



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \geq 0$ $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{N}$
 $b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$
 $c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2}$
 тогда $ab = 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2}$; $2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2} = 2^{14} \cdot 7^{10} \Rightarrow a_1 + b_1 \geq 14$

$bc = 2^{\beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\beta_2 + \gamma_2}$; $2^{\beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\beta_2 + \gamma_2} = 2^{17} \cdot 7^{11} \Rightarrow b_1 + c_1 \geq 17$
 $b_2 + c_2 \geq 11$

$ac = 2^{\alpha_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \gamma_2}$; $2^{\alpha_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \gamma_2} = 2^{20} \cdot 7^{12} \Rightarrow a_1 + c_1 \geq 20$
 $a_2 + c_2 \geq 12$

Возможны следующие варианты из системы неравенств, вытекающие из неравенств a_1, b_1, c_1 :

$(a_1 + b_1) + (a_1 + c_1) + (b_1 + c_1) \geq 14 + 17 + 20$

$2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 51$

$a_1 + b_1 + c_1 \geq 25,5$ так a_1, b_1, c_1 — натуральные, $a_1 + b_1 + c_1 \geq 26$

$(a_2 + b_2) + (b_2 + c_2) + (a_2 + c_2) \geq 10 + 11 + 12 = 33$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 32$

Значит, что так $a_2 + c_2 \geq 37$, то $37 + b_2 \geq 32$, откуда $b_2 \geq -5$.

минимум суммы
показателей

То есть b_2

$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2}$ где, то abc минимально при минимальных $a_1 + b_1 + c_1$ и $a_2 + b_2 + c_2$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 32$ при $b_2 = -5$, такое число не существует, поэтому минимальное $a_2 + b_2 + c_2$ будет 37, так $b_2 = 0$ и $a_2 + c_2 \geq 37$. В такой же, если $a_2 + c_2$ будет

тогда b_2 увеличивается, то $a_2 + b_2 + c_2$ тоже увеличивается. Таким образом

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 37$

поэтому $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$ или минимальное $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Проверим, может ли такое (a, b, c) быть натуральными. Для этого попробуем решить:

$a_1 = 8, b_1 = 6, c_1 = 12 \Rightarrow a = 2^8, b = 2^6, c = 2^{12} \cdot 7^{10}$

$a_2 = 17, b_2 = 0, c_2 = 20 \Rightarrow ab = 2^{17} \cdot 7^{11}, bc = 2^{17} \cdot 7^{11}, ac = 2^{20} \cdot 7^{12}$ и $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Итак $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

уменьшим левую часть на правую часть, получим квадратное уравнение (м.е.м.)

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$(2x^2 - 5x + 3) + (2x^2 + 2x + 1) \geq 0$, умножим

$$(2 - 7x) - (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = 0$$

на левую часть, получим квадратное уравнение

анализируем

$$\begin{cases} 2 - 7x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \Rightarrow D = 25 - 24 = 1 \quad x_1 = \frac{5-1}{4} = 1 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{5+1}{4} = 1.5 \Rightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [1.5; \infty)$$

таким образом, ОДЗ: $x \in (-\infty; 1] \cup [1.5; \infty)$
корень $x = \frac{2}{7}$ в него входит.

$$(1) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2x^2 + 2x + 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 7x - 2$$

$$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 28x + 4$$

и м.е. квадратное уравнение
корень квадратного уравнения (1)
таким образом, получим уравнение (2)
корень уравнения квадратного уравнения (2)

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \\ 1 - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$8x^2 - 22x - 3 \geq 0$$

$$D = 121 + 24 = 145 \Rightarrow x_1 = \frac{11 + \sqrt{145}}{8} \approx 2.7$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \leq 1 \Rightarrow 2x^2 + 2x \leq 0$$

$$2x(x+1) \leq 0 \Rightarrow x \in [-1; 0]$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \leq 1 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 \leq 0$$

$$D = 25 - 16 = 9 \quad x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x \in [\frac{1}{2}; 2]$$

