



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11} \quad (1)$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{10} \quad (1)$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \quad (3)$$

(найти $abc(mn)^2$)

перемножим все алгебра и габитре формулы:

$$(ab \cdot bc \cdot ac) : (2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2^{17} \cdot 7^{10} \cdot 2^{23} \cdot 7^{39})$$

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 : 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+10+39}$$

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 : 2^{55} \cdot 7^{60}$$

Квадрат abc , наименьшими звеньями $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$ делит на mn^2 , куда

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2^{55} \cdot 7^{60}$$

но! $a, b, c \in \mathbb{N}$ (по умр. abc), abc - кратна mn^2

А $2^{55} = 2^{54} \cdot 2$ Если abc или mn кратна 2 , то получится:

$$7^{39} \cdot 2^{27} \cdot \sqrt{2}$$

но $\sqrt{2}$ - не натур. abc , или mn делится 2^{55} (умножить)

минимум mn кратна 2 , тогда abc делит 2^{55} (умножить)

Поэтому, что mn делит 2^{55} на 2 . Тогда:

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2^{56} \cdot 7^{60} \quad (abc > 0)$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{30}$$

Проверим на mn кратна? По условию, mn кратна mn^2 из $(1), (2), (3)$ abc , mn кратна abc , mn кратна abc , но кратко делит mn^2 (напримр: $ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$, где k - mn^2 ($\in \mathbb{N}$))

abc , mn кратна abc будет mn^2 , куда все k делит равно 1 .

(k_1, k_2, k_3)
 $(1, 1, 1)$

но mn кратна mn^2 рассмотрим mn уже выше. но mn^2

что mn кратна mn^2 или abc

А mn кратна abc может быть mn из $k(k_1, k_2, k_3)$

различна mn , mn^2 кратна mn .

$$\text{Ответ } abc = 2^{28} \cdot 7^{30}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

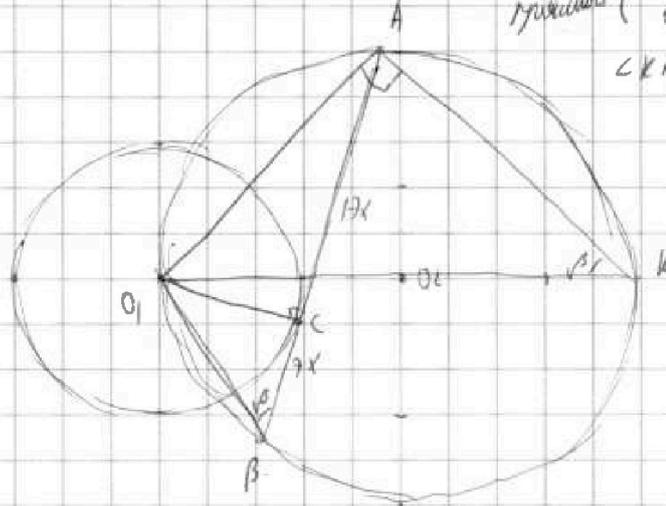
МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$O_1(w, R_1)$
 $O_2(a, R_2)$
 AB кас w/в.р.с
 $AC = 17$ ($AC = 17x$)
 $BC = 7$ ($BC = 7x$)
 $R_1 = 7$
 $R_2 = 13$
 AB - !

Искомое:
 $BC = 7x$



O_1, O_2, K - на одной прямой!
 (A, K - диаметр)
 $\angle KAO_1 = 90^\circ$

• пусть $\angle O_1BA = \beta$, $\cos \beta =$

$$\angle O_1BA = \angle O_1KA = \beta, \quad (90^\circ); (\beta)$$

• $\cos \beta = \Delta O_1CB \sim \Delta O_1AK$ (по 2-ум углам)

$$\frac{BO_1}{KO_1} = \frac{O_1C}{AO_1} \quad \text{по 1-му (по гипот.)}$$

$$KO_1 = 26, \quad (= 2R_2)$$

$$O_1C = 7 = R_1 \text{ (кас. AB)}$$

$$\frac{BO_1}{26} = \frac{7}{AO_1}$$

$$AO_1 \cdot BO_1 = 7 \cdot 26$$

• $\cos \beta =$ по с-б-в кас и сн (где BO_1 и AO_1):

$$49x^2 = (BO_1 - 7) \cdot (BO_1 + 7)$$

$$289x^2 = (AO_1 - 7)(AO_1 + 7)$$

$$289x^2 = (AO_1 - 7)(AO_1 + 7)$$

$$(x^2 + 1)AO_1 = 26^2$$

$$x^2 = \frac{26^2}{AO_1} - 1$$

$$49x^2 = BO_1^2 - 49$$

$$289x^2 = AO_1^2 - 49$$

$$49x^2 = \frac{49 \cdot 26^2}{AO_1^2} - 49$$

$$289x^2 = AO_1^2 - 49$$

• $\cos \beta =$

$$AO_1 = \frac{26^2}{x^2 + 1}$$

$$289x^2 = \frac{26^2}{x^2 + 1} - 49$$

$$289x^4 + 289x^2 = 26^2 - 49x^2 - 49$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$z = \frac{-169 \pm \sqrt{169^2 - 289 \cdot 627}}{289}$$

$$y_{1,2} = \frac{\sqrt{289 - 169}}{289}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 = \frac{207 - 169}{289}$$

$$207 = 169^2 + 289 \cdot 627$$

$$y = \frac{\sqrt{169^2 + 289 \cdot 627} - 169}{17}$$

$$AB = \frac{24}{17} \cdot \sqrt{169^2 + 289 \cdot 627} - 169$$

$$\text{Ответ: } \frac{24}{17} \cdot \sqrt{169^2 + 289 \cdot 627} - 169$$

$$\frac{24}{17} \sqrt{209707} - 169$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

ОДЗ: $\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 & \textcircled{1} \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 & \textcircled{2} \\ 3x^2 + 3x + 1 = 0 & \textcircled{3} \end{cases}$ $\textcircled{3}$ $\frac{3x+1}{2} = 0$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x + 1 = -9x + 1 \quad (1-9x) \text{ умнож}$$

пусть $\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = t \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = p \end{cases}$ $t \geq 0, p \geq 0$ $\textcircled{3}$ $3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

$$t - p = t^2 - p^2 \quad ; \quad t - p = (t-p)(t+p)$$

$$(t-p)(t+p-1) = 0$$

$\textcircled{1} \quad t - p = 0$
 $t = p$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

