МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть $ab = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc = n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$

$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot d$

$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot d \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$

$abc = \sqrt{m \cdot n \cdot d \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}} =$

$= \sqrt{m \cdot n \cdot d \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}}$. Наименьшее возможное значение

при $m \cdot n \cdot d = 1$ $(m = 1,\ n = 1,\ d = 1)$.

$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64}} = \sqrt{(7^{32})^2 \cdot (2^{25})^2 \cdot 2} = 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2}$.

Ответ: $2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{a}{b}$ - несократимая дробь. Будем считать, что $a > b$.

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a\cdot\frac{a}{b}+b\cdot\frac{a}{b}}{a^2\cdot\frac{a}{b}-6ab\cdot\frac{a}{b}+b^2\cdot\frac{a}{b}} = \frac{a\left(\frac{a}{b}+1\right)}{a\left(\frac{a^2}{b}-6a+\frac{a}{b}\right)} \Rightarrow$$

$m_{наиб} = a$.

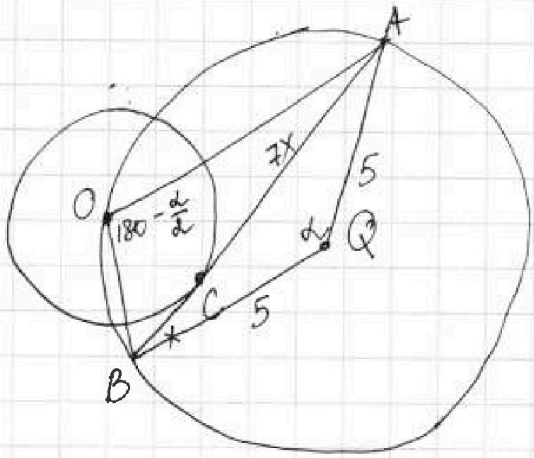
Ответ: a.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$r=1$, $R=5$, $\frac{AC}{CB}=7$

Пусть $AC=7x$, $BC=x$,

$\angle BQA=\alpha$, тогда $AB=8x$,

$\angle BOA=\frac{360-\alpha}{2}=180-\frac{\alpha}{2}$

$\triangle BOA$ вписан в окр. $(Q;R)$

$\triangle BOA$: по теореме синусов: $\frac{AB}{\sin(180-\frac{\alpha}{2})}=2R$, где $AB=8x$

$\sin(180-\frac{\alpha}{2})=\frac{AB}{2R}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{8x}{2\cdot 5}=\frac{4}{5}x$,

$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{1-\frac{16}{25}x^2}=\frac{3}{5}x$

$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ $\Rightarrow$ $\cancel{\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=2\cdot\frac{9}{25}x^2-1=\frac{18}{25}x^2-1$.

Теорема косинусов для $\triangle BQA$:

$AB^2=BQ^2+QA^2-2\cdot BQ\cdot QA\cdot\cos\alpha$

$64x^2=25+25-2\cdot 5\cdot 5\cdot\left(\frac{18}{25}x^2-1\right)$

$64x^2=50-50\cdot\frac{18}{25}x^2+50$

$64x^2=100-36x^2$

$64x^2+36x^2=100$

$100x^2=100$

$x=1$ $\Rightarrow$ $\underline{AB=8x=8}$.

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

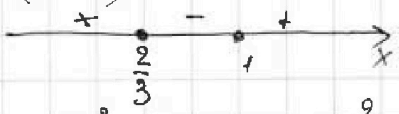
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

ОДЗ: $2x^2-5x+3 \geq 0 \Rightarrow (2x-3)(x-1) \geq 0$



$2x^2+2x+1$ всегда >0, т.к. $D<0$

$\cancel{\frac{2}{3} \leq x \leq 1}$ $\quad \frac{2}{3} \geq x \geq 1$

$\left(\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}\right) = (2-7x) \cdot$

$\cdot\left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}\right)$.

$2x^2-5x+3-2x^2-2x-1 = (2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}\right)$

$2-7x = (2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}\right)$

$(2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} - 1\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \underline{x = \frac{2}{7}}, \text{ — попадает в область допустимых знач. } \frac{2}{7} < \frac{2}{3} \\ \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 \quad (2) \end{array}\right.$

(2) $2x^2-5x+3+2x^2+2x+1+2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1} = 1$

$2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1} = -(4x^2-3x+3)$

$4x^2-3x+3=0$

$D = 9-4\cdot3\cdot3 = 9-36 < 0 \Rightarrow$ выражение $(4x^2-3x+3)>0 \Rightarrow$
$-(4x^2-3x+3) < 0$

$2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1} \geq 0 \Rightarrow$ уравнение (2) не имеет решений.

<u>Ответ</u>: $\frac{2}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

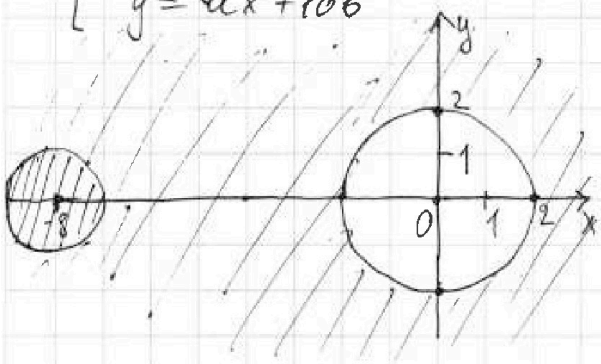
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right)\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=ax+10b, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right)\le 0 \end{cases}$$

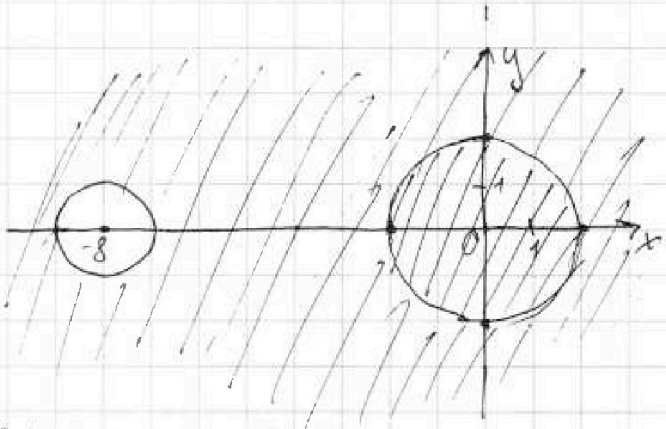
– ~~пр~~ график-прямая

$$\begin{cases} y \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2+y^2-1\le 0 \\ x^2+y^2-4\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+8)^2+y^2-1\ge 0 \\ x^2+y^2-4\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ y=ax+10b \end{cases}$$

$(x+8)^2+y^2=1 \Rightarrow$ окр. с центром $(-8;0)$, $R=1$.

