МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть $a = 2^{a_1} 7^{a_2}$ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \ge 0$ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in N$

$b = 2^{b_1} 7^{b_2}$

$c = 2^{c_1} 7^{c_2}$ тогда $ab = 2^{a_1+b_1} \cdot 7^{a_2+b_2} \vdots 2^{14} 7^{10} \Rightarrow a_1+b_1 \ge 14$, $a_2+b_2 \ge 10$

$bc = 2^{b_1+c_1} \cdot 7^{b_2+c_2} \vdots 2^{17} 7^{17} \Rightarrow b_1+c_1 \ge 17$, $b_2+c_2 \ge 17$

$ac = 2^{a_1+c_1} \cdot 7^{a_2+c_2} \vdots 2^{20} 7^{37} \Rightarrow a_1+c_1 \ge 20$, $a_2+c_2 \ge 37$

Сложим почленно из системы неравенств, включающие a_1, b_1, c_1, а также a_2, b_2, c_2:

$(a_1+b_1)+(a_1+c_1)+(b_1+c_1) \ge 14+17+20$

$2(a_1+b_1+c_1) \ge 51$

$a_1+b_1+c_1 \ge 25{,}5$ т.к. a_1, b_1, c_1 — натуральные, $a_1+b_1+c_1 \ge 26$

$(a_2+b_2)+(b_2+c_2)+(a_2+c_2) \ge 10+17+37=64$

$a_2+b_2+c_2 \ge 32.$

Заметим, что т.к. $a_2+c_2 \ge 37$, то $37+b_2 \ge 32$, откуда $b_2 \ge -5$.

можно сделать подстановку

Но ~~не~~ b_2

$abc = 2^{a_1+b_1+c_1} \cdot 7^{a_2+b_2+c_2}$ ясно, что abc минимально при минимальных $a_1+b_1+c_1$ и $a_2+b_2+c_2$

$a_2+b_2+c_2 \ge 32$ при $b_2=-5$, ~~это~~ такое не подходит, значит минимальное $a_2+b_2+c_2$ будет 37, ~~т.к.~~ тогда $b_2=0$ и $a_2+c_2 \ge 37$. В самом деле, если ~~подставить~~ ~~вместо~~ b_2 увеличивать, то $a_2+b_2+c_2$ тоже увеличивается. Таким образом

$a_2+b_2+c_2 \ge 37$

поэтому $abc \ge 2^{26} 7^{37}$ или минимальное $abc = 2^{26} 7^{37}$

Проверим, чтобы все числа (a, b и c) были натуральными, для этого приведём пример:

$a_1=8$ $b_1=6$ $c_1=12$
$a_2=17$ $b_2=0$ $c_2=20$ $\Rightarrow a = 2^8 7^{17}$ $b = 2^6$ $c = 2^{12} 7^{20}$

$ab = 2^{14} 7^{17} \vdots 2^{14} 7^{10}$

$bc = 2^{18} 7^{20} \vdots 2^{17} 7^{17}$

$ac = 2^{20} 7^{37} \vdots 2^{20} 7^{37}$ и $abc = 2^{26} 7^{37}$.

Ответ: $2^{26} 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

умножим левую и правую части на „сопряжённое" (т.е на $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1} \neq 0$), затем применив в левой части формулу разности квадратов

$(2x^2-5x+3)-(2x^2+2x+1) = (2-7x)(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1})$

$(2-7x)-(2-7x)(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}) = 0$

Откуда
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2-7x=0 \Rightarrow x=\frac{2}{7} \\ \sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1 \end{array}\right. \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \longrightarrow D=25-24=1 \quad x_1=\frac{5-1}{4}=1 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \longrightarrow D<0 \Rightarrow x\in R \end{cases}$$

$x_2=\frac{5+1}{4}=1{,}5 \Rightarrow x\in(-\infty;1]\cup[1{,}5;\infty)$

~~т.е~~

Таким образом, ОДЗ: $x\in(-\infty;1]\cup[1{,}5;\infty)$
корень $x=\frac{2}{7}$ в него входит.

