



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- ✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- ✓ 3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- ✓ 6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

М

$$\begin{aligned} ab &: 2^{15} \cdot 7^{11} \Rightarrow ab \geq 2^{15} \cdot 7^{11} & \text{Перетикомание пер-ва} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow bc \geq 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac &: 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39} \end{aligned}$$

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68}$$

т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $abc \in \mathbb{N} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 \in \mathbb{N}$.

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68}, \text{ Заметим, что у нас вида}$$

x^2 в разложении всех простых чисел четно (степень каждого простого в разложении ≥ 2).

Но 2^{55} имеет нечетную степень, значит, чтобы $abc \in \mathbb{N}$, число $a^2 b^2 c^2$ имеет хотя бы 2^{56} в разложении.

$$\begin{aligned} a^2 b^2 c^2 &\geq 2^{56} \cdot 7^{68} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34} \\ a^2 b^2 c^2 &\geq 2^{56} \cdot 7^{68} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34} \end{aligned}$$

Покажем, что такое abc достигается, приведем пример.

$$\begin{aligned} abc &= 2^{28} \cdot 7^{34} \\ a &= 2^{10} \cdot 7^{11} \\ b &= 2^5 \cdot 7^{18} \\ c &= 2^{13} \cdot 7^{39} \end{aligned}$$

Заметим, что $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$ достигается.

$$\text{Из условия: } ac \geq 7^{39} \Rightarrow abc \geq 7^{39}$$

$$28 \leq 39$$

Покажем $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$ и $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$, т.к.

это натуральное число, а $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{56} \cdot 7^{68}$.

Покажем, что $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$ достигается.

$$\begin{aligned} a &= 2^{10} \cdot 7^{11} \\ b &= 2^5 \cdot 7^{18} \\ c &= 2^{13} \cdot 7^{28} \end{aligned} \Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Ответ: $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Пусть $a+b \equiv m$, тогда и $(a+b)^2 \equiv m$, но
нам мы хотим, чтобы дробь можно
было сократить на m , то и $(a+b)^2-9ab \equiv m$

$$(a+b)^2 \equiv m \Rightarrow 9ab \equiv m \quad \text{Заметим, что т.к.}$$

$\frac{a}{b}$ - несократима, то в ее разложении
на простые нет одинаковых $\Rightarrow a+b \equiv m$, и
такого m (и даже его делителя простого
делителя) нет в разложении ни a ни b ,
иначе:

Пусть $m \equiv r$ и $a \equiv r$ (где r - простое, тогда)

$$r \cdot k + b \equiv r \cdot n \Rightarrow b \equiv r - \text{противоречие т.к.}$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1, \text{ т.к. } \frac{a}{b} \text{ несократима}$$

Получим, что все делители числа $a+b$ от-
сут от делителей a и $b \Rightarrow$ дробь
от $a \cdot b$

$$\text{Но } 9ab \equiv m \Rightarrow m \text{ не делит } 9, \text{ т.к. иначе } ab \equiv m, \text{ а по } 9ab \equiv m \Rightarrow 9 \equiv m \Rightarrow m \equiv 9 \text{ мод } 9.$$

Пример для деления на 9.

$$a=5 \quad b=4$$

$$\frac{5+4}{25-140+16} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11} \quad \text{можно сократить на 9.}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

Дано:

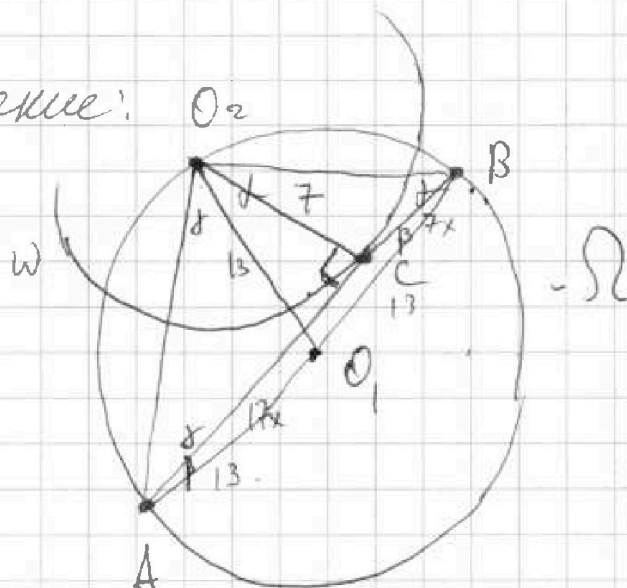
$$\frac{AC_2}{CB} = \frac{17}{7}$$

$$r = 7$$

$$R = 13$$

AB-?