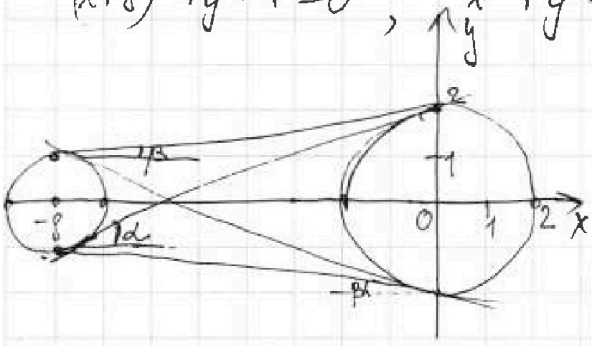
$x^2+y^2=4 \Rightarrow$ окр. с центром $(0;0)$, $R=2$.





Система будет иметь 2 решения, только если

$(x+8)^2+y^2-1=0$, $x^2+y^2-4=0$.



Тогда график функции $y=ax+10b$, должен касаться 2-ух окружностей внутренним и внешним способами, так что $tg\,\alpha=\pm\frac{3}{8}$,

$tg\,\beta=\pm\frac{1}{8} \Rightarrow a=\pm\frac{3}{8}$, $a=\pm\frac{1}{8}$.

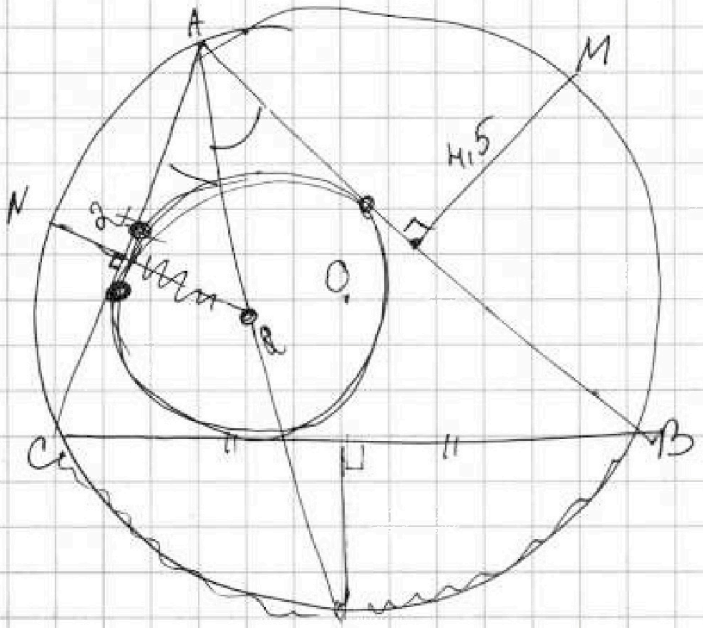
<u>Ответ</u>: $\pm\frac{3}{8}$, $\pm\frac{1}{8}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



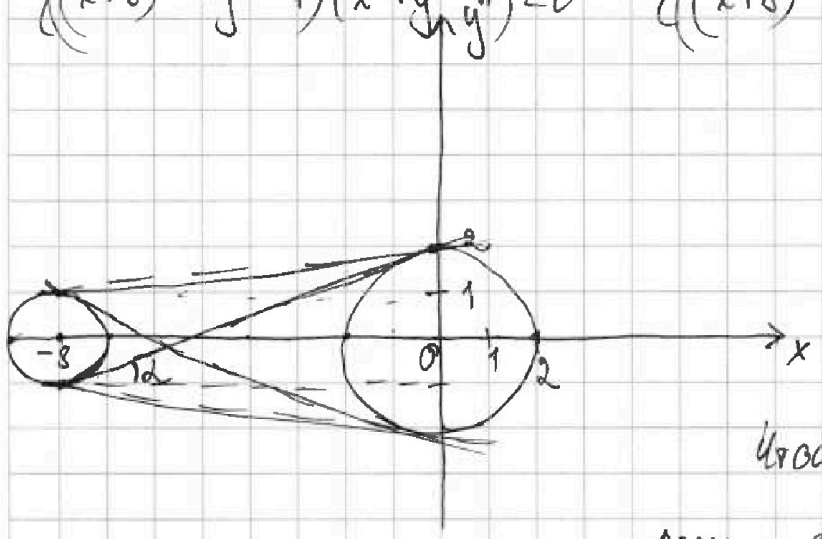
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=ax+10b, \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases}$$



Система ~~ур.~~ будет иметь реш., при

$(x+8)^2+y^2-1=0$ и

$x^2+y^2-4=0$

Чтобы система имела 2 реш. ~~прямая~~ ~~у~~ прямая $y=ax+10b$ должна касаться окружностей внеш. и внутр. способами.

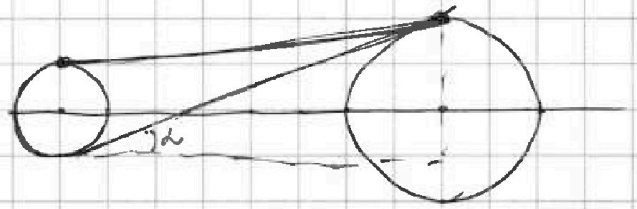
$y=ax+10b$, $a=tg\alpha$

$y=ax+10b$

$x^2+y^2=4$

$\alpha=\pm\frac{3}{8}$, $\alpha=\pm\frac{1}{8}$

Ответ: $\pm\frac{3}{8}$, $\pm\frac{1}{8}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$a+b \;\vdots\; m$, $a^2-6ab+b^2 \;\vdots\; m$

$$a^2-6ab+b^2 = a^2-2ab+b^2-4ab = (a-b)^2-4ab$$
$$\parallel$$
$$a^2+2ab+b^2-8ab = (a+b)^2-8ab$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} = \frac{a\cdot\frac{a}{b}+b\cdot\frac{a}{b}}{a^2\cdot\frac{a}{b}-6ab\cdot\frac{a}{b}+b^2\cdot\frac{a}{b}} = \frac{\frac{a^2}{b}+a}{\frac{a^3}{b}-6a^2+ab} =$$

$$= \frac{a\left(\frac{a}{b}+1\right)}{a\left(\frac{a^2}{b}-6a+b\right)} = \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a^2}{b}-6a+b}$$