возводим в квадраты ($6x \geq 0$)

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$1 = 9x$$

$$x = \frac{1}{9}$$

(проверим ОДЗ)

$\textcircled{2} \quad t + p = 1$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

возведем в квадраты (левая часть ≥ 0)

$$3x^2 - 6x + 2 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$6x^2 - 3x + 2 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = -6x^2 + 3x - 2$$

умнож: $6x^2 - 3x + 2 \leq 0$ ($-6x^2 + 3x - 2 \geq 0$)
 $6x^2 - 3x + 2 < 0$

но: $6x^2 - 3x + 2 = 0$

$D = 9 - 12 \cdot 4 < 0$, умнож

$6x^2 - 3x + 2 > 0$ (всегда)

умнож: $\textcircled{2} \quad \emptyset$ (корней нет)

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$O(0,0)$, $P(-13,26)$, $Q(3,26)$, $R(16,0)$

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

τ $A, B \in \text{паралл}$

$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$, *состав*
 $2(x_2 - x_1) = 14$, *состав*

увели коэффициентов.

1) ищем, что еще

$x_2 - x_1 = 0$, *состав*

$y_2 - y_1 = 14$

$x_2 = 0$, $y_2 = -14$

состав *еще*

$x_1 = x_2 = 0$, *состав*

$y_2 - y_1 = 14$

мин $y_1 = 0$

$y_2 = 14$

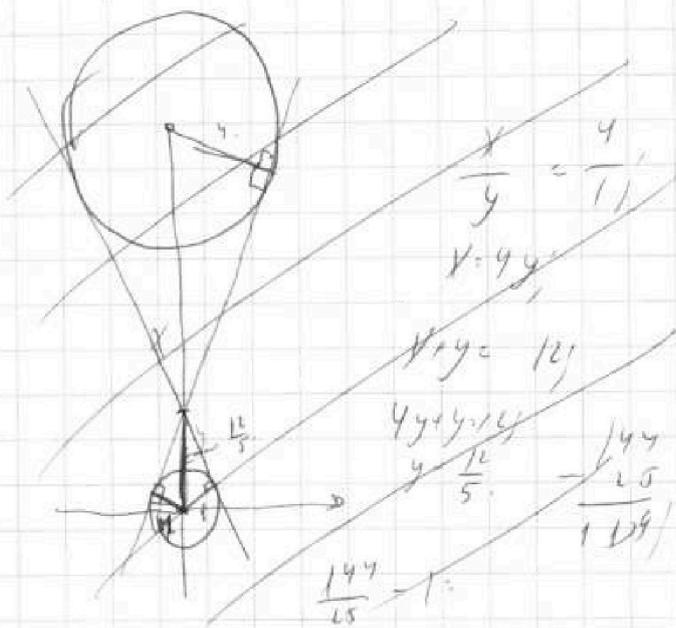
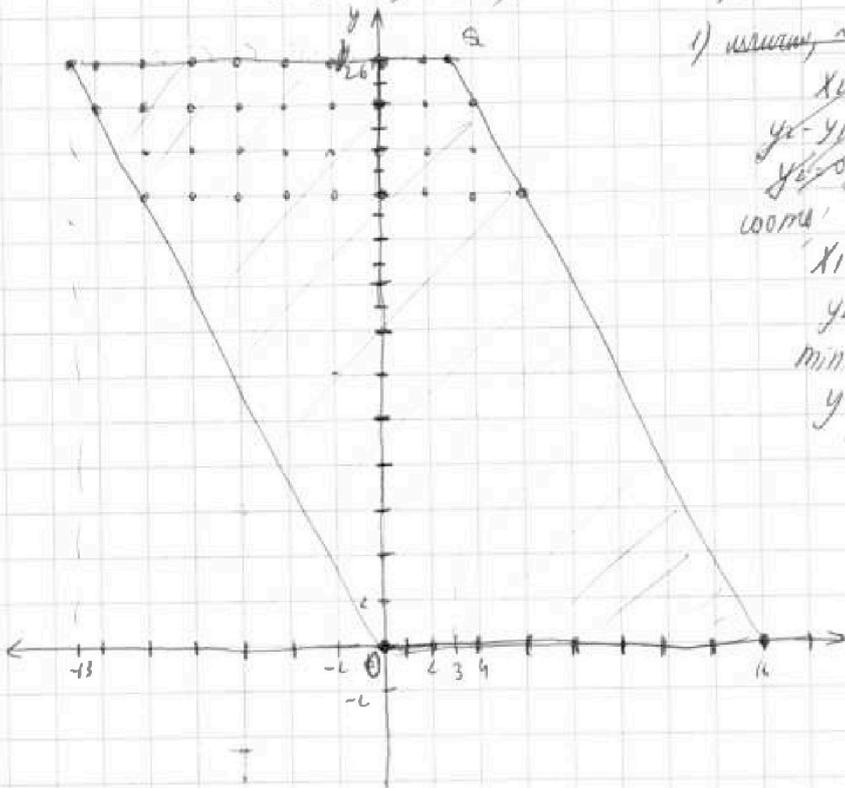
состав *еще* *коэффициент*

$y_2 = 26$

состав

x *состав* $= 13$

x *состав* $= 13$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④ $x^2 + (8b + ax + 12)^2 = 16$

$x^2 + (64b^2 + 8abx + 96b + 8abx + a^2x^2 + 12ax + 96b + 12ax + 144) = 16$

$x^2 + x^2(a^2 + 1) + (16abx) + 64b^2 + 192b + (24ax) + 121 = 0$

$y'(a^2 + 1) + x(16ab + 24a) + 64b^2 + 192b + 121 = 0$

$D = 8a^2(8ab + 12a)$

$D = (16ab + 24a)^2 -$

$D_1 = (8ab + 12a)^2 - (a^2 + 1)(64b^2 + 192b + 121) = 0$

$(8ab + 12a)^2 = (a^2 + 1)(64b^2 + 192b + 121)$

$a^2(8b + 12)^2 = (a^2 + 1)(64b^2 + 192b + 121)$ *формула $a^2 = 1 - 64b^2$*

$a^2(2b + 3)^2 = (a^2 + 1)(4b^2 + 12b + 8)$

$a^2(2b + 3)^2 = (a^2 + 1)(4b^2 + 12b + 8)$

$a^2(4b^2 + 12b + 9) = (a^2 + 1)(4b^2 + 12b + 8)$

$a^2(4b^2 + 12b + 8) + a^2 = a^2(4b^2 + 12b + 8) + 4b^2 + 12b + 8$

$a^2 = 4b^2 + 12b + 8$

$1 - 64b^2 = 4b^2 + 12b + 8$

$68b^2 + 12b + 7 = 0$

$D =$

Решаю:

