

$$R_{45} = 13$$

$$R_{46} = 13$$

$$R_{47} = 13$$

$$R_{48} = 13$$

$$R_{49} = 13$$

$$R_{50} = 13$$



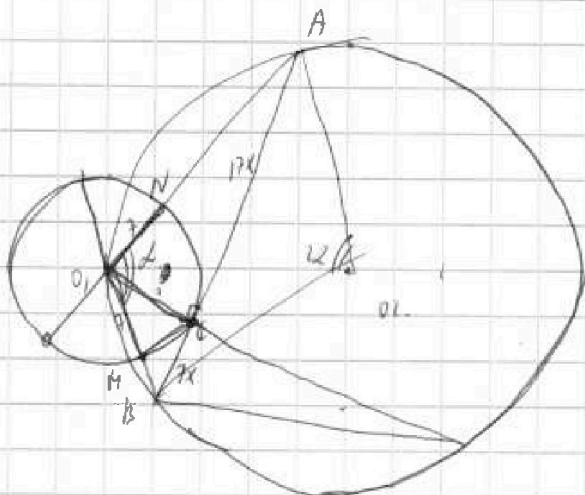
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$285x^2 + 45$$

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha)} = 2.13$$

$$\sin \alpha = \frac{2.13}{24x}$$

$$\sin \alpha = \frac{13}{15}$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 - 1 +$$

$$\sin \alpha = \frac{6x}{13}$$

$$45 - 45x^2 = 45(1 - x^2)$$

$$OB = 7\sqrt{x^2 + 1}$$

$$OA = \sqrt{285x^2 + 45}$$

$$NB \cdot (NB + 14) = 45x^2$$

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha)} = 2.13$$

$$AB = 2.26 \cdot \sin \alpha$$

$$24x = 2.26 \cdot \sin \alpha$$

$$6x = 13 \sin \alpha, \sin \alpha = \frac{6x}{13}$$

$$\cos \alpha =$$

$$2 \cdot 13^2 \cdot (1 - \cos \alpha) = AB^2$$

$$2 \cdot 13^2 \cdot (1 - \cos \alpha) = AB^2$$

$$2 \cdot 13^2 \cdot 2 \cdot \sin^2 \alpha = AB^2$$

11

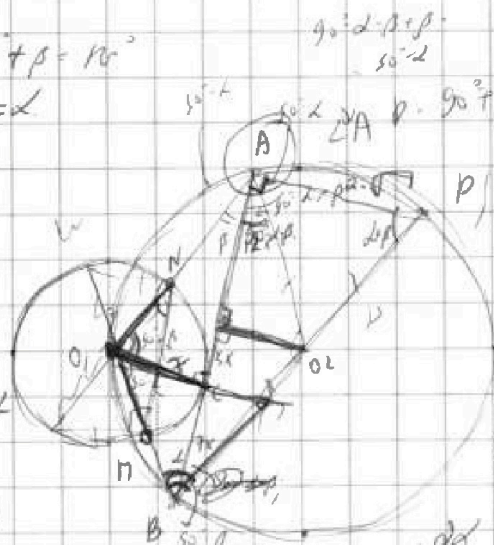
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$90^\circ - \alpha + 50^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$\beta = \alpha$$

$$90^\circ - \alpha + \beta = 180^\circ$$

$$50^\circ - \alpha$$

$$AB = 2 \cdot 13$$

$$571/100 - \alpha - \beta$$

$$571/100 - \alpha - \beta$$

$$\frac{24x}{113} = \frac{11x}{13}$$

$$1 - 9 \frac{1}{2} = 0$$

$$b = 22$$

$$b = 3$$

$$\sqrt{165 - 1411}$$

$$90^\circ + \beta$$

$$(w/d + p)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{44}$$

$$\triangle ACO_1 \sim \triangle BCO_1$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$b \cdot (21 + 14) = 45 \cdot 2$$

$$a = 22$$

$$b = 3$$

$$AN(AN + 20) = 18$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b \cdot (21 + 14) = 45 \cdot 2$$

$$a = 22$$

$$b = 3$$

$$AN(AN + 20) = 18$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b \cdot (21 + 14) = 45 \cdot 2$$

$$a = 22$$

$$b = 3$$

$$AN(AN + 20) = 18$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b \cdot (21 + 14) = 45 \cdot 2$$

$$a = 22$$

$$b = 3$$

$$AN(AN + 20) = 18$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b \cdot (21 + 14) = 45 \cdot 2$$