Решение:



Пусть O_1 и O_2 - центры окр-ей Ω и ω соответственно.
 $O_2C \perp AB$, т.к. AB - касательная к ω .

т.к. $A, O_1, B \in \Omega$, то $\triangle O_2O_1B \cong \triangle O_2O_1A \cong \triangle AOB$
равнобедренные, т. $O_2O_1 = O_1B = O_1A = R = 13$.

т.к. $O_1B = O_1A$ - это $\triangle AOB$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle BAO_1 = \angle O_1BA = \beta$

т.к. $O_1O_2 = O_1A = R = 13$, то $\triangle O_2O_1A$ равнобедренный $\Rightarrow \angle O_1O_2A = \angle O_2AO_1 = \gamma$.

т.к. $O_1O_2 = O_1B = R = 13$, то $\triangle O_2O_1B$ равнобедренный $\Rightarrow \angle O_1BO_2 = \angle O_1O_2B = \alpha$

т.к. $O_2C \perp AB$, то $\triangle O_2CB$ и $\triangle O_2CA$ прямоугольные $\Rightarrow$
из $\triangle O_2CB \angle O_2BC = \angle O_2BO_1 - \angle ABO_1 = \alpha - \beta$.

$$O_2B^2 = O_2C^2 + CB^2 = 49 + 49x^2 \Rightarrow O_2B = 7\sqrt{x^2 + 1}$$

по Т. Пифагора

$$\text{Аналогично } O_2A = \sqrt{7^2 + 17^2 x^2}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{O_2C}{O_2B} = \frac{7}{7\sqrt{x^2 + 1}} \text{ из } \triangle O_2CB \quad \frac{7}{O_2B} \text{ из } \triangle O_2CB.$$

$$\text{По Т. синусов из } \triangle AOB \quad \frac{O_2A}{\sin(\alpha - \beta)} = 2R = 26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \frac{O_2A}{26}$$

$$\text{Подставим } \frac{O_2A}{26} = \frac{O_2C}{O_2B} \Rightarrow 7O_2A = 26O_2C \Rightarrow 49O_2A^2 = 26^2 O_2C^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$49 O_2 A^2 = 26^2 O_2 B^2$$

$$7^2 \cdot (7^2 + 17^2 x^2) = 26^2 (7^2 + 7^2 x^2)$$

$$7^4 + 17^2 \cdot 7^2 x^2 = 26^2 \cdot 7^2 + 26^2 \cdot 7^2 x^2 \quad | : 7^2$$

$$7^2 + 17^2 x^2 = 26^2 + 26^2 x^2$$

$$x^2 (26^2 - 17^2) = 7^2 - 26^2$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{7}{O_2 B}$$

$$7 \cdot 26 = O_2 A \cdot O_2 B$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{O_2 A}{26} \Rightarrow$$

$$7 \cdot 7 \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{7^2 + 17^2 x^2} = 7 \cdot 26 \quad | : 7$$

$$\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{7^2 + 17^2 x^2} = 26 \quad | \wedge_2$$

$$(1+x^2)(7^2 + 17^2 x^2) = 26^2$$

$$7^2 + x^2(17^2 + 7^2) + 17^2 x^4 = 26^2$$

$$t = x^2$$

$$17^2 t^2 + (17^2 + 7^2)t - 26^2 + 7^2 = 0$$

$$D = (17^2 + 7^2)^2 + 4 \cdot (26^2 + 7^2) \cdot 17^2$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$t_1 = 1$$

t_2 по Ф.Т. Виета

$$t_1 + t_2 = -\frac{338}{289}$$

$$1 + t_2 = -\frac{338}{289} \Rightarrow t_2 = -\left(\frac{338}{289} + 1\right)$$

$t = x^2 \Rightarrow t_2$ не подходит, т.к. $t_2 < 0$.

$t = x^2 \Rightarrow x = \pm 1$, но x — длина, оставляем
только $x = 1$, иначе линия кет.

$$AB = AC + BC = 17x + 7x = 24x = 24$$

Ответ: $AB = 24$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y^2 = x^2 - 1 - x^2$$

$$y = -ax + 8b$$

$$y^2 = a^2 x^2 - 16abx + 64b^2$$

$$y^2 = (a^2 + 1)x^2 - 16abx$$

$$(-ax - 12 + 8b)^2$$

$$(-ax + (8b - 12))^2 =$$

$$4b^2 - 12b + 8 \geq 0$$

$$\Delta D = 144 - 16 \cdot 8 = 144 - 128 = a^2 x^2 - 2ax(8b - 12) + (8b - 12)^2$$