$\begin{cases} y^2 + (8b - ax)^2 = 1 \\ x^2 + (8b - ax - 12)^2 = 16 \end{cases}$ *решаю $D_1 = 0$ $D_2 = 0$ $D_3 = 0$ $D_4 = 0$ $D_5 = 0$ $D_6 = 0$ $D_7 = 0$ $D_8 = 0$ $D_9 = 0$ $D_{10} = 0$ $D_{11} = 0$ $D_{12} = 0$ $D_{13} = 0$ $D_{14} = 0$ $D_{15} = 0$ $D_{16} = 0$ $D_{17} = 0$ $D_{18} = 0$ $D_{19} = 0$ $D_{20} = 0$ $D_{21} = 0$ $D_{22} = 0$ $D_{23} = 0$ $D_{24} = 0$ $D_{25} = 0$ $D_{26} = 0$ $D_{27} = 0$ $D_{28} = 0$ $D_{29} = 0$ $D_{30} = 0$ $D_{31} = 0$ $D_{32} = 0$ $D_{33} = 0$ $D_{34} = 0$ $D_{35} = 0$ $D_{36} = 0$ $D_{37} = 0$ $D_{38} = 0$ $D_{39} = 0$ $D_{40} = 0$ $D_{41} = 0$ $D_{42} = 0$ $D_{43} = 0$ $D_{44} = 0$ $D_{45} = 0$ $D_{46} = 0$ $D_{47} = 0$ $D_{48} = 0$ $D_{49} = 0$ $D_{50} = 0$ $D_{51} = 0$ $D_{52} = 0$ $D_{53} = 0$ $D_{54} = 0$ $D_{55} = 0$ $D_{56} = 0$ $D_{57} = 0$ $D_{58} = 0$ $D_{59} = 0$ $D_{60} = 0$ $D_{61} = 0$ $D_{62} = 0$ $D_{63} = 0$ $D_{64} = 0$ $D_{65} = 0$ $D_{66} = 0$ $D_{67} = 0$ $D_{68} = 0$ $D_{69} = 0$ $D_{70} = 0$ $D_{71} = 0$ $D_{72} = 0$ $D_{73} = 0$ $D_{74} = 0$ $D_{75} = 0$ $D_{76} = 0$ $D_{77} = 0$ $D_{78} = 0$ $D_{79} = 0$ $D_{80} = 0$ $D_{81} = 0$ $D_{82} = 0$ $D_{83} = 0$ $D_{84} = 0$ $D_{85} = 0$ $D_{86} = 0$ $D_{87} = 0$ $D_{88} = 0$ $D_{89} = 0$ $D_{90} = 0$ $D_{91} = 0$ $D_{92} = 0$ $D_{93} = 0$ $D_{94} = 0$ $D_{95} = 0$ $D_{96} = 0$ $D_{97} = 0$ $D_{98} = 0$ $D_{99} = 0$ $D_{100} = 0$*

$\Rightarrow \begin{cases} 1 + a^2 = 64b^2 \\ a^2 = 4b^2 - 12b + 8 \\ a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases}$

$64b^2 - 1 = 4b^2 - 12b + 8$

$60b^2 + 12b - 9 = 0$

$D = 36 + 960 = 6616 = 6^2 \cdot 4^2$

$b_{1,2} = \frac{-6 \pm 24}{60}$

$b_1 = \frac{1}{10}, b_2 = \frac{3}{10}$

$a^2 = 15, a = \pm \sqrt{15}$

$b_1 = \frac{3}{10}, a^2 = \frac{64 \cdot 9}{100} - 1, a^2 = \frac{16 \cdot 9}{25} - 1, a = \pm \frac{\sqrt{717}}{5}$ *Ответ $a = \pm \sqrt{15}, a = \pm \frac{\sqrt{717}}{5}$*

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



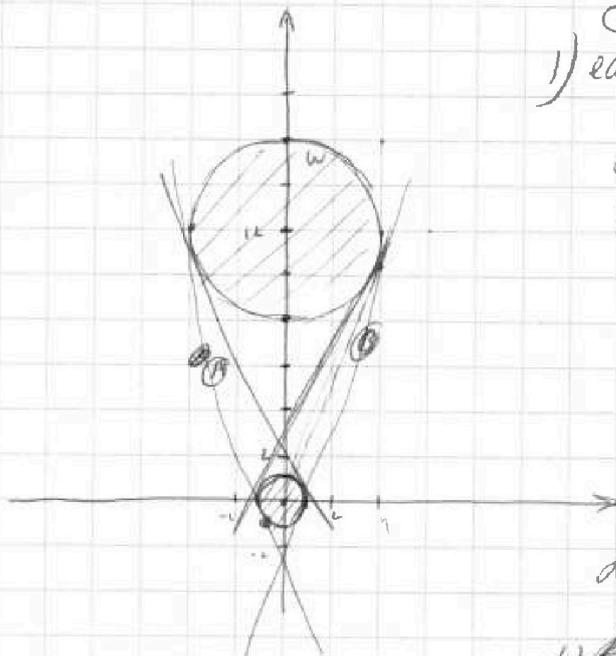
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax+by \\ a(x+y-8b)=0 \quad (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y+1)^2-16)=0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\textcircled{1}: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y+1)^2=16 \end{cases} \text{ две окр.}$$

или попарно зипр - оба.