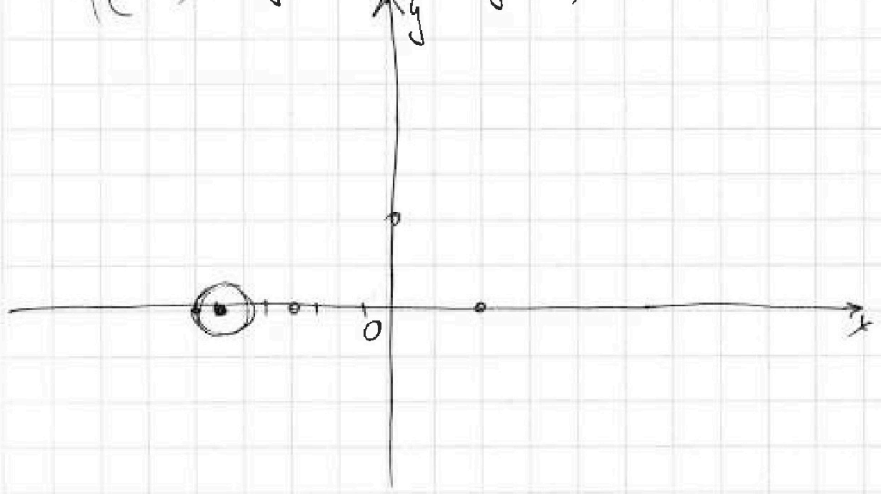
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a\cdot\frac{a}{b}+b\cdot\frac{a}{b}}{a^2\cdot\frac{a}{b}-6ab\cdot\frac{a}{b}+b^2\cdot\frac{a}{b}} =$$

т.к. дробь $\frac{a}{b}$ несократима. Будем считать, что $a>b$.

$$= \frac{\frac{a^2}{b}+a}{\frac{a^3}{b}-6a^2+ab} = \frac{a\left(\frac{a}{b}+1\right)}{a\left(\frac{a^2}{b}-6a+b\right)}$$

тогда $\Rightarrow$ $\underline{m=a}$ наиб

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right)\le 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

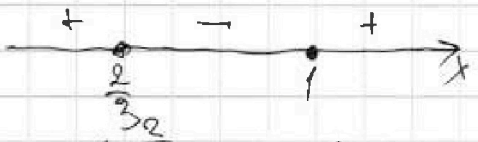
$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

ОДЗ: $2x^2-5x+3 \geq 0$ $\quad 2x^2-5x+3=0 \quad = (2x-3)(x-1)$

$D = 25 - 2\cdot 4\cdot 3 = 1$

$(2x-3)(x-1) \geq 0$ $\quad x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$

$x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$



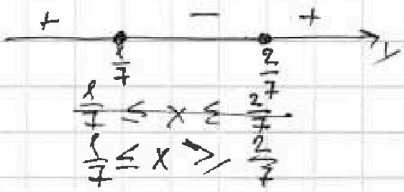
$x \leq \frac{2}{3}$, $\quad x \geq 1$

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1 - 2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)^2$

$-2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)(1-7x)$

$(2-7x)(1-7x) \geq 0$ $\quad x = \frac{2}{7}$, $x = \frac{1}{7}$



$\cancel{\frac{1}{7} \leq x \leq \frac{2}{7}}$

$\frac{1}{7} \leq x \geq \frac{2}{7}$

$(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) = \cancel{4x^4+4x^3+2x^2-10x^2-10}$

$= 4x^4+4x^3+2x^2-10x^3-10x^2-5x+6x^2+6x+3 =$

$= 4x^4-6x^3-2x^2+x+3$

$4x^4-6x^3-2x^2+x+3=0$

$x=1$: $4-6-2+1+3 = 4-4=0$

$4x^4-4x^3-2x^3+2x^2-4x^2+4x-3x+3=0$

$4x^3(x-1)-2x^2(x-1)-4x(x-1)-3(x-1)=0$

$(x-1)(4x^3-2x^2-4x-3)=0$ $\quad 4x^3-2x^2-4x-3=0$

$x=2$: $32-8-8-3\neq 0$

$x=1$: $4-2-4-3\neq 0$

$x=-1$: $-4-2+4-3\neq 0$

$-2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)(1-7x)$

$4(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) = (2-7x)^2(1-7x)^2$

$\left(\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}\right) =$

$= 2-7x\left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}\right)$

$(2x^2-5x+3-2x^2-2x-1) = 2-7x\left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}\right)$

$2-7x = 2-7x\left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}\right)$

$(2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} - 1\right) = 0$

$\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} - 1 = 0 \end{cases}$ $\quad (2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(2) $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$