решением системы будет

$$X = [-1; 0] \cap [\frac{1}{2}; 2] = \emptyset$$

таким образом, уравнение (1) не имеет корней

таким образом, уравнение (2) имеет корень $x = \frac{2}{7}$

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

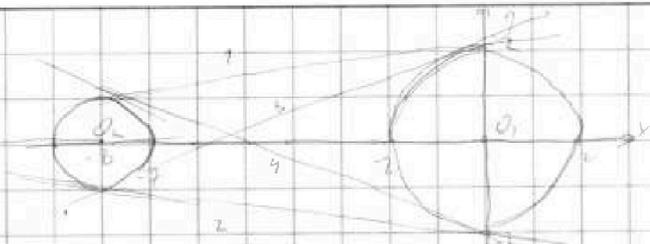
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

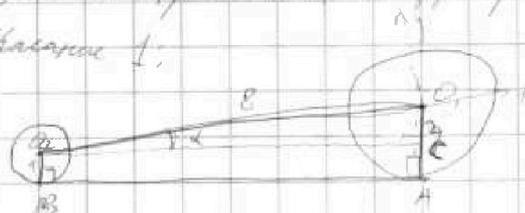


$$((x+y)^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

представим собой два круга
 $(x+y)^2 + y^2 \leq 1$ (центр $O(1,0)$ и $R=1$)
 и $x^2 + y^2 \leq 4$ (центр $O(0,0)$ и $R=2$)

Поскольку заданы два семейства, пересекаясь (линии уровня) данных
касательных, будем определять, какие из касательных касаются обеих
представленных на рисунке, считая наглядно, что касательная
касается $\sqrt{10}$ и $\sqrt{5}$ окружностей, но будет касаться только одной окружности.

Касание 1:



Пусть O_1 - центр первой окружности,
 O_2 - второй. AB касательная к обеим
 окружностям $O_1O_2 = 2$, $O_2B \perp AB = r = 1$
 $O_1A \perp AB = R = 2$

Рассмотрим $O_1C \parallel AB$ AB, CO_2 - параллельны, $AC = O_1B = 1$

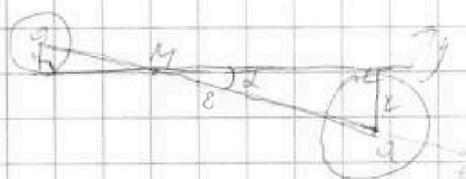
$$O_1C = AB - AC = 2 - 1 = 1 \quad \text{tg} \alpha = \sin \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{10}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Значит, точка касания O_1O_2 и AB равноудалены от центра O_1 ,
 т.е. AB и O_1O_2 есть одна линия касания x и касательная, упрощая
его можно считать касательной к окружности O_1 .

Для второй касательной две, и так же, как и первая, касательная к обеим
 x , касательная к окружности O_2 и касательная к окружности O_1 . Поэтому для
 углов $\text{tg} \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$ и $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ касательная AB , касательная к окружности O_1

Касание 2:



В точке касания x касательная AB и
 касательная $O_1O_2 = O_1M + O_2M =$
 $= \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{2}{\sin \alpha} = 6$

$$\text{tg} \alpha = \frac{1}{2}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Аналогично производим для второй,
 касательная к окружности O_1 и касательная к окружности O_2
 касательная AB , касательная к окружности O_1

$$\text{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (\text{в касательной } AB \text{ касательная к окружности } O_1)$$