1) если $b=0$ то:

$y = -ax$
 100% min ширины - кас. к окр. w
 100% min

$$x^2 + (-ax-1)^2 = 16$$

$$x^2 + a^2x^2 + 24ax + 12 = 16$$

$$x^2(a^2+1) + 24ax + 4 = 0$$

$$D = 0 \text{ (одно реш.)}$$

$$D: 12a^2 - 4 \cdot 4 \cdot 8(a^2+1) = 0$$

$$12a^2 = 128$$

$$12a^2 = 4 \cdot 4 \cdot 8(a^2+1)$$

$$448a^2 = 448(a^2+1)$$

$$a^2 = 2, a = \pm 2\sqrt{2} \text{ но}$$

это вариант позадвиг минимум решения

4 если

2) су. бцр, кас. кас. позадвиг $-a, 8$ - кас. к 2 окр. сразу (прямая $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$)
 или (прямая) кас. силь внешне кас. окр.

$$\begin{cases} x^2 + (8b-ax)^2 = 1 \quad (1) \\ x^2 + (-8b-ax-1)^2 = 16 \quad (2) \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^2 + 64b^2 + 16axb + a^2x^2 = 1 \\ x^2(a^2+1) + 16axb + 64b^2 - 1 = 0 \\ D=0, D_1=64 \end{cases}$$

$$D_1 = 64a^2b^2 - (a^2+1)(64b^2-1) = 0$$

$$64a^2b^2 - 64a^2b^2 - a^2 - 64b^2 + 1 = 0$$

$$a^2 + 64b^2 = 1, (1)$$

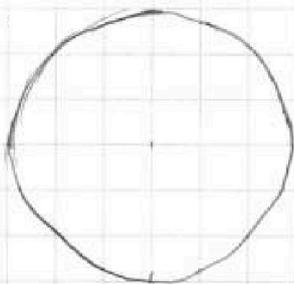
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 169 \\ \hline 1521 \\ 10140 \\ 16900 \\ \hline 28561 \\ + 81143 \\ \hline 209704 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \sqrt{627} \\ \hline 1963 \\ 5780 \\ 173400 \\ \hline 181193 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 11 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 1820 \\ \hline 20475 \end{array} \quad 0010$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 1820 \\ \hline 20475 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ + 48 \\ \hline 53 \end{array} \quad +14$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 16 \\ \hline 17 \end{array}$$

200000
360000
500
400
250000

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 169 \\ \hline 1521 \\ 40 \end{array}$$

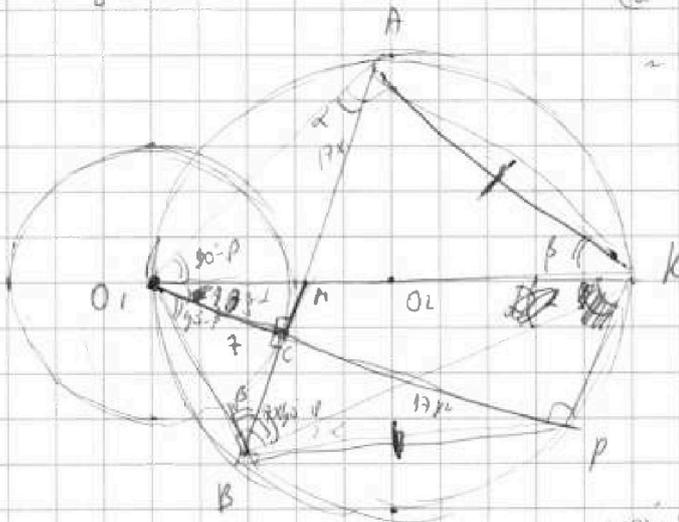
$$\begin{array}{r} 54 \\ + 8 \\ \hline 62 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 7 \\ \hline 33 \end{array}$$

8

$$(26-7)(26+7) =$$

27



$$\begin{array}{r} 33 \\ \times 19 \\ \hline 297 \\ 594 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 338 \\ \times 115 \\ \hline 21 \\ 13 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$13^4 + 17^4 = (26^2 - 7^2)$$

$$90^\circ - \beta + \alpha$$

$$120^\circ - 90^\circ - 90^\circ + \beta + \alpha$$

$$\angle \alpha = \frac{7}{17}$$

$\beta = 1$

$$43 \alpha^2 = BO_1$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 49 \\ \hline 258 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 520 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\triangle CBO_1 \sim \triangle AKO_1$$

$$\frac{CB}{AK} = \frac{BO_1}{KO_1} = \frac{CO_1}{AO_1}$$

$$\frac{7x}{AK} = \frac{BO_1}{26} = \frac{7}{AO_1}$$

$$AO_1 \cdot BO_1 = 7 \cdot 26$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 49 \\ \hline 358 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 520 \\ \hline 676 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x + y = 14$$

$$y = 14 - 2x$$

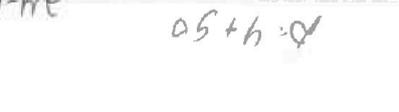
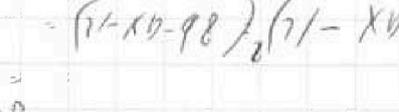
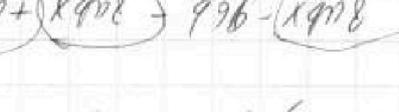
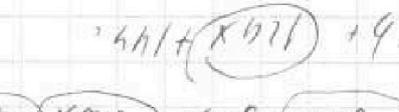
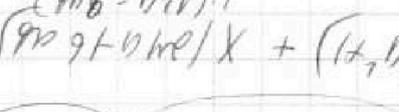
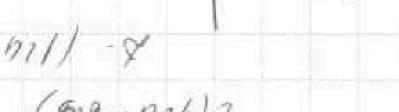
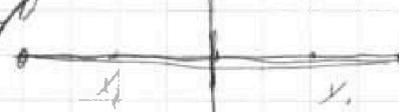
$$2x + y = 14$$

$$y = 14 - 2x$$

$$2x + y = 6$$

$$2x + y = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$



Handwritten notes and calculations on the left side of the page, including various algebraic expressions and fractions.

Handwritten notes and calculations on the right side of the page, including various algebraic expressions and fractions.

Handwritten text at the bottom center of the page.