$2x^2-5x+3+2x^2+2x+1+2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}=1$

$2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}=3x-4x^2-3$

$-4x^2+3x-3=0$

$4x^2-3x+3=0$

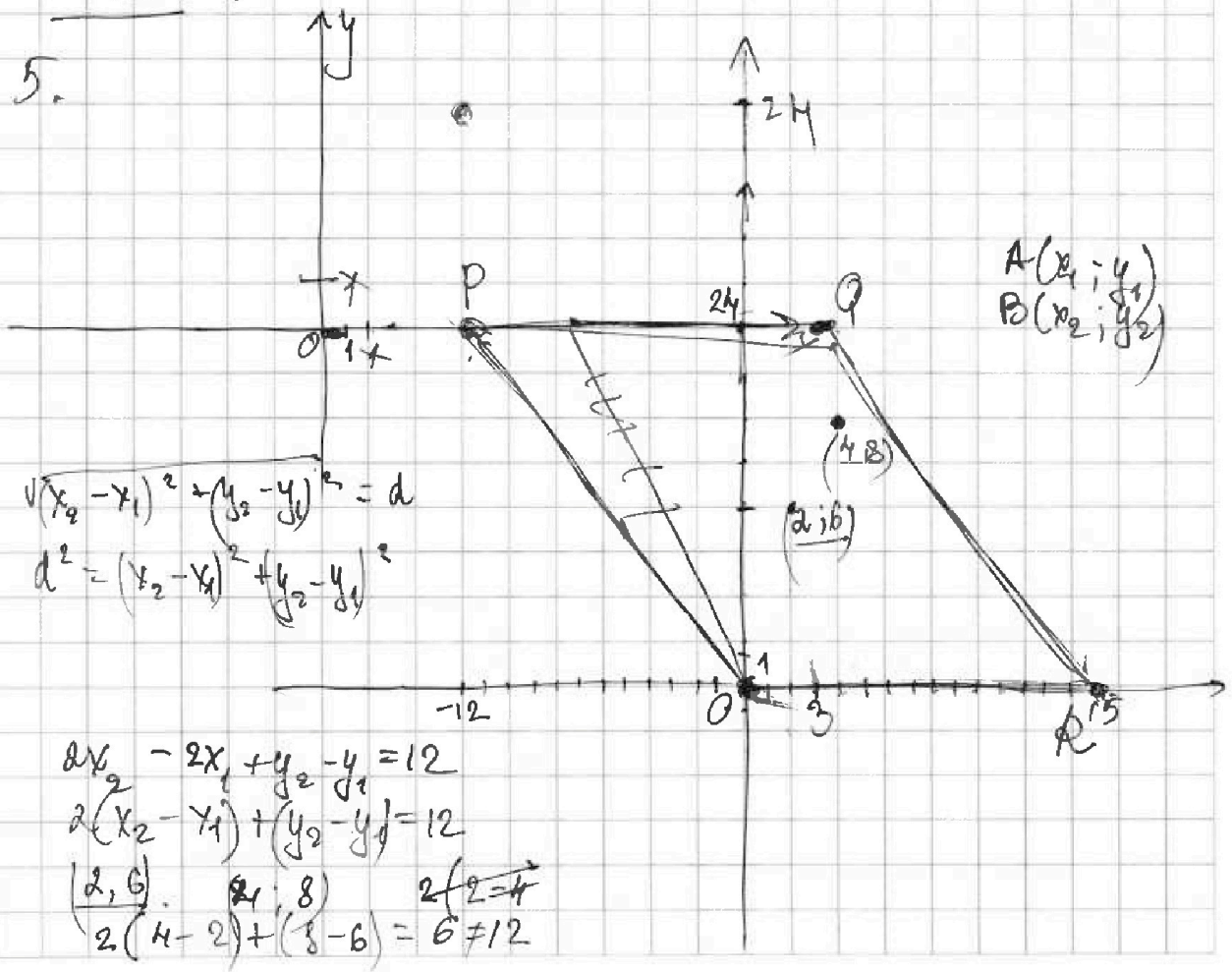
$D=9-4\cdot3\cdot3<0 \Rightarrow$ ур. $4x^2-3x+3$ всегда положительное

ур $-(4x^2-3x+3)<0$

~~$2\sqrt{2x^2}=$~~ $2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}\geq0 \Rightarrow$ ур. (2) $\varnothing$

Ответ: $\frac{2}{7}$

5.



$A(x_1;y_1)$
$B(x_2;y_2)$

$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=d$

$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$

$2(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=12$

$(2,6)$ $(4;8)$ ~~$2\cdot2=4$~~

$2(4-2)+(8-6)=6\neq12$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

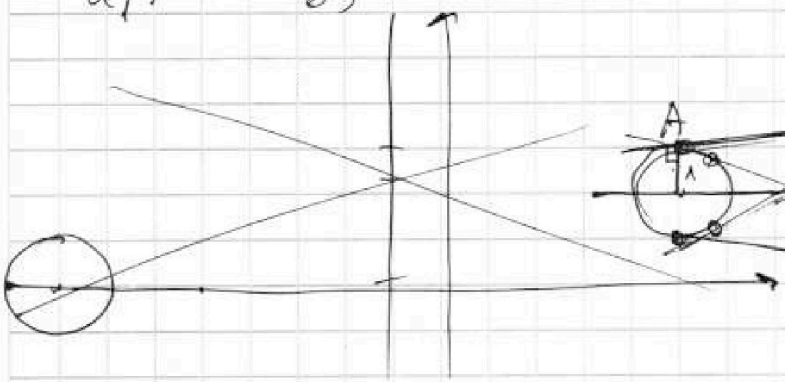
МФТИ

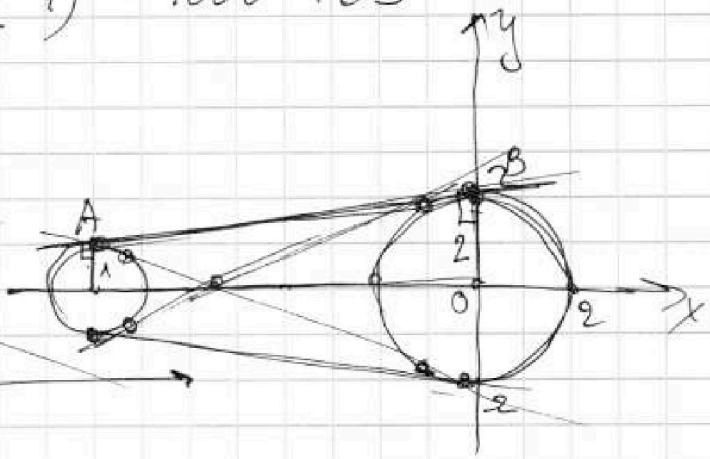
~~63 100~~

$63a^2 - 60ab + 100b^2 - 1 = 0$

$D = 3600b^2 - 63\cdot(100b^2 - 1) = 100b^2 + 63$

$a_1 = \frac{30b \pm \sqrt{100b^2+63}}{63}$





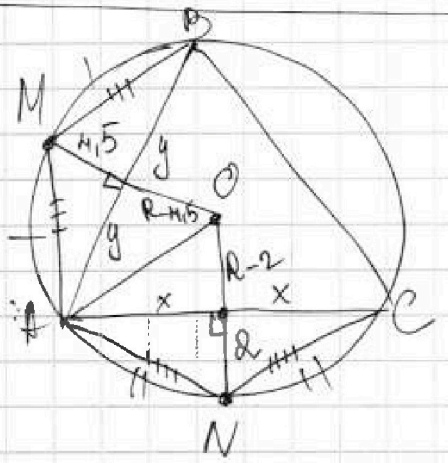
$y = ax + 10b$ 2см: $b < 0$, 2см. $b > 0$