$$a = 22$$

$$b = 3$$

$$AN(AN + 20) = 18$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$

$$b = 3, a = 19$$



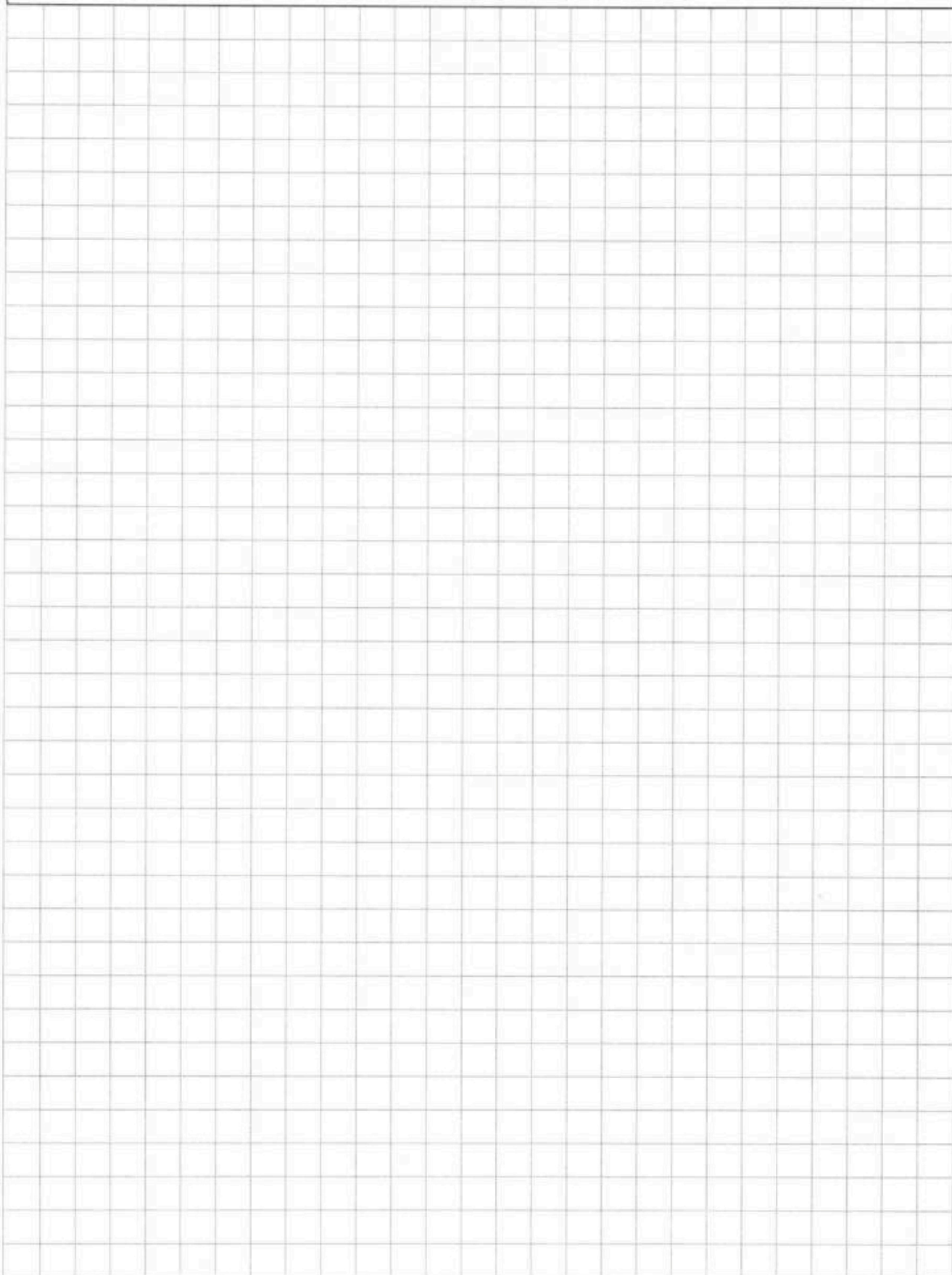
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



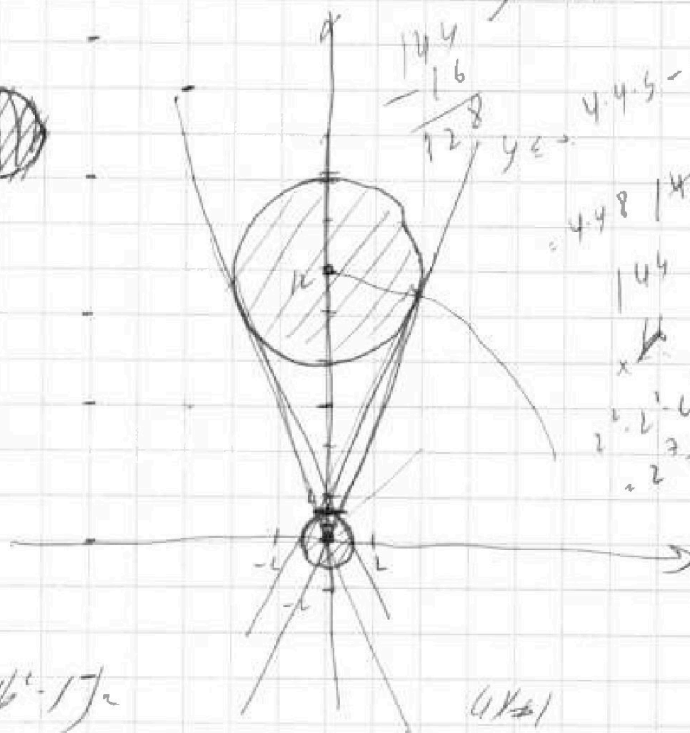
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$x^2 + (-9x-14)^2 = 16$$

$$x^2 + 81x^2 + 252x + 196 = 16$$

$$x'(9) = 246x +$$

$$\begin{aligned} \text{Oval } b: & \quad \text{Oval } b^2 + \text{Oval } b^2 - a^2 - 1 \\ & \quad 1 + a^2 = \text{Oval } b^2 \end{aligned}$$

$$x^2 + 9ab^2 - 16abx + 4^2x^2 =$$

$$x^2(a^2+1) + 6abx + 8b^2 = 0$$

$$2 = 994^2 - (994^2 - 1) = 1$$

2003