$$b_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{12 \pm 4}}{8}$$

$$= a^2 x^2 - 16abx + 24ax + 64b^2$$

$$= 192b + 144$$

$$b_1 = 2 \quad b_2 = -1$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 24 \\ + 96 \\ + 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 192 \overline{) 4} \\ 16 \overline{) 48} \\ 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 32 \\ + 48 \\ + 72 \\ \hline 768 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 192 \overline{) 16} \\ 16 \overline{) 12} \\ 32 \end{array}$$

$$12^2 + 12 \cdot 20 \cdot 7$$

$$12(12 + 140)$$

$$12 \cdot 152$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

10031

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 24 = 12 \quad x_1 = \frac{6 + \sqrt{12}}{6} \quad x_2 = \frac{6 - \sqrt{12}}{6}$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{6 - \sqrt{12}}{6}\right] \cup \left[\frac{6 + \sqrt{12}}{6}; +\infty\right)$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$\Delta = 3x^2 + 3x + 1 = 0, \quad D = 9 - 12 = -3 \Rightarrow \text{нет корней.}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = (1 - 9x) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (1 - 9x)^2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 - 9x = (1 - 9x)^2 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1) \quad x \neq \frac{1}{9}$$

$$1 = 1 - 9x + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x, \Rightarrow x \geq 0.$$

$$4x(12x^2 + 12x + 4) = 81x^2$$

$$65x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 4 \cdot 65 = 144 + 16 \cdot 65 = 1248$$

$$x_1 = \frac{-12 \pm \sqrt{1248}}{2 \cdot 65} = -\frac{1}{2} + 52 = 51,5$$

$$x_2 = \frac{-12 - \sqrt{1248}}{2 \cdot 65} = -\frac{1}{2} - 52 = -53,5$$

$$x_2 \text{ не подходит, т.к. } x \geq 0$$

$$x_1 = 51,5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x = \frac{1}{9}$$

Подставим и проверим.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{27} + \frac{4}{3}} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{37}{27}} - \sqrt{\frac{37}{27}} = 0. \quad x = \frac{1}{9} - \text{корень.}$$

линейного

Возведем в первый раз в квадрат,

предположим, что правая часть ≥ 0 .

как видим, или этот корень этот так.

Проверим: $x = 51,5$.

$$\sqrt{3 \cdot 51,5^2 - 6 \cdot 51,5 + 2} - \sqrt{3 \cdot 51,5^2 + 3 \cdot 51,5 + 1} = 1 - 51,5 \cdot 9$$

< 0 .

$$1 - 51,5 \cdot 9 + \sqrt{3 \cdot 51,5^2 + 3 \cdot 51,5 + 1} \geq 0$$

$$1 - 9x \geq \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x - 1 \quad \text{для проверки}$$

$x = 51,5$.

Ответ: $x = \frac{1}{9}, x = 51,5$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