$$\text{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

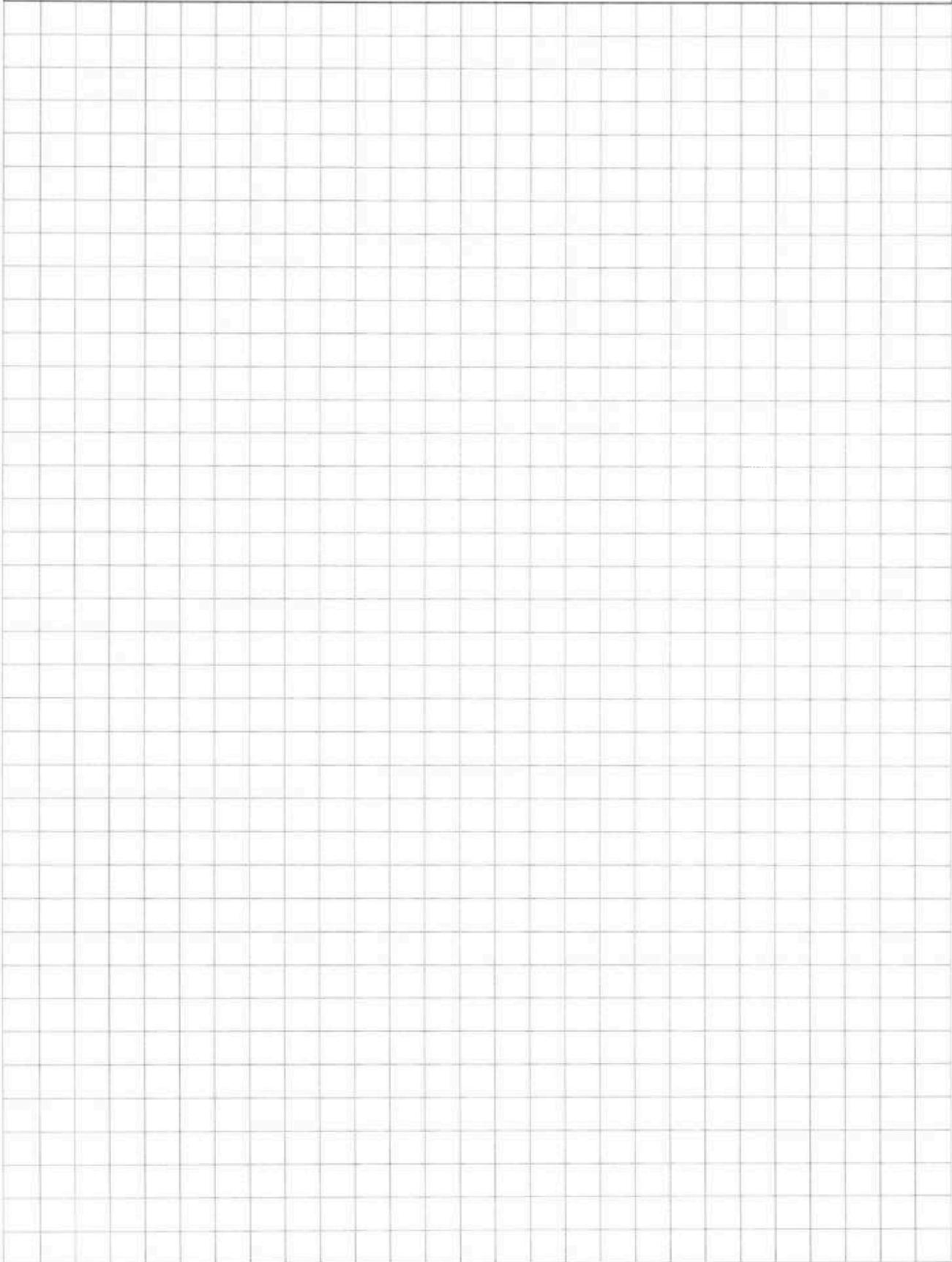


На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



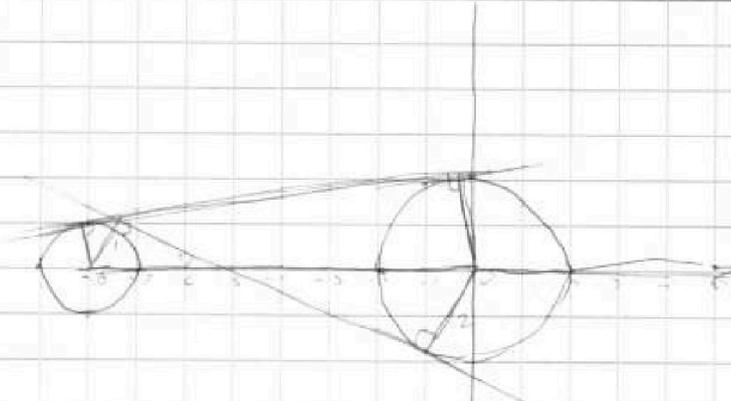
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax - y + 10b = 0$$