(1) $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2-5x+3}=1-\sqrt{2x^2+2x+1}\geq 0 \\ \sqrt{2x^2+2x+1}=1-\sqrt{2x^2-5x+3}\geq 0\end{array}\right.$ (2)

~~$2x^2-5x+3 = 1-2\sqrt{2x^2+2x+1}+2x^2+2x+1$~~
~~$2-7x = 1-2\sqrt{2x^2+2x+1}$~~
~~$2\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x-1$~~
~~$8x^2+8x+4 = 49x^2-14x+1$~~
~~$41x^2-22x-3=0$~~
~~$\frac{D}{4}=121+123=244 \quad x_1=\frac{11-\sqrt{244}}{2\cdot 41}$~~

т.к. арифметические квадратные корни неотрицательны, уравнение (1) должны удовлетворять системе (2) которая является системой корней

$$\begin{cases} 1-\sqrt{2x^2+2x+1}\geq 0 \\ 1-\sqrt{2x^2-5x+3}\geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$\sqrt{2x^2+2x+1}\leq 1 \Rightarrow 2x^2+2x\leq 0$
$x(x+1)\leq 0 \Rightarrow x\in$ ~~$[0;$~~ $x\in[-1;0]$

$\sqrt{2x^2-5x+3}\leq 1 \Rightarrow 2x^2-5x+2\leq 0$
$D=25-16=9 \quad x_1=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow x\in[\frac{1}{2};2]$
$x_2=\frac{5+3}{4}=2$

решением системы будет
$X=[-1;0]\cap[\frac{1}{2};2]=\varnothing$

следовательно и уравнение (1) не может иметь решений
Таким образом единственный корень $x=\frac{2}{7}$

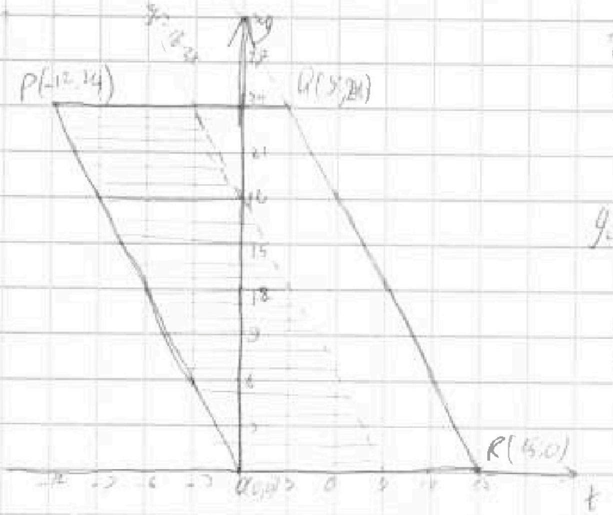
Ответ: $x=\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2x_2 - 2x_1 + y_2 + y_1 = 12$

$\Updownarrow$

$y_2 = (12 + y_1 + 2x_1) - 2x_2$

$y_2(x_2)$ представляет собой прямую вида $y = kx + b$, где $k = -2$, $b = 12 + 2x_1 + y_1$

Заметим, что на прямой $y_2(x_2)$ лежит ровно 13 точек, пока $b = 12 + 2x_1 + y_1$ принадлежит отрезку $[0, 30]$ (точек, содержащихся в параллелограмме с целыми координатами), т.е. имеет место неравенство $0 \le b \le 30$ (т.к. в противном случае точка параллелограмма не найдётся вовсе). Имеем

$\begin{cases} 12 + 2x_1 + y_1 \le 30 \\ 12 + 2x_1 + y_1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 \le 18 - 2x_1 \\ y_1 \ge -12 - 2x_1 \end{cases}$ множество таких точек $(x_1; y_1)$, принадлежащих параллелограмму, отмечены на рисунке горизонтальной штриховкой.

Так как нас интересуют ~~точки~~ точки с целыми координатами, можно представить это множество как $|N|$ прямых $y_1 = n - 2x_1$, каждая из которых содержит по 13 целых точек параллелограмма, причём $n \in [0, 18] \cap N = N$ $\|N\| = 19$

подставим $y_1(x, n)$ в y_2:

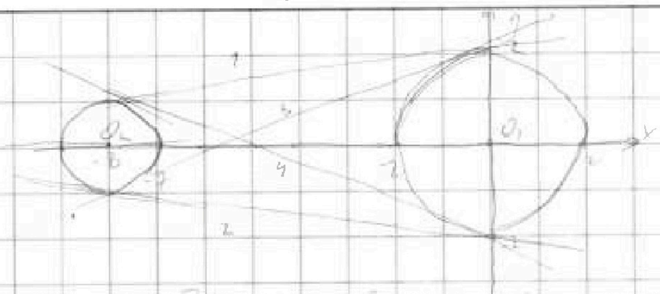
$y_2 = (12 + n - 2x_1 + 2x_1) - 2x_2 = 12 + n - 2x_2$