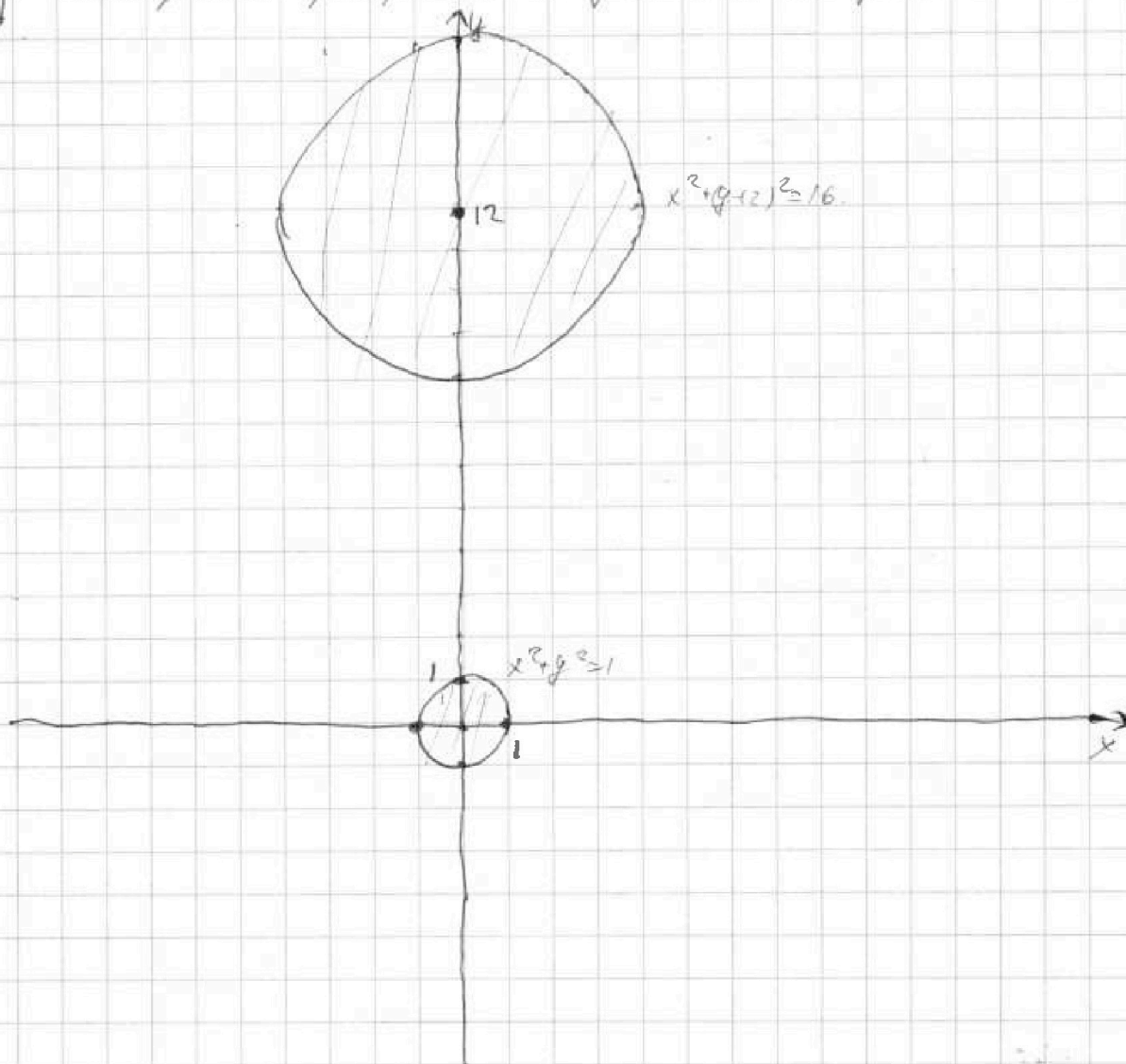
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+by-86=0 \Rightarrow y=-ax+86 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \Rightarrow 1) \text{ либо } \begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \geq 0 \end{cases}$$
$$2) \text{ либо } \begin{cases} x^2+(y-12)^2-16 \leq 0 \\ x^2+y^2-1 \geq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим оба случая; приблизительно
построить графики $x^2+y^2-1=0$ и $x^2+(y-12)^2-16=0$.

1)



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ур-е кр-во $x^2+y^2 \leq 1$ говорит о том, что нам подходит
все точки внутри ок-ти $x^2+y^2=1$ и на границе.
Аналогично с ур-ем $x^2+(y+12)^2=16$.

Получается, в выпрае 1) прямая $y=-ax+8b$
должна либо пересекать ок-ть $x^2+y^2=1$ и либо
касаться, либо не пересекать ок-ть $x^2+(y+12)^2=16$

Получается, что тогда в ур системе
имеет 2 решения, прямая $y=-ax+8b$
должна касаться как ок-ти $x^2+y^2=1$, так
и ок-ти $x^2+(y+12)^2=16$. Т.к. если она будет
их пересекать хотя бы одну из них, то уже
будет бесконечное множество решений
системы.

Это значит, что у системы

$$1) \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=-ax+8b \end{cases} \quad \text{одно решение}$$

$$2) \begin{cases} x^2+(y+12)^2=16 \\ y=-ax+8b \end{cases} \quad \text{также одно решение.}$$

Решим систему 1.

$$\begin{cases} y^2=1-x^2 \\ y=-ax+8b \end{cases} \Rightarrow (ax+8b)^2=1-x^2$$

$$\begin{aligned} & a^2x^2 - 16abx + 64b^2 = 1 - x^2 \\ & a^2(x^2+1) - 16abx + 64b^2 - 1 = 0 \\ & \text{одно решение} - D=0. \\ & D = 256a^2b^2 - 4a^2(64b^2-1) = 0. \\ & D = 256a^2b^2 - 256a^2b^2 + 4a^2 = 0 \\ & 4a^2 = 0. \text{ противоречие} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{подставим} \\ & a^2x^2 + 64b^2 - 16abx + x^2 - 1 = 0 \\ & (a^2+1)x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 = 0. \text{ одно решение} - D=0. \\ & D = 256a^2b^2 - 4(a^2+1)(64b^2-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & D = 256a^2b^2 - 4(64a^2b^2 - a^2 + 64b^2 - 1) \\ & D = 4a^2 - 256b^2 + 4 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4a^2 &= 256b^2 - 4 \\ a^2 &= 64b^2 - 1 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Получаем, что чтобы система имела одно
решение $a^2 = 64b^2 + 1$.