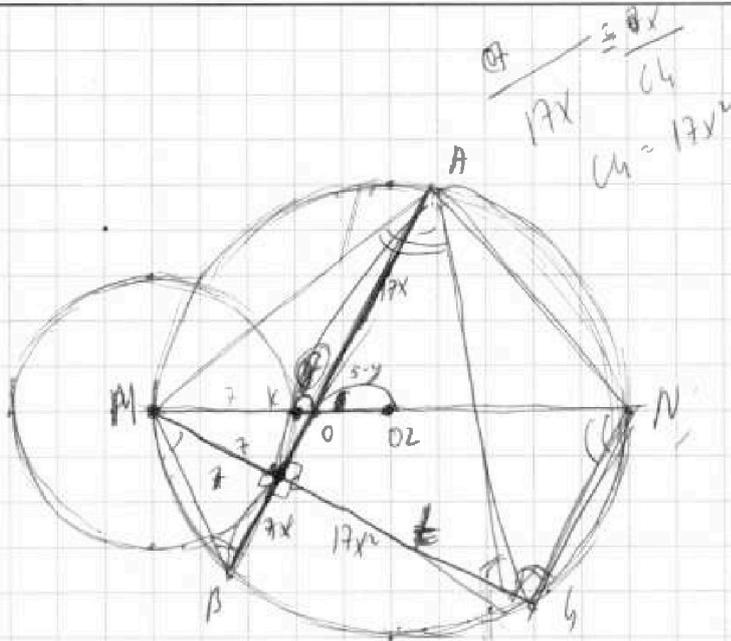
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AP}{17x} = \frac{BP}{7x}$$

$$CK = 17x^2$$

$$\triangle MCB \sim \triangle ACK;$$

$$\frac{7}{17x} = \frac{7x}{CK}$$

$$5-y = 11$$

$$17x \cdot 7x = 7 \cdot CK$$

$$17x \cdot 7x = 7 \cdot CK$$

$$CK = 17x^2$$

$$5-y + 15 =$$

$$MO \cdot ON = PO \cdot OQ;$$

$$(7+y) \cdot (18-y) = 7 \cdot z;$$

$$\frac{7}{7+z} = \frac{7+y}{26}$$

$$(7+y)(18-y) = 7 \cdot \frac{7 \cdot 26 - 7(7+y)}{7+y}$$

$$7 \cdot 26 = (7+y)z + z(7+y)$$

$$\frac{7}{7+z} = \frac{7+y}{26} \cdot z = \frac{7 \cdot 26 - 7(7+y)}{7+y}$$

$$7 \cdot 26 = (7+y)z + z(7+y)$$

$$z = \frac{7 \cdot 26}{7+y} - 1$$

$$z = \frac{7 \cdot 26 - 7(7+y)}{7+y}$$

$$\frac{7}{7+z} = \frac{7+y}{18-y}$$

$$(7+y)^2 \cdot (18-y) = 7 \cdot 7 \cdot (26 - 7 - y)$$

$$(7+y)^2 \cdot (18-y) = 49(19-y)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



15

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2-6x+2+9x-1} = 1-9x$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2-6x+2} + \frac{11}{50} = \frac{36x^4 - 18x^3 + 42x^2 - 18x^3 + 9x^2 - 6x + 4}{(6x^2-3x+1)(6x^2-3x+1)}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1$$

$$3x^2+3x+1 - 3x^2+6x-2 = 9x-1$$

$$3x^2-6x+2 = t$$

$$3x^2+3x+1 = p, \quad p > 0$$

$$a(y_1-x_1) + (y_1-y_1) = 14$$

$$2x_1+y_1 = k$$

$$2x_1+y_1 = 14-k$$

$$p = t^2 - p^2$$

$$t-t = t^2 - p = (t-p)(t+p)$$

$$(t-p)(t+p-1) = 0$$

$$t-p$$

$$t+p-1$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} = 3x^2+3x+1$$

$$3x^2-6x+1 = 3x^2+3x+1$$

$$-9x+1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{9}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

$$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 + \sqrt{\dots} = 0$$

$$6x^2-3x+2 + 2\sqrt{\dots} = 0$$

$$6x^2-3x+2 \leq 0$$

$$4(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1) = (6x^2-3x+2)^2$$

$$4(9x^4+9x^3+3x^2-18x^3-18x^2+2) = 36x^4 - 36x^3 + 33x^2 - 12x + 4$$

$$4(9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2) = 36x^4 - 36x^3 + 33x^2 - 12x + 4$$

$$\frac{36x^4}{36} - \frac{36x^3}{36} - \frac{36x^2}{36} + \frac{8}{36}$$

$$4(9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2) = 36x^4 - 36x^3 + 33x^2 - 12x + 4$$

$$36x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 8 = 36x^4 - 36x^3 + 33x^2 - 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 69 = 312$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{312}}{69}$$

$$9-11.3$$

$$\frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$y_0 = 14 - 2x_1$$

$$y_1 = 14 - 2x_2$$

$$\frac{36}{69}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

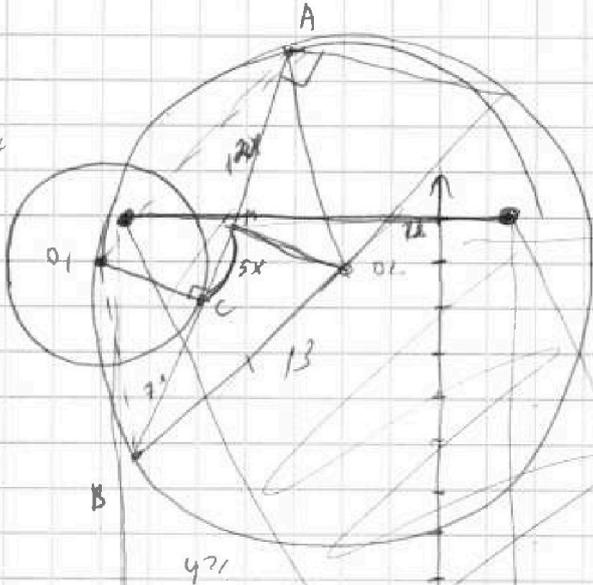
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$kx + b = y_1$
 $kx_2 + b = y_2$
 $kx_1 + b = y_1$



$y \leq 2x$
 $y > 0$

$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$
 $\frac{y}{x} = \frac{y_2}{x_2}$

a=1, b=3

$\sqrt{3x^2 - 6x + 4} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$
 $\sqrt{3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$

$3x^2 + 3x + 1 = t$ ($t > 0$ / const)