Получим множество прямых, причём т.к. свободный коэффициент $(n + 12)$ не равен свободному коэффициенту из $y_1(n)$, угловые коэффициенты одинаковы, значит прямые не имеют общих точек. Каждая прямая содержит ровно 13 точек параллелограмма с целыми координатами. Значит на каждую точку прямой $y_1(n, x_1)$ найдётся 13 пар с точками прямой $y_2(n, x_2)$, т.е. $13 \cdot 13$ пар.

Т.к. $n \in N$ и $\|N\| = 19$, то всего таких пар ещё в 19 раз больше, т.е.

$13 \cdot 13 \cdot 19$

Ответ: $13 \cdot 13 \cdot 19$



$((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0$

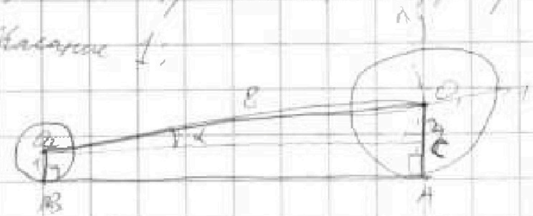
представляет собой два круга

$(x+8)^2+y^2\le 1$ (центр в $(-8,0)$ и $R=1$)

и $x^2+y^2\le 4$ (центр в $(0,0)$ и $R=2$)

Т.к. необходимо два решения, прямая (первое уравнение) должна касаться обеих окружностей. Есть 4 варианта касания, все они представлены на рисунке, помечены цифрами. Варианты касания 1 и 2, и 3 и 4) зеркальны, и будем рассматривать один случай.

Касание 1:



Пусть O_1 – центр большей окружности, O_2 – меньшей. AB – касательная к ним. Из графика $O_1O_2=8$. $O_2B\perp AB=r=1$, $O_1A\perp AB=R=2$

Построим $O_2C\parallel AB$. $ABCO_2$ – прямоугольник, $AC=O_2B=1$

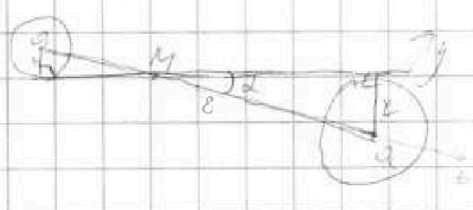
$O_1C=AO_1-AC=2-1=1$ $\quad$ ~~$tg\alpha$~~ $\sin\alpha=\frac{1}{8}\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{\frac{64}{64}-\frac{1}{64}}=\frac{\sqrt{63}}{8}$

$tg\alpha=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{63}}{8}}=\frac{\sqrt{63}}{63}$

Заметим, что угол между O_1O_2 и O_2C ~~равен~~ равен углу между AB и O_1O_2 (т.к. $AB\parallel O_2C$), т.е. ~~$\angle$~~ α есть угол между ~~а~~ осью X и касательной, значит его тангенс является угловым коэффициентом a.

~~Но~~ Таких касательных две, и т.к. центры окружностей лежат на оси X, угловые коэффициенты для них будут отличаться знаком. Поэтому для значений $tg\alpha=\frac{\sqrt{63}}{63}$ и $-\frac{\sqrt{63}}{63}$ найдется такое b, чтобы условие выполнялось.

Касание 2:



В этом случае α – снова угол между Ox и касательной. $O_1O_2=O_1M+O_2M=$

$=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{2}{\sin\alpha}=8$

Откуда $\sin\alpha=\frac{3}{8}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{55}}{8}$

$tg\alpha=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{55}}{8}}=\frac{3\sqrt{55}}{55}$

Аналогично предыдущему случаю, таких касательных две и ~~угол~~ α для них отличается лишь по знаку, т.е. $a=\pm tg\alpha=\pm\frac{3\sqrt{55}}{55}$ (в найденных выше случаях существуют).