Помогим в случае 2).

$$\begin{cases} x^2 + (y-12)^2 = 16 \\ y = -ax + 8b \end{cases}$$

$$x^2 + (-ax - 12 + 8b)^2 = 16$$

$$x^2 + a^2x^2 - 2ax(8b - 12) + (8b - 12)^2 = 16$$

$$x^2 + a^2x^2$$

$$x^2(a^2 + 1) - 16abx + 24ax + 64b^2 - 192b + 144 = 16$$

$$(a^2 + 1)x^2 + x(24a - 16ab) + 64b^2 - 192b + 128 = 0$$

решение одно $\Rightarrow D = 0$

$$D = (24a - 16ab)^2 - 4(a^2 + 1)(64b^2 - 192b + 128) = 0$$

$$D = 576a^2 + 256a^2b^2 - 768a^2b - 4(64a^2b^2 - 192a^2b + 128a^2 + 64b^2 - 192b + 128) = 0$$

$$D = 576a^2 + 256a^2b^2 - 768a^2b - 256a^2b^2 + 768a^2b - 512a^2 - 256b^2 + 768b - 512 = 0$$

$$64a^2 - 256b^2 + 768b - 512 = 0 \quad | : 64$$

$$a^2 - 4b^2 + 12b - 8 = 0 \quad \text{решим относительно } a$$

$$-4b^2 + 12b + a^2 - 8 = 0$$

$$D = 144 + 4(4b^2 - 8) = 144 + 16b^2 - 32 = 16(b^2 + 1)$$

$$b = \frac{-12 \pm \sqrt{16(b^2 + 1)}}{-8} \quad a = 4b^2 - 12b + 8$$

III. к. Если нужно касание двух окружностей, то
при фикс. a и b также должны быть подгруппами
и там и там. В первом случае:

$$(1) \begin{cases} a^2 = 64b^2 + 1 \\ \Rightarrow 60b^2 + 12b - 7 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} a^2 = 4b^2 - 12b + 8 \end{cases}$$

$$D = 144 + 240 \cdot 7$$

$$b_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12 \cdot 152}}{120} = \frac{-12 \pm \sqrt{12 \cdot 152}}{120}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

$$D = 64a^2 - 256b^2 + 768b - 512 = 0.$$

$$a^2 - 4b^2 + 12b - 8 = 0$$

$a^2 = 4b^2 - 12b + 8$ - чтобы было касание с верхней окр-ю.

$$(1) \begin{cases} a^2 = 4b^2 - 12b + 8 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases} \text{ - для нижней ок-ты.}$$

$$(2)-(1): 60b^2 + 12b - 9 = 0.$$

$$D = 144 + 240 \cdot 9 = 144 + 12 \cdot 12 \cdot 15.$$

$$b_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144(1+15)}}{120}$$

$$b_1 = \frac{-12 + 12\sqrt{16}}{120} = \frac{-120 + (-12 + 48)}{120} = \frac{36}{120} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

$$b_2 = \frac{-12 - 48}{120} = -\frac{1}{2}$$

$$a^2 \geq 0 \Rightarrow 4b^2 - 12b + 8 \geq 0$$

$$64b^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow |b| \geq \frac{1}{8}$$

$$4b^2 - 12b + 8 \geq 0.$$

$$4b^2 - 12b + 8 = 0 \Rightarrow D =$$

$$D = 144 - 128 = 16$$

$$b_4 = \frac{12 \pm 4}{8} = 2$$

$$b_3 = \frac{12 - 4}{8} = 1$$

$\Rightarrow b \notin (1; 2)$ - подходит все b , кроме $b \in (1; 2)$, т.к. коэффициенты при $b^2 > 0$.

т.к. это так, то корень b_1 не подходит, т.к.

он. Оба корня b_1 и b_2 как видно подходят найдем в них значения a^2

$$a^2 = 64b^2 - 1 = 64b_1^2 - 1 = \frac{64 \cdot 9}{100} - 1 = \frac{16 \cdot 9 - 25}{25}.$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{119}{25}} \quad a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$a^2 = 64b_2^2 - 1 = 64 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 15 \Rightarrow a = \pm \sqrt{15}$$

$$\text{Ответ: } a = \pm \sqrt{\frac{119}{25}}, a = \pm \sqrt{15}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 - 2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} = (1-9x)^2$$

$$3x^2+3x+1 = 3x(x+1)+1$$

$$3x(x-2)+2$$

$$(3x(x+1)+1)(3x(x-2)+2)$$

$$(3x(x+1)+1)(3x(x+1)+2-3x)$$

$$(a+1)(a-3x+2)$$

$$a^2+a-3ax+2a-3x+2$$

$$3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1 = 1-9x$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = c \Rightarrow a$$