$\sqrt{t+p} - \sqrt{t} = p$

$\sqrt{t+p} = p + \sqrt{t}$ $p + \sqrt{t} \geq 0$

$t+p = p^2 + 2p\sqrt{t} + t$

$p^2 + 2p\sqrt{t} - p = 0$ $p=0$

$p + 2\sqrt{t} - 1 = 0$ $2\sqrt{t} = 1-p$

$4t = 1 - 2p + p^2$

$4(2x^2 + 3x + 1) + 4 = 1 - 2 + 18x + 1 - 18x + 81x^2$

$4t = (1-p)^2$

$4(2x^2 + 3x + 1) + 4 = 81x^2$

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

$D = 6 \cdot 6 + 4 \cdot 69 = 66 + 4$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 4 \\ \hline 276 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times 9 \\ \hline 648 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 3 \\ \hline 207 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 5x$$

$$3x^2 - 6x + 1 = 2 \quad D = 9 - 12 = -3$$

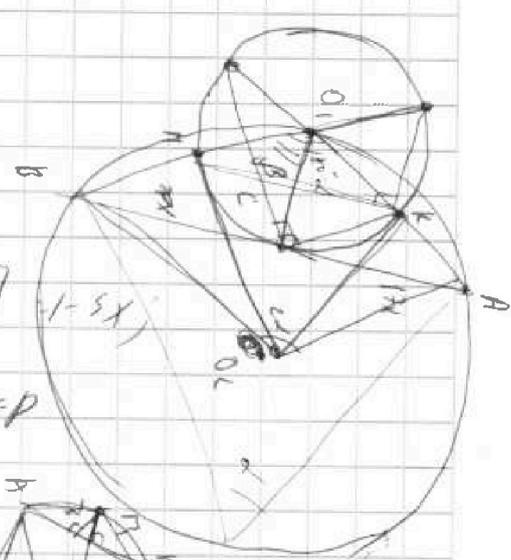
$$D = 9 - 6 = 3$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1 - 9x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 5x$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 4 \quad ; \quad 1 - 9x = p$$

$$\sqrt{t - p} - \sqrt{t} = p$$

$$p > 0$$



$$\sqrt{t - p} - \sqrt{t} = p$$

$$t - p + t = 2\sqrt{t} \sqrt{t - p} - p^2$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1 - 9x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 5x$$

$$\sqrt{t + p} - \sqrt{t} = p$$

$$p > 0$$

$$\sqrt{t + p} - \sqrt{t} = p$$

$$\sqrt{t + p} = p + \sqrt{t}$$

$$t + p = p^2 + 2p\sqrt{t} + t$$

$$p^2 + 2p\sqrt{t} - p^2 = 0$$

$$p(p + 2\sqrt{t} - p) = 0$$

$$p + 2\sqrt{t} = 1 - p$$

$$4\sqrt{t} = 1 - 2p$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 5x$$

$$\sqrt{t + p} - \sqrt{t} = p$$

$$p + \sqrt{t} \geq 0$$

$$1 - 2\sqrt{t} + \sqrt{t} \geq 0$$

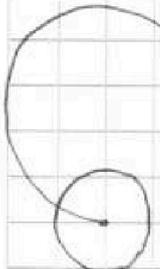
$$p = 0$$

$$p = 1 - 2\sqrt{t}$$

$$4\sqrt{t} = 1 - 2p$$

AB - 24x

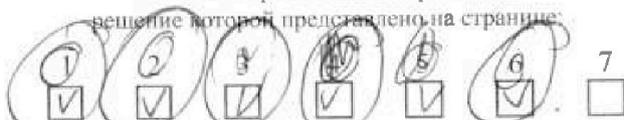
$R_1 = 7$
 $R_2 = 13$
 $R_3 = 13$
 $R_4 = 13$
 $R_5 = 13$
 $R_6 = 13$
 $R_7 = 13$
 $R_8 = 13$
 $R_9 = 13$
 $R_{10} = 13$
 $R_{11} = 13$
 $R_{12} = 13$
 $R_{13} = 13$
 $R_{14} = 13$
 $R_{15} = 13$
 $R_{16} = 13$
 $R_{17} = 13$
 $R_{18} = 13$
 $R_{19} = 13$
 $R_{20} = 13$
 $R_{21} = 13$
 $R_{22} = 13$
 $R_{23} = 13$
 $R_{24} = 13$
 $R_{25} = 13$
 $R_{26} = 13$
 $R_{27} = 13$
 $R_{28} = 13$
 $R_{29} = 13$
 $R_{30} = 13$
 $R_{31} = 13$
 $R_{32} = 13$
 $R_{33} = 13$
 $R_{34} = 13$
 $R_{35} = 13$
 $R_{36} = 13$
 $R_{37} = 13$
 $R_{38} = 13$
 $R_{39} = 13$
 $R_{40} = 13$
 $R_{41} = 13$
 $R_{42} = 13$
 $R_{43} = 13$
 $R_{44} = 13$
 $R_{45} = 13$
 $R_{46} = 13$
 $R_{47} = 13$
 $R_{48} = 13$
 $R_{49} = 13$
 $R_{50} = 13$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице.



МФТИ

Если отмечены более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

Handwritten mathematical work on grid paper. The main problem involves solving for variables a, b, and c based on given equations and their products.

Equations and Expressions:

- $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} \cdot \frac{b}{b} = \frac{(a+b)^2 - 9ab}{a^2-7ab+b^2}$
- $\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b} = a-b$
- $a^2-7ab+b^2 = (a+b)(a-b)$
- $a^2-7ab+b^2 = a^2-ab-8ab+8b^2$
- $-8ab+b^2 = -8ab+8b^2$
- $3b^2 = 8b^2$
- $5b^2 = 0$
- $b^2 = 0$
- $b = 0$

Calculated Values:

- $ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$
- $bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$
- $ac = 2^{23} \cdot 7^{35}$
- $abc = 2^{55} \cdot 7^{64}$
- $abc = 2^{21} \cdot 7^{34}$

Other Calculations:

- $17^2 - 7 \cdot 17 \cdot 3 + 5 = 289 - 399 + 5 = -105$
- $17^2 - 7 \cdot 17 \cdot 3 + 5 = 289 - 399 + 5 = -105$
- $17^2 - 7 \cdot 17 \cdot 3 + 5 = 289 - 399 + 5 = -105$

Final Results:

- $a = 17$
- $b = 3$
- $c = 5$

The work includes various algebraic manipulations, factoring, and numerical calculations, with some parts circled or underlined.