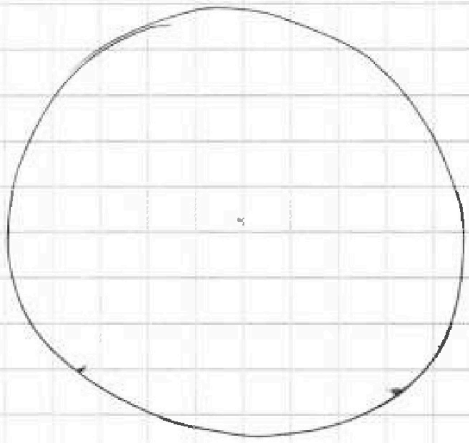
~~Так как в т. A и B: $x = -8$~~. ~~A: $x = -8$~~ : ~~$y = -8a + 10b$~~

~~B: $x = 0$~~ : ~~$y = 10b$~~

~~$-8a + 10b = 10b$~~

AO - ?





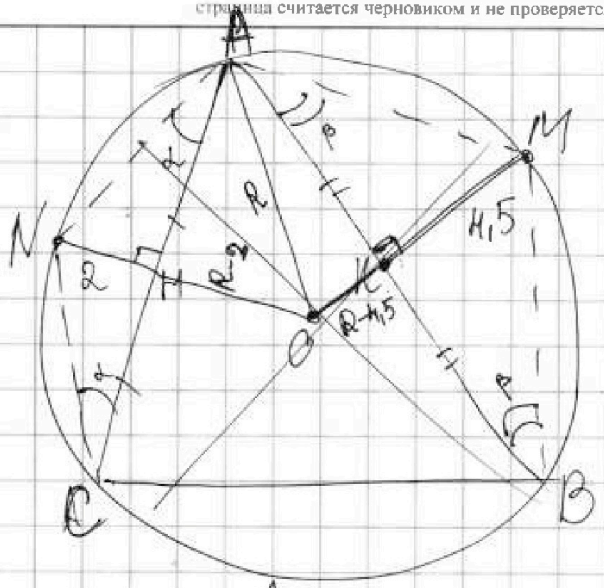
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

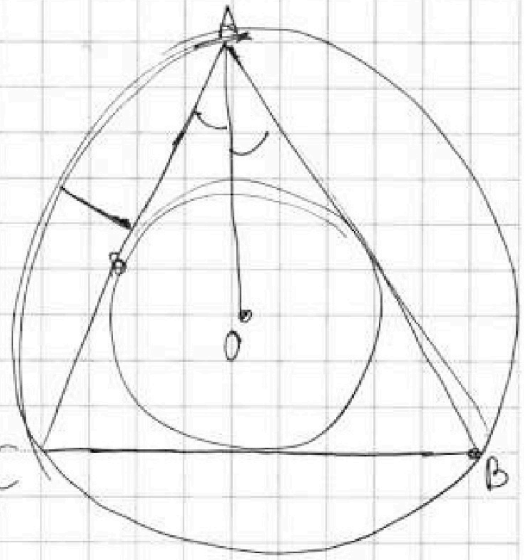
1 2 3 4 5 6 7

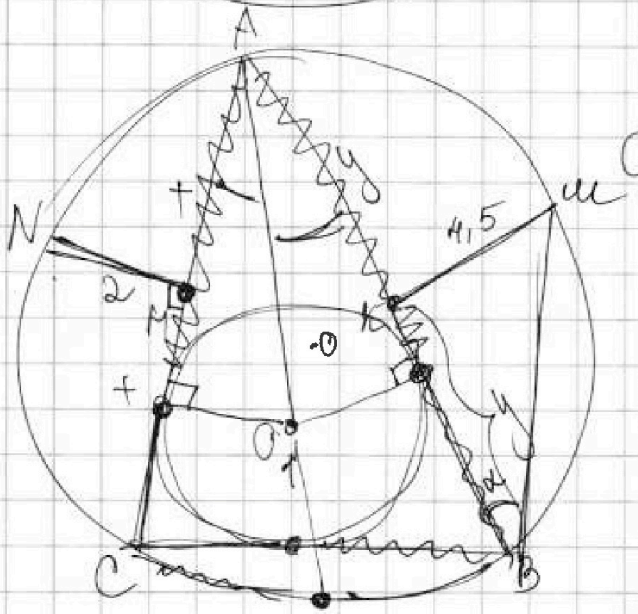
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$AO = R$ - ?







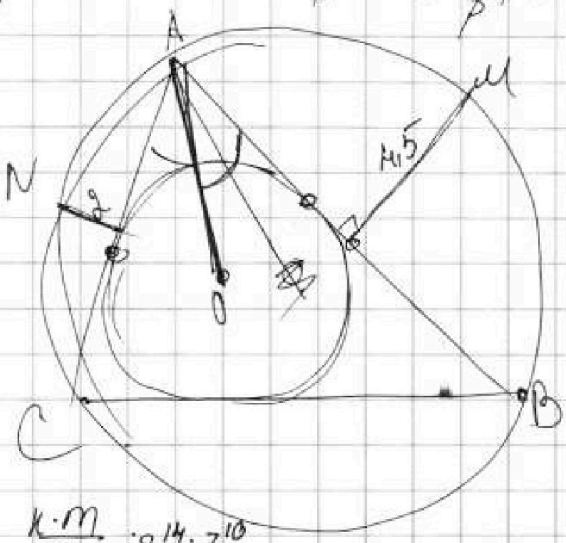
$a^2 - 6ab + b^2 = 0$

$D_1 = 9b^2 - b^2 = 8b^2$

$34 + 17 = 51$

$27 + 37 = 64$

$14 + 17 = 31$



$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

abc - ?

$ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$

$ac = n \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$

$\frac{ab}{bc} = \frac{k}{m} \quad \frac{1}{2^3 \cdot 7^7}$

$\frac{c}{a} = \frac{m}{k} \cdot 2^3 \cdot 7^7$

$c = \frac{m}{k} \cdot a \cdot 2^3 \cdot 7^7$

$b = \frac{k \cdot m \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}}{a \cdot 2^3 \cdot 7^7} = \frac{k \cdot m}{a} \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

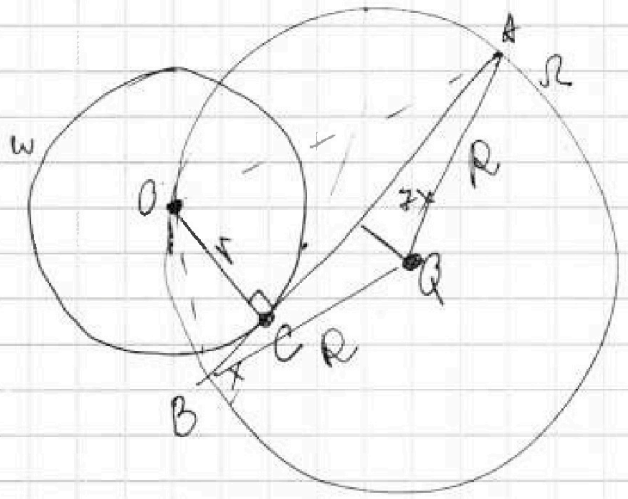
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\cancel{2401x^4 - 16x^4 - 258x^3 + 24x^3 + 196x^2 + 8x^2 + 441x^2 - 4x - 84x + 8 = 0}$

3.



$\frac{AC}{CB} = 7$ $AB - ?$

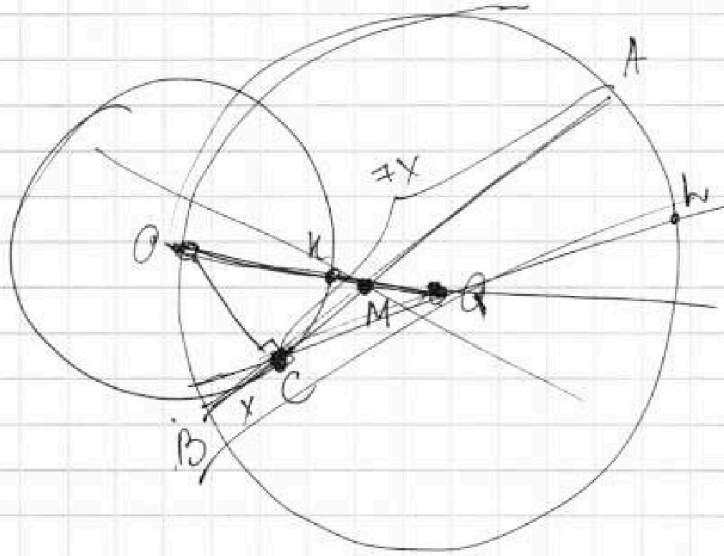
$r = 1$, $R = 5$.

$AB = 8x$

$\cancel{S_{BOA} = \frac{1}{2} r \cdot 8x}$

$OQ = R$.

$KQ = R - r = 5 - 1 = 4$



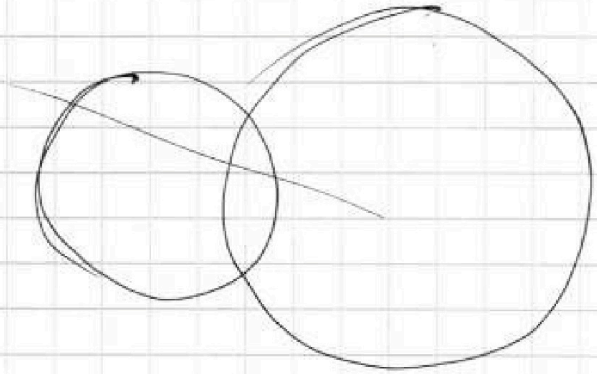
$\cancel{CW^2}$

$AB = 8x$

$\cancel{= KQ}$

$x \cdot 7x = BC \cdot CA$

$8x^2$

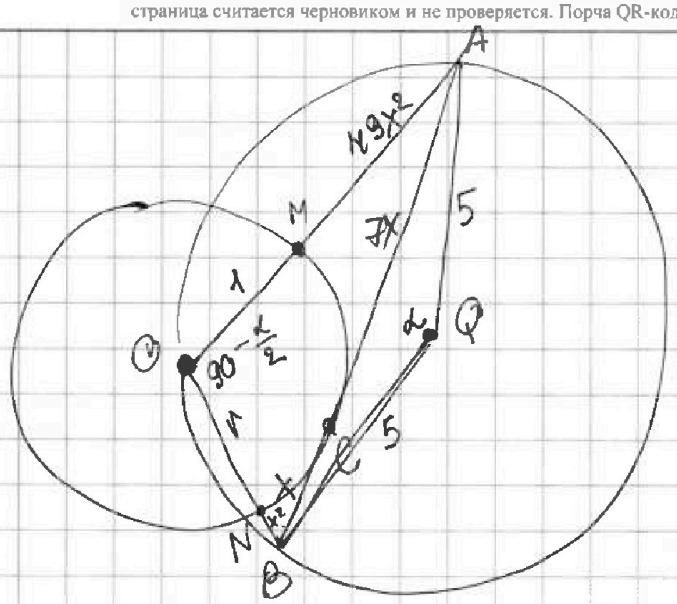


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3



$CA^2 = OM \cdot MA$

$49x^2 = 1 \cdot MA \Rightarrow$

$MA = 49x^2$

$BN \cdot BO = BC^2$

$x^2 = BN \cdot 1$

$BN = x^2$

$AB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos\alpha$

~~a, b, c~~ ~~ab : 2~~

$\sin\alpha = \frac{AB}{\sin}$

$\frac{AB}{\sin(90 - \frac{\alpha}{2})} = 2R$

$\frac{8x}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 10 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{8x}{10} = \frac{4}{5}x \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \Rightarrow$

$\sin(180 - \frac{\alpha}{2}) = \sin\frac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha = 2 \cdot \frac{4}{5}x - 1 = \frac{8}{5}x - 1$