$$\sqrt{3x^2+3x+1+1-9x} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$a+b+a-2\sqrt{a^2-ab} = b^2$$

$$a+b+a-2\sqrt{a(a-b)} = b^2$$

$$2a+b-2\sqrt{a(a-b)} = b^2$$

$$\begin{array}{r} 5+3 \\ 25-7.15+9 \end{array}$$

$$36-70-35$$

$$5 \ 3$$

$$5+4$$

$$25+16-7.20$$

$$41 \quad 140-41 = 99$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4. $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$\sqrt{3(x^2 - 2x + 1) - 1} - \sqrt{3(x^2 + x + 1) - 2} = 1 - 9x$

$y^2 = 1 - x^2$

$\sqrt{a - 9x + 1} - \sqrt{a} = 1 - 9x$

$a - 9x + 1 = a$

$3x^2 - 6x + 2 = 4x^2 - 4x + 1 + x^2 - 2x + 1$

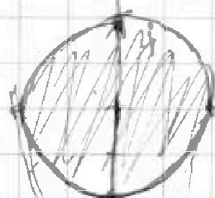
$3x^2 + 3x + 1 = 4x^2 + 4x + 1 - x^2 - x$
 $(2x + 1)^2 = x(x + 1)$

№6.

$ax + y - 86 = 0$

$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$

$x^2 + y^2 \leq 1$
 $x^2 + y^2 = 1$



$x^2 + y^2 = 1$

$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 0$

$y^2 = 1 - x^2$

$y = ax + 86$

ax^2
 $16 \cdot 9 = 90 + 9 \cdot 6 = 144 - 250 = -106$

либо $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$

$x^2 + y^2 \leq 1$

внутри окр-ти.

$y = -ax + 86, \forall a, b = 0$

с).

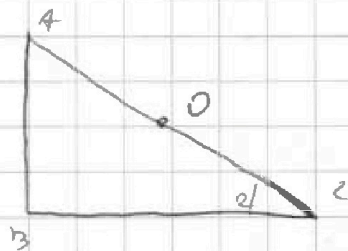
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

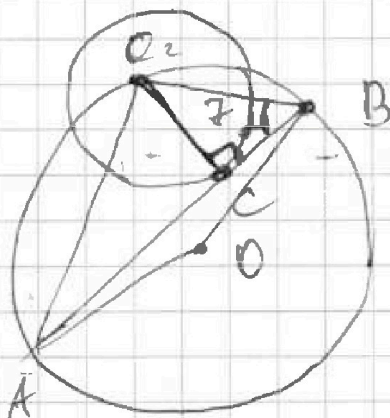
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin 2\alpha}$$



$$\sin \alpha = \frac{O_2B}{AB} = \frac{7}{26}$$

$$\sin \alpha = \frac{O_2H}{O_2B}$$

$$\frac{O_2H}{7} = \frac{26}{26}$$

$$\frac{O_2B}{7} = \frac{O_2H}{26}$$

$$t_1 + t_2 = \frac{17^2 7^2}{17^2} = -1 - \left(\frac{7}{17}\right)^2$$

$$t_1 t_2 = \frac{7^2 26^2}{17^2}$$

$$\sqrt{(x^2 + 1)(7^2 + 17x^2)} =$$

$$= \sqrt{7^2 x^2 + 17^2 x^4 + 7^2 + 17x^2}$$

$$x \sqrt{7^2 + 17^2 x^2 + 17^2} = 26$$

$$7^2 = 49$$

$$17^2 = 289$$

$$26^2 = 676$$

$$49x^2 + 289x^4 + 49 + 289x^2 = 676$$

$$289x^4 + 338x^2 + 49 = 676$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$t = 1$$

$$289 + 338 = 627$$

$$\begin{array}{r} 177 \\ 17 \\ \hline 115 \\ + 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ + 52 \\ \hline 676 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6x^2 - 3x + 3$$

$$3(2x^2 - x + 1) - 2\sqrt{} = 1 - 9x$$

$$\begin{aligned} a(1-9x) + a^2 \\ a^2 + a(1-9x) \end{aligned}$$

$$a(1-9x + a)$$

$$a^2 + a - 9ax$$

$$a^2 + a - 9(3x^2 + 3x + 1)x$$

$$\cancel{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x = (1-9x)^2 + \cancel{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 - 9x = (1-9x)^2 + 2\sqrt{}$$

$$1 - 9x = (1-9x)^2 + 2(1-9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 - 9x = t$$

$$t = t^2 + 2t\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$t + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$9x =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 4

240.5 = 1200 16-69

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

0.03!