Ответ: $\pm\frac{\sqrt{63}}{63}$, $\pm\frac{3\sqrt{55}}{55}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну задачу**.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

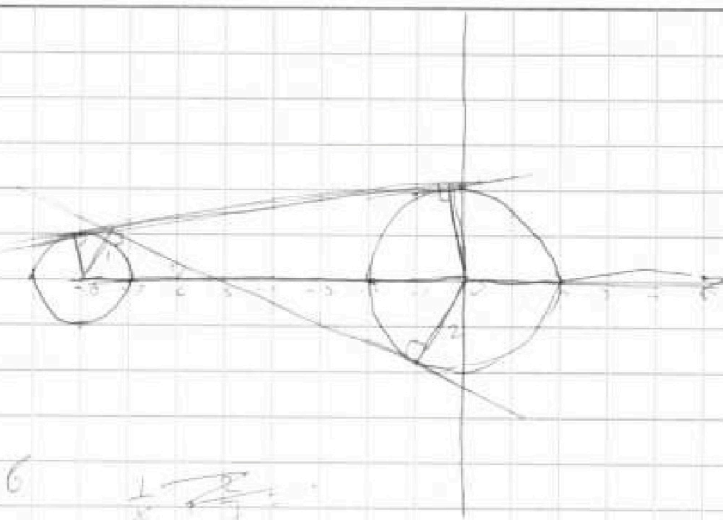
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ax-y+10b=0$

$(x+8)^2+y^2\le 1$

$x^2+y^2\le 4$



$ax-y+10b=0$

$y=-ax-10b$

$y=kx+b$

$\cancel{+kx}\ (x^2+k^2x^2+2kxb+b^2)-4\le 0$

$x^2+8x+64+k^2x^2+2kxb+b^2-1=0$

$D=4k^2b^2-4(b^2-4)(1+k^2)$

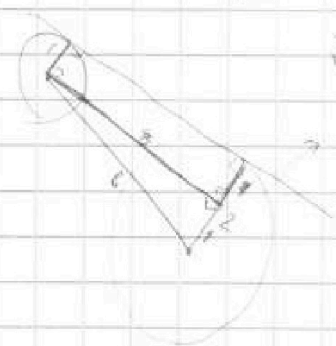
$\cancel{D=4k^2b^2-4b^2(1+k^2)}$

$\cancel{D=4k^2b^2-4(}$

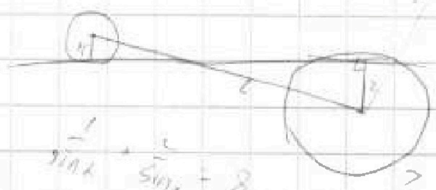
$D=4k^2($

$(2kx+8)^2-4(1+k^2)(b^2+63)$

$\sqrt{65}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{65}}$ $\quad \frac{\sqrt{65}}{65}$ $\quad \frac{1+2}{1+62+2}$ $\quad \frac{2}{3-12}$ $\quad (a+b)^2-8ab$



$a+b$



$\frac{1}{\sin x}+\frac{2}{\sin x}=8$ $\quad \frac{3}{\sin x}=8$

$\sin x=\frac{3}{8}$

$64-9=55$ $\quad \cos x=\frac{\sqrt{55}}{8}$

$\operatorname{tg} x=\frac{3}{\sqrt{55}}=\frac{3\sqrt{55}}{55}$

$\frac{3}{9+8}$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ $\quad \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$

$a+b=n$ $\quad n=kn$ $\quad a+b=n$, $ab=kn$, $\frac{ab}{a+b}=k$

$\frac{(a+b)^2-8ab}{a+b}$ $\quad \frac{n}{n^2-8n}$ $\quad \frac{n}{n^2-8kn}$ $\quad \frac{1}{n-8k}$

$a+b-\frac{8ab}{a+b}$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2-8ab$

a^2+6ab

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \qquad \frac{1+2}{1+4-6\cdot 1\cdot 2} = \frac{3}{-7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a = 2^{a_1} 7^{a_2}$ (1) $a_1 + b_1 = 14$ (1) $b_1 + c_1 = 17$