$$(x+b)^2 + y^2 \leq 1$$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$



$$ax - y + 10b = 0$$

$$y = -ax + 10b$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{1}$$

$$y = kx + b$$

$$D = 4k^2b^2 - 4(b^2 - 4)(1+k^2)$$

$$4k^2b^2 - 4(b^2 - 4)(1+k^2) \geq 0$$

$$D = 4k^2b^2 - 4(b^2 - 4)(1+k^2)$$

$$x^2 + 8x + 64 + k^2x^2 + 2kx + b^2 - 4 = 0$$

$$D = 4k^2b^2 - 4$$

$$D = 4k^2b^2$$

$$b(2kx + 8) + 4(1+k^2)(b^2 + 63)$$

110

$$\sqrt{65}$$

$$\frac{1}{\sqrt{65}}$$

$$\frac{\sqrt{65}}{65}$$

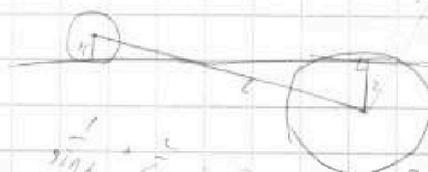
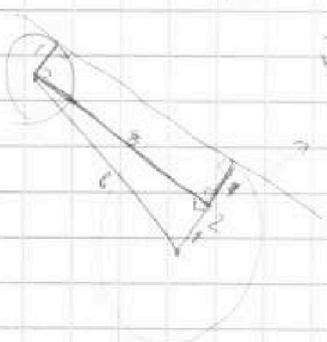
122

$$1 + 62 + 2$$

$$\frac{2}{3 - 12}$$

$$b(2kx + 8) = 64b$$

$$A \cdot 2 \cdot 8^2$$



$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{2}{\sin \alpha} = 8$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{8}$$

64

$$64 - 9 = 55$$

$$\sin \alpha = 8$$

$$\cos \alpha = \frac{55}{8}$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{8} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 6ab}$$

$$a+b = n$$

$$n = kn$$

$$ab = n$$

$$ab = kn$$

$$\frac{ab}{a+b} = k$$

$$\frac{a+b^2 - 6ab}{a+b}$$

$$a+b = \frac{6ab}{a+b}$$

$$\frac{n}{n^2 - 6m}$$

$$\frac{n}{n^2 - 6k}$$

$$n = 6k$$

$$\frac{6 \cdot \frac{1}{3} = 2}{3}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 6ab + a^2 + b^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1

2

3

4

5

6

7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - b^2}$$

$$\frac{1+2}{1+9-6-12} = \frac{3}{-7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a+b=2$
 $G = 2^{a+1} 7^{b+1}$
 $b = 2^{a+1} 7^b$
 $c = 2^{a+1} 7^{b+1}$

1) $a_1 + b_1 \geq 14$
 $a_1 + b_1 \geq 10$
 2) $b_1 + c_1 \geq 17$
 $b_1 + c_1 \geq 20$
 $a_1 + c_1 \geq 23$

$a_1 b_1 c_1 = 2^{a_1+b_1+c_1} 7^{a_1+b_1+c_1}$

$4(a_1 + b_1 + c_1) \geq 10 + 17 + 23 = 50$
 $a_1 + b_1 + c_1 \geq 12.5$

$a_1 + b_1 \geq 14$
 $b_1 + c_1 \geq 20$
 $a_1 + c_1 \geq 23$

27
 21
 10

47
 17
 64

$2^{16} 7^{32}$

$A = a = 2^7 7^5$

$b = 2^{13} 7^{20}$
 $c = 2^{13} 7^{30}$

$a_1 = 8, b_1 = 6, c_1 = 12$

$c_1 \geq 14 - b_1$
 $a_2 \geq 10 - b_2$

$b_1 = 17 - c_1$
 $10 - b_2 = 27 - c_2$

14
 13
 27

$14 - b_1 = 20 - c_1$
 $20 - 14 = -5$

$b_1 = \frac{11}{2} \leq 6$

26
 17
 18

$a_1 + c_1 \geq 27 - 2b_1$

$b_1 \geq 0$
 $c_1 + b_1 \geq 27$

$a_2 + b_2 + c_2 = 32$

$a_1 + b_1 c_1 \geq 37$

$37 + b_2 \geq 32$

17
 16
 37
 52

$15 + 12 + b_2 \geq 50$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 12x + 11} = 2 - 7x$