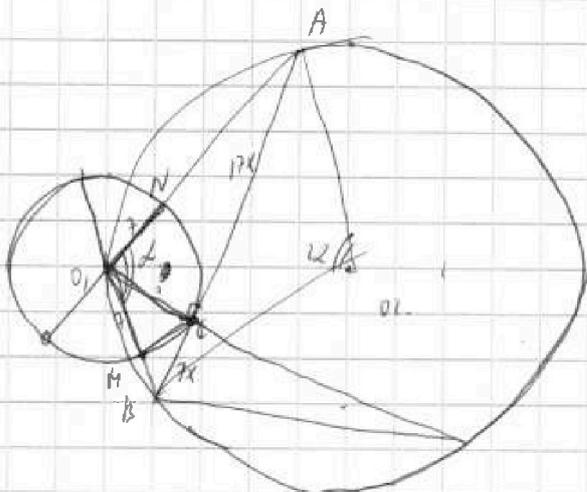
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$285x^2 + 45$$

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha)} = 2 \cdot 13$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \cdot 13}{24x}$$

$$\sin \alpha = \frac{13}{12x}$$

$$45 - 45x^2 = 45(1 - x^2)$$

$$O_1D = 7\sqrt{x^2 + 1}$$

$$O_1A = \sqrt{285x^2 + 45}$$

$$MB \cdot (MB + 14) = 45x^2$$

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha)} = 2 \cdot 13$$

$$AB = 2 \cdot 26 \cdot \sin \alpha$$

$$24x = 2 \cdot 26 \cdot \sin \alpha$$

$$6x = 13 \sin \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{6x}{13}$$

$$\cos \alpha =$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \left(\frac{6x}{13}\right)^2$$

$$1 - 2 \sin^2 \alpha$$

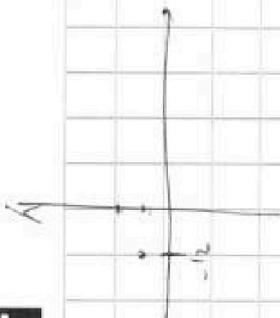
$$1 - 1 +$$

$$\sin \alpha = \frac{6x}{13}$$

$$2 \cdot 13^2 \cdot (1 - \cos \alpha) = AB^2$$

$$2 \cdot 13^2 \cdot \left(1 - \frac{6x}{13}\right) = AB^2$$

$$2 \cdot 13^2 \cdot \frac{36x^2}{15} = AB^2$$



Handwritten notes on the right margin, including 'x/2 + x/2 = x' and other calculations.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$90^\circ - \alpha + 50^\circ + \beta = 180^\circ$$

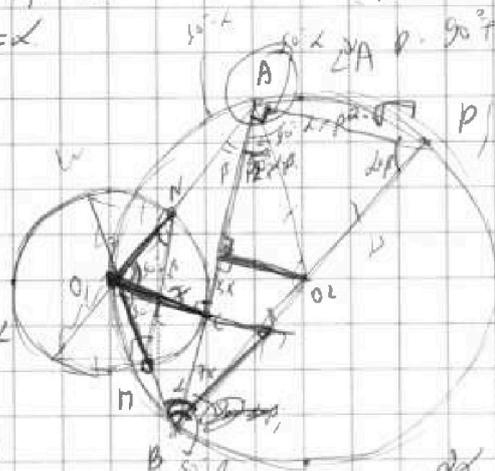
$$\beta = \alpha$$

$$90^\circ - \alpha - \beta = 50^\circ - \alpha$$

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{2 \cdot 13}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)}$$

$$\frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{2 \cdot 13}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{24x}{4 \cdot 13} = \frac{12x}{13}$$