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x_1 = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}, x_2 = \frac{6 - \sqrt{12}}{6} \Rightarrow \text{XX} \notin \left(\frac{6 - \sqrt{12}}{6}, \frac{6 + \sqrt{12}}{6} \right)$$

$$3x^2 - 6x + 3x + 1 \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$D = 9 - 12 = -3. \text{ всегда } > 0.$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x}$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad \text{возведем в квадрат}$$

$$3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 + 3x + 1)(3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x)} = (1 - 9x)^2$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 2(3x^2 + 3x + 1)\sqrt{(3x^2 + 3x + 1)(1 - 9x)} = 1 + 81x^2 - 18x$$

$$2(3x^2 + 3x + 1)\sqrt{(3x^2 + 3x + 1)(1 - 9x)} = 75x^2 - 15x - 2$$

$$\sqrt{3(x^2 - 1)^2 - 1} - \sqrt{3(x - 1)^2 - 9x} = 1 - 9x$$

$$3(x - 1)^2 - 1 + 3(x - 1)^2 - 9x - 2\sqrt{(3(x - 1)^2 - 1)(3(x - 1)^2 - 9x)} = (1 - 9x)^2$$

$$3x^2 - 6x + 3 - 1 + 3x^2 - 6x + 1 - 9x - 2\sqrt{(3x^2 - 11x + 2)(3x^2 - 9x)} = 81x^2 + 1 - 18x$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 2\sqrt{(3x^2 - 11x + 2)(3x^2 - 9x)} = 81x^2 + 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну задачу.**

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Hence } ab \geq 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$ac \geq 2 \cdot 7$$

$$6c \geq 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc \geq 7^{34} \cdot 2^{27} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow abc \geq 7^{34} \cdot 2^{28}$$

$$PQ(a, b) = 1$$

 n_2

$$\frac{a+b}{a^2 - tab + b^2} \quad \frac{a+b}{a^2 - tab + b^2}$$

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}$$

$$\frac{(a+b)}{(a+b)^2 - 9ab}$$

24

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 3x + 1} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 1 = (\sqrt{3}x - 1)^2$$

$$\frac{(a+b)}{(a+b+3\sqrt{ab})(a+b-3\sqrt{ab})}$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\frac{(a+b)}{(a-b)^2 - 5ab}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

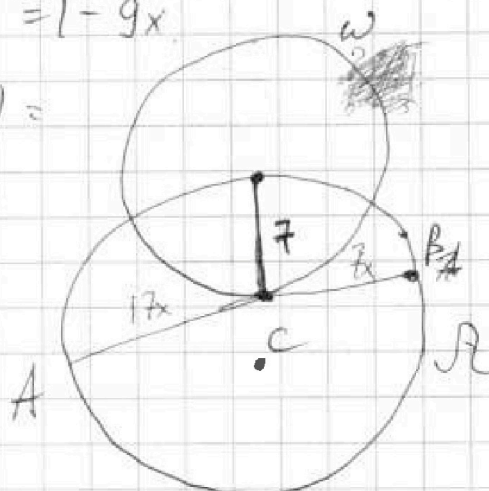
$$(3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1) =$$

$$3x^2 + 3x + 1 = a$$

$$3x^2 - 6x + 2 = a - 9x + 1$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$a+b+a-2\sqrt{a^2+ab}=b^2$$

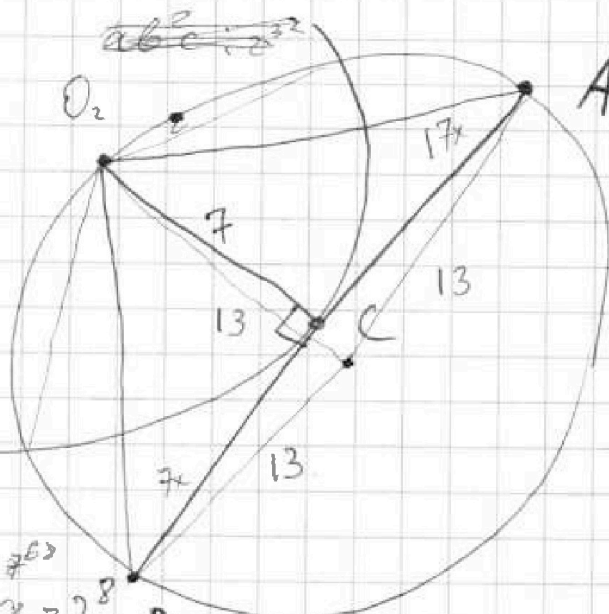


На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$c) B = \sqrt{49 + 16x^2}$$