$b = 2^{b_1} 7^{b_2}$ $b_2 + c_2 = 17$

$c = 2^{c_1} 7^{c_2}$ $a_2 + b_2 = 10$ (1) $a_1 + c_1 = 20$

$a_2 + c_2 = 37$

$abc = 2^{a_1+b_1+c_1} 7^{a_2+b_2+c_2}$

$2(a_2+b_2+c_2) = 10 + 17 + 37 = 64$

$a_2 + b_2 + c_2 = 32$

$14 + 17 + 20 = 51$

$2(a_1+b_1+c_1) = 51$

$a_1 + b_1 + c_1 = 26$

$2^{26} 7^{32}$

$a = 2^7 7^5$

$a_1 = 8$ $b_1 = 6$ $c_1 = 12$

$b_1 = 17 - c_1$

$c_2 = 17 - b_2$

$a_2 = 10 - b_2$

$a_2 + c_2 = 27 - 2b_2$

$a_2 + c_2 = 37$

$b_2 = 17 - c_2$

$10 - b_2 = 37 - c_2$

$2b_2 - 10 = -20$

$b_2 = 0$

$a_2 = 10$ $c_2 = 27$

$a_2 + c_2 = 27 - 2b_2$

$b_2 = 0$

$a_2 + c_2 = 27$

$a_2 + b_2 + c_2 = 32$

$a_2 + c_2 = 37$

$37 + b_2 = 32$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$

$z = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

$(2 - 7x) - (2 - 7x)z = 0$

$2 - 7x = 0$ или $1 - z = 0$

$x = \frac{2}{7}$ $z = 1$

$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

$D = 25 - 24$

$x_1 = \frac{5 + 1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$x_2 = +1$

$x \in (-\infty, +1]$

$[\frac{3}{2}, \infty)$

$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$

$2 - 7x = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

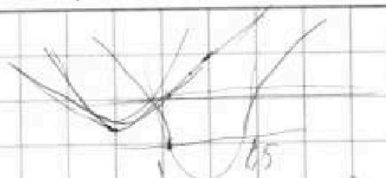
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$



$\sqrt{2-5+3}+\sqrt{2+2+1}=\sqrt{5}>1$

$2x^2-5x+3=1-2\sqrt{2x^2+2x+1}+2x^2+2x+1$

$2-7x=1-2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$2\sqrt{2x^2+2x+1}=7x-1$

$8x^2+8x+4=49x^2-14x+1$

$41x^2-22x+3=0$

$\frac{D}{4}=11^2+41\cdot 3=121-123<0$

$2x^2+2x+1\geq 0$

$2x(x+1)\geq 0$

$x\in(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$

$2x^2-5x+2\geq 0$

$D: 25-16=3^2$

$x_1=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$

$x_2=2$

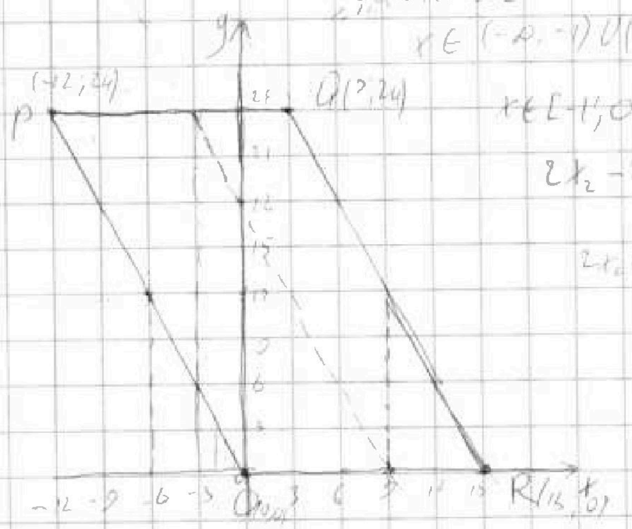
$x\in[-1;0]$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$

$2x_2+y_2=12+2x_1+y_1$

$y_2=(12+2x_1+y_1)-2x_2$

13



13 19

13 13

$12+2x_1+y_1\leq 30$

$2x_1+y_1\leq 18$

$y_1\leq 18-2x_1$

$y\in[0;24]$

$12+2x_1+y_1\geq 0$

$y_1\geq -12-2x_1$

$x_1\geq 6$

$0\leq 12+2x_1+y_1\leq 30$

$y_1\geq -12-2x_1$

$0\geq -12-2x_1$

$x\geq -6$

$y_1\leq 18-2x_1$

$24\leq 18-2x_1$

$x_1\leq$

$x_1\leq 9-\frac{y_1}{2}$

$3\leq x\leq 15$

$12+2x_1+y_1\leq 30$

$y_1\leq 18-2x_1$

$y=11-2x$

$24\geq y_1\geq -12-2x_1$