$$90^\circ - \alpha - \beta$$

$$1 - 9 \frac{1}{2} = 0$$

$$b = 22$$

$$b = 3$$

$$\sqrt{165 - 144x^2}$$

$$90^\circ + \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta)$$

$$\frac{15}{15}$$

$$\frac{171}{150}$$

$$\frac{361}{15}$$

$$\frac{1}{23}$$

$$90^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ - \beta$$

$$\frac{480}{480}$$

$$\triangle ACO_1 \sim \triangle BCO_1$$

$$\frac{480}{480}$$

$$90^\circ$$

$$90^\circ$$

$$b \cdot n \cdot (2n + 1) = 45n^2$$

$$a = 22$$

$$b = 3$$

$$AN(AN + 20) = 48$$

$$b = 3, a = 19$$

$$2d \cdot 2d - 7 \cdot d \cdot 3 + 3 \cdot 3 =$$

$$22$$

$$2d \cdot (2d - 21) + 9 =$$

$$\frac{25}{31}$$

$$\frac{23}{2}$$

$$400 + 9 = 7 \cdot 203$$

$$\frac{1361}{17}$$

$$2d + 9 = 2 \cdot 31$$

$$4^2 \cdot 166 + 5^2 \cdot 20$$

$$5 \cdot 456^2 - 46^2 \cdot 456^2$$

$$a_{11} = \frac{76^2 \cdot 366}{2}$$

$$\frac{1}{23}$$

$$\frac{8}{23}$$

$$23 \cdot 23 - 7 \cdot 23 \cdot 3 + 9 =$$

$$\frac{55}{26}$$

$$\frac{46}{27}$$

$$\frac{1}{93} + \frac{2}{3} + 1 =$$

$$\frac{105014}{22}$$

$$\frac{54}{8}$$



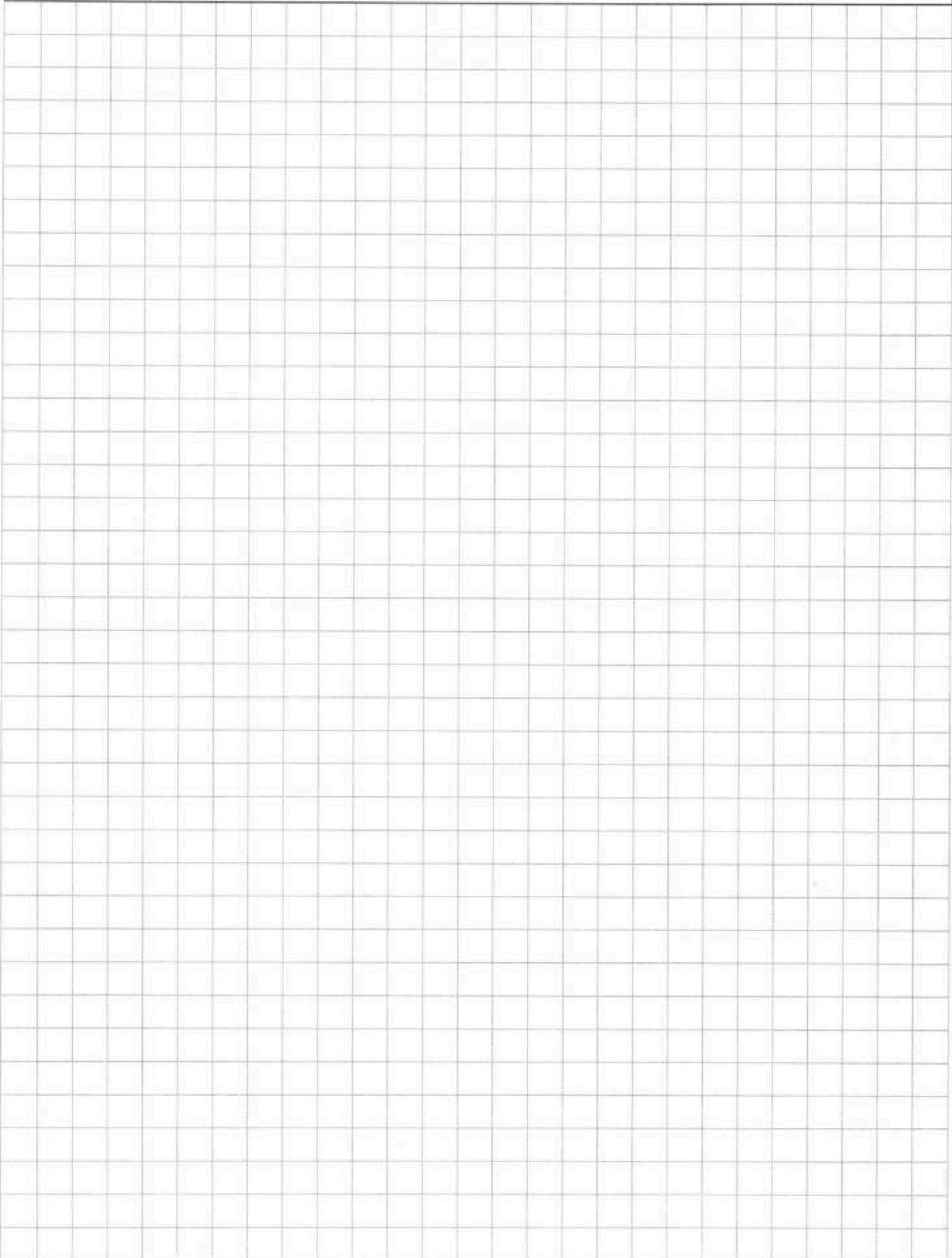
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

180 100 100 80 100 100

$ax^2 + y^2 - 8b = 0$ (1)
 $(x^2 + y^2 - 1)(y^2 + (y-1)^2 - 16) = 0$ (2)

(1) $x^2 + y^2 = 1$
 (2) $x^2 + (y-1)^2 = 16$

$$\begin{array}{r} 152 \\ 16 \\ \hline 136 \\ 16 \\ \hline 152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 152 \\ 8 \\ \hline 192 \\ 16 \\ \hline 208 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 152 \\ 16 \\ \hline 136 \\ 16 \\ \hline 152 \end{array}$$

$x + 8 = 1$

$$\begin{array}{r} 152 \\ 16 \\ \hline 136 \\ 16 \\ \hline 152 \end{array}$$

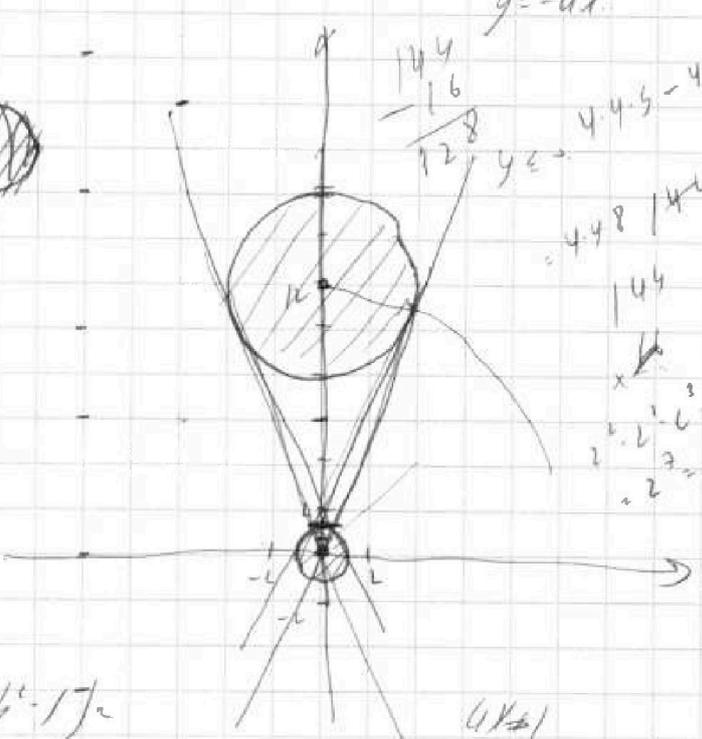
$$\begin{array}{r} 192 \\ 16 \\ \hline 176 \\ 16 \\ \hline 208 \end{array}$$

~~152~~

$$\begin{array}{r} 152 \\ 8 \\ \hline 192 \\ 16 \\ \hline 208 \end{array}$$

$8b \cdot 9x^2 = 16abx$
 $(a^2 - 16b^2 - 17)$

$$\begin{array}{r} 152 \\ 16 \\ \hline 136 \\ 16 \\ \hline 152 \end{array}$$



$x^2 + (-4x - 1)^2 = 16$
 $y^2 + a^2x^2 + 24ax + 144 - 16;$

$x^2 + 8ab^2 - 16abx + a^2x^2 = 1$
 $x^2(a^2 + 1) + 16abx + 8ab^2 - 1 = 0$
 $\Delta = 256a^2b^2 - (8ab^2 + a^2 - 1)$

$x^2(9a^2 + 1) + 24ax + 1$
 $8ab^2 = 8a^2b^2 + 2ab^2 - a^2 - 1$
 $1 + a^2 = 8ab^2$

$9x^2 + 64b^2 + 24ax + 144 - 16 = 0$
 $9x^2 + 64b^2 + 24ax + 128 = 0$
 $x = \frac{-24ax - 128}{18}$

208

808