$$C, B = \sqrt{1+x^2}$$

$$CA = \sqrt{7^2 + 17^2} \times$$

$$\underline{BO_2} = 26$$

$$\sin(\alpha - \beta)$$

$$\frac{O_2 A}{\sin(\gamma - \beta)} = 26$$

$$\frac{7}{7} \cdot 4 = 4$$

$$q = 2$$

$$a = 7^{10}$$

~~$6 = 2$~~

$$C \leq 2$$

$$6 = 25$$

$$Q = 2^{10}$$

$$C = 2^{13}$$

738

$$x + y + 4 + 2 + 2 + x = 7^6$$

Q. 22

~~$C = 2^{15}$~~

627

$$C = 2^{10}$$

$$c = 2$$

34

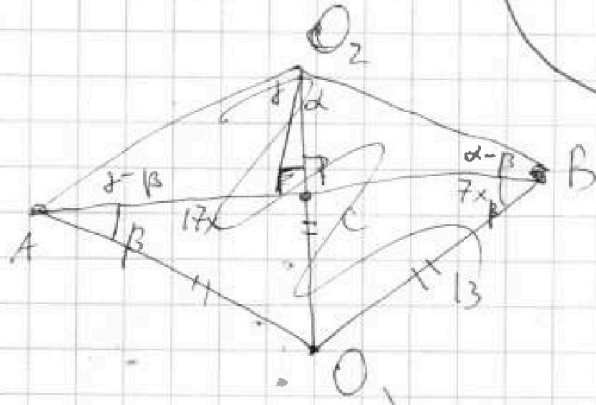
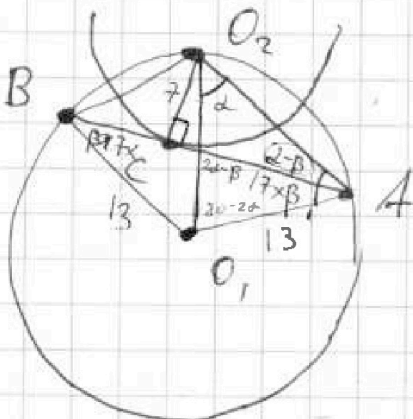
15

2

$$x_1 + x_2 = 15$$

$$9 \sqrt{2} = 17$$

$$x + z = 23$$



$$2\angle A B C = 90^\circ$$

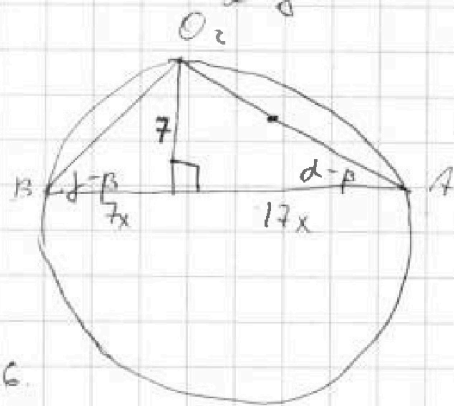
~~$2\alpha - \beta \in 90^\circ$~~

$$\alpha = \beta$$

$$\frac{7}{5(1-p)} = 0.2 A$$

$$\frac{7}{\sin(\alpha\beta)} = 0,13$$

$$\frac{O_2 B}{\sin(A-B)} = 26$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 + 152}}{120}$$

$$b_1 = \frac{-12 - \sqrt{12^2 + 152}}{120}$$

$$b_2 = \frac{-12 + \sqrt{12^2 + 152}}{120}$$

Условие ур-е (2) имело смысл, то

$$4b^2 - 12b + 8 \geq 0$$

$$D = 144 - 128 = 16$$

$$b_{x1} = \frac{12-4}{8} = 1$$

$$b_{x2} = \frac{12+4}{8} = 2$$

$\Rightarrow$ подходит $b \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.
Т.к. координаты $b^2 > 0$

Погда среди b_1 и b_2 не

Оценим b_1 и b_2 .

$$b_1 = \frac{-12 - \sqrt{12^2 + 152}}{120} < \frac{-12 - \sqrt{12^2 + 12^2}}{120} = \frac{-24\sqrt{2}}{120} < -1$$

$b_1 < 2 \Rightarrow$ он не подходит.

$$b_2 = \frac{-12 + \sqrt{12^2 + 152}}{120} > \frac{-12 + \sqrt{12^2}}{120} = \frac{-12 + 12\sqrt{2}}{120}$$

$$12 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 9$$

$$12 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3$$

$$12 \cdot 12 \cdot 15$$

$$4b^2 - 12b + 8 = 0$$

$$D = 144 - 16$$

$$b_1 = \frac{12-4}{8} = 1$$

$$b_2 = 1$$