~~sinα~~

$\frac{8x}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 10$

$(1)\ 8x^2 = 50 - 2 \cdot 25 \cdot (\frac{8}{5}x - 1)$

$\frac{360 - \frac{\alpha}{2}}{\cos} = 180 - \frac{\alpha}{2}$

$(1)\ 8x^2 = 50 - 50(\frac{8}{5}x - 1)$

$8x^2 = 50 - 80x + 50 \Rightarrow 8x^2 + 80x - 100 = 0$

$4x^2 + 40x - 50 = 0$

$2x^2 + 20x - 25 = 0$

$D = 100 + 2 \cdot 25 = 150 = (\sqrt{150})^2 = (5\sqrt{6})^2$

$x_1 = \frac{-10 - 5\sqrt{6}}{2}$ – не уд. $\varnothing$

$x_2 = \frac{-10 + 5\sqrt{6}}{2} > 0$

$150 \mid 2$, $75 \mid 3$, $25 \mid 5$, $5 \mid 5$, 1

$150 \mid 25$, 6

$150 \mid 15$, 10

$150 \mid 15$, $30 \mid 5$, 6

$30 : 5 = 6$

ответ: $20\sqrt{6} - 40$

$AB = 8x = 8 \cdot (\frac{-10 + 5\sqrt{6}}{2}) =$

$= +4(5\sqrt{6} - 10) = 20\sqrt{6} - 40$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице.

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$4(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) = (2-7x)^2(1-7x)^2$

$4(4x^4+4x^3+2x^2-10x^3-10x^2-5x+6x^2+6x+3) = (4-28x+49x^2)\cdot$
$\cdot(1-14x+49x^2)$

$\cancel{16x^4+16x^3+8x^2-40x^3-40x^2-20x+24x^2+2}$

$4(4x^4-6x^3-2x^2+x+3) = 4-4\cdot 14x+4\cdot 49x^2-28x+28x\cdot 14x$
$\cancel{-28x\cdot 49x^2+49x^2-49x^3\cdot 14+49x^2\cdot 4}$

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$ ОДЗ: $2x^2-5x+3\geq 0$

$2x^2-5x+3-2x^2-2x-1-2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)^2$

$-7x+2-2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)^2$

$-2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)(2-7x-1)$
$= (2-7x)(1-7x)$

$(2-7x)(1-7x)<0 \Rightarrow x\in\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right)$

$(50-1)^2 = 2500-100+1$

$-2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1} = 49x^2-7x-14x+2$

$49x^2-21x+2$

$(50-1)(20+1) = 100+50-20-1 = 129$

$\begin{array}{r}3\\49\\\times 4\\\hline 196\end{array}$

$4(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) = (49x^2-21x+2)^2$

$\begin{array}{r}129\\\times 2\\\hline 258\end{array}$

21^2

$(20+1)^2 = 400+40+1 = 441$

$4(4x^4+4x^3+2x^2-10x^3-10x^2-5x+6x^2+6x+3) = (49x^2-21x+2)^2$

$4(4x^4-6x^3-2x^2+x+3) = 49^2x^4-49\cdot 21x^3+2\cdot 49x^2-$
$-21\cdot 49x^3+21^2x^2-21\cdot 2x+49\cdot 2x^2-42x+4$

$16x^4-24x^3-8x^2+4x+12 = 2401x^4-258x^3+196x^2+441x^2-84x+4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$2x^2-5x+3=0$

$D = 25 + 4\cdot 2\cdot 3 = 25-24 = 1$

$x_1 = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$2x^2+2x+1=0$

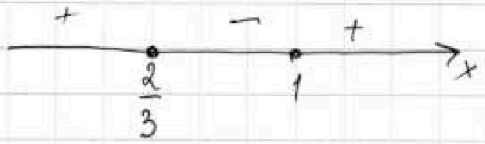
$D = 4-8 = -4 < 0 \Rightarrow$

ур всегда положительное

$2x^2-5x+3 = (2x-3)(x-1)$

$\sqrt{(2x-3)(x+1)} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

ОДЗ: $(2x-3)(x-1) \geq 0$



$\Rightarrow x \in (-\infty; \frac{2}{3}] \cup [1; +\infty)$

$\sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$\left(\sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{2x^2+2x+1}\right)^2 = (2-7x)^2$

$(2x-3)(x-1) - (2x^2+2x+1) - 2\sqrt{(2x-3)(x-1)(2x^2+2x+1)} = 4-28x+$
$+49x^2$

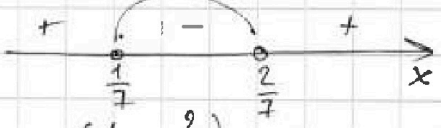
$-7x+2 - 2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = (2-7x)^2$

$-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = (2-7x)^2 - (2-7x)$

$-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = (2-7x)(1-7x)$

$(2-7x)(1-7x) < 0 \Rightarrow$

$(7x-2)(7x-1) < 0$



$x \in \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

6.

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right)\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=ax+10b, \ (1) \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right)\le 0 \ /(2) \end{cases}$$

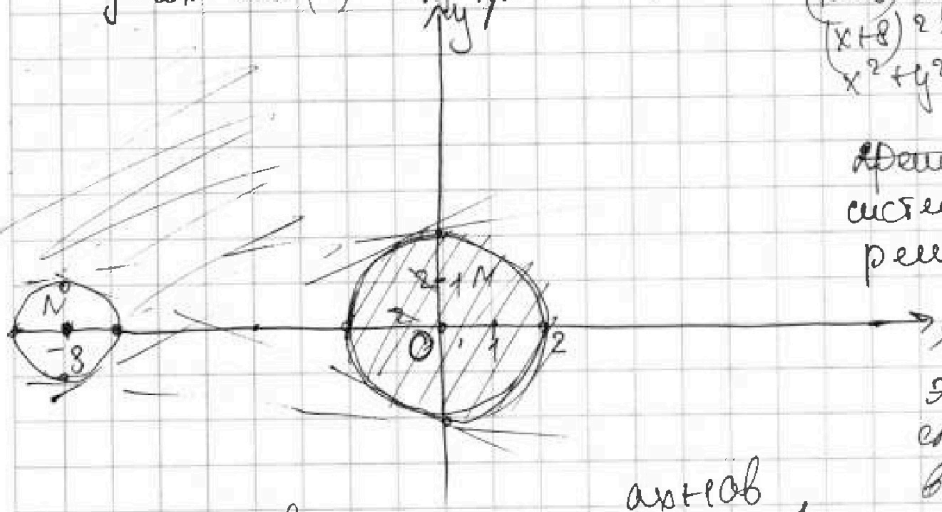
реш. a - ?