$+ 7x + 2 = (2 - 7x) Z$

$(2 - 7x)(2 - 7x)Z = 0$

$+ 7x - 2 = 0$

$x = \frac{2}{7}$

$Z = 1$

$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

$2x^2 - 25x + 24$

$x_1 = \frac{5 + \sqrt{101}}{4} = \frac{6}{2}$

$x_2 = +1$

$x \in (-\infty, +1] \cup$
 $[\frac{6}{2}, \infty)$

$ax^2 + 2x + 1 \geq 0$

$D = 4 - 4a \leq 0$

$x_0 = \frac{-2}{a} = -0.5$

$\frac{3}{4} - \frac{2}{a} + 1 =$

$= \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4}$

$2 - 7x = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 12x + 11}$

$6 - 10x = -1$

$\frac{1}{2} - \frac{2}{a} = 1 \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{6}{2} = 6$

$\frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{4x^2 + 2x + 1} \geq 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2(2x^2 + 2x + 1)} = \sqrt{5} \geq 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2x^2 + 2x + 1$$

$$2 - 7x = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 7x - 1$$

$$4x^2 + 2x + 4 = 49x^2 - 14x + 1$$

$$45x^2 - 22x + 3 = 0$$

$$D = 11^2 - 4 \cdot 45 \cdot 3 = 121 - 123 < 0$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$4x(x+1) \geq 0$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$$

$$x \in [-1, 0]$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_1 = -y_2 = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1$$

$$y_2 = (12 + 2x_1 + y_1) - 2x_2$$

$$D: 75 - 16 = 59$$

$$x_1 = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 2$$

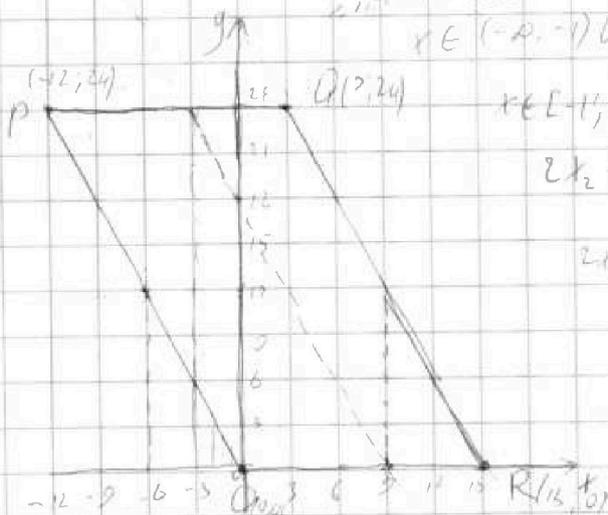
$$x \in (\frac{1}{2}, 2)$$

$$x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup$$

$$x \in [\frac{1}{2}, 2]$$

$$15 | 19$$

$$15 | 19$$



$$15 | 19$$

$$y \geq 12 + 2x + y_1 \leq$$

$$12 + 2x + y_1 \leq 30$$

$$2x + y_1 \leq 18$$

$$y_1 \leq 18 - 2x$$

$$x_1 \leq 9 - \frac{y_1}{2}$$

$$12 + 2x + y_1 \leq 0$$

$$y_1 \leq -12 - 2x$$

$$y_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 6$$

$$x_1 \geq 6$$

$$6 \leq x_1 \leq 15$$

$$12 + 2x + y_1 \leq 30$$

$$y_1 \leq 18 - 2x$$

$$-12 - 2x \leq 24$$

$$x_1 \geq 6$$

$$y_1 = 18 - 2x$$

$$x_1 \in [0, 2] \cup [6, 15]$$

$$\# [0, 2] \cup [6, 15]$$

$$0 \leq 12 + 2x + y_1 \leq 30$$

$$y_1 \geq -12 - 2x$$

$$0 \leq -12 - 2x$$

$$x \geq -6$$

$$y_1 \leq 18 - 2x$$

$$24 \leq 18 - 2x$$

$$x_1 \leq$$

$$24 \geq y_1 \geq -12 - 2x$$