$y=ax+10b$ (1) - прямая.

$(x+8)^2+y^2-1=0$

$(x+8)^2+y^2=1$ - окр.

$x^2+y^2=4$ - окр.



~~Решение~~

система ур. имеет 2 реш, если прямая $y=ax+10b$ кас. окр M и N.

Это можно сд. 4-мя сл.: 2 внутр кас, 2 внеш. кас.

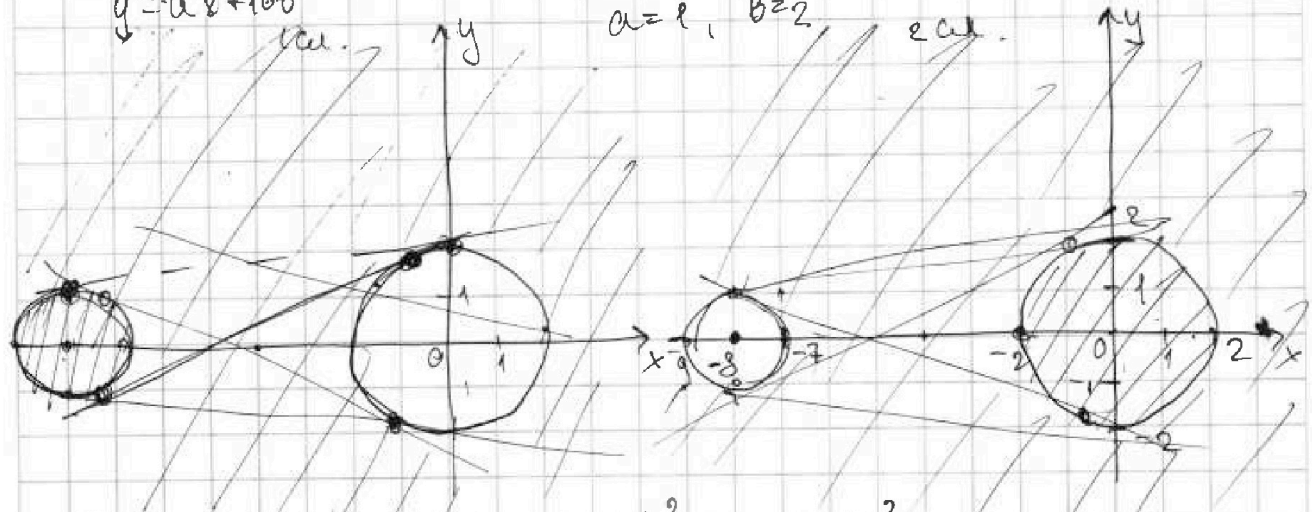
$y=ax+10b$

1 сл.

$ax+10b$

$a=1, \ b=\frac{1}{2}$

2 сл.



$$\begin{cases} y=ax+10b \\ (x+8)^2+y^2=1 \end{cases}$$

$(x+8)^2+(ax+10b)^2=1$

$x^2+16x+64+a^2x^2+20abx+100b^2-1=0$

$x^2(a^2+1)+4x(4+5ab)+100b^2+63=0$

$D_1=4^2(4+5ab)^2-(100b^2+63)(a^2+1)=0$

$4(16+40ab+25a^2b^2)-100a^2b^2-100b^2-63a^2-63=0$

$64+160ab+\cancel{100a^2b^2}-\cancel{100a^2b^2}-100b^2-63a^2-63=0$

$100b^2+63a^2-160ab-1=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab \vdots 2^{14}\cdot 7^{10}$, $bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{17}$, $ac \vdots 2^{20}\cdot 7^{37}$ $\min(abc)$ – ?

$ab = k\cdot 2^{14}\cdot 7^{10}$, $bc = n\cdot 2^{17}\cdot 7^{17}$, $ac = d\cdot 2^{20}\cdot 7^{37}$

$a = \frac{k\cdot 2^{14}\cdot 7^{10}}{b}$

$ac = \frac{k\cdot 2^{14}\cdot 7^{10}}{b}c = d\cdot 2^{20}\cdot 7^{37}$ $\cancel{\frac{d}{c} =}$ $\frac{c}{b} = \frac{d\cdot 2^{20}\cdot 7^{37}}{k\cdot 2^{14}\cdot 7^{10}}$

$\frac{c}{b} = \frac{d}{k}\cdot 2^{6}\cdot 7^{27}$ $\cancel{\frac{d}{k} = \frac{d\cdot ac\cdot 2^{20}\cdot 7^{37}}{2^{20}\cdot 7^{37}}\cdot\frac{2^{14}\cdot 7^{10}}{kb} =}$

$\cancel{= \frac{c}{b}}$

$ab = m\cdot 2^{14}\cdot 7^{10}$, $bc = n\cdot 2^{17}\cdot 7^{17}$, $ac =$

$$\begin{cases} ab = m\cdot 2^{14}\cdot 7^{10} \\ bc = n\cdot 2^{17}\cdot 7^{17} \\ ac = l\cdot 2^{20}\cdot 7^{37} \end{cases}$$

$\cancel{\frac{b}{c} = \frac{m\cdot 2^{14}\cdot 7^{10}}{l\cdot 2^{20}\cdot 7^{37}}}$ $a = \frac{m\cdot 2^{14}\cdot 7^{10}}{b}$

$\cancel{bc = n\cdot 2^{17}\cdot 7^{17}}$ $b = \frac{n\cdot 2^{17}\cdot 7^{17}}{c}$

$a^2 - 6ab + b^2$

$\cancel{D_1 = 9b^2 - 4b^2 = 5b^2}$

$\cancel{a_1 = \frac{3b - b\sqrt{5}}{2}}$

$\cancel{a_2 = \frac{3b + b\sqrt{5}}{2}}$

$\cancel{abc = \frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} =}$

$\cancel{a^2 - 6ab + b^2 = 0}$

$\cancel{D_1 = 9b^2 - b^2 = 8b^2}$

$\cancel{a_1 = 3b - 2\sqrt{2}b}$ $\cancel{a_2 = 3b + 2\sqrt{2}b}$

$\cancel{\frac{a+b}{(a - 3b + 2\sqrt{2}b)(a - 3b - 2\sqrt{2}b)}}$