



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- ✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- ✓ 3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- ✓ 6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

M

Перестановка пер-ва

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \Rightarrow ab \geq 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow bc \geq 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68}$$

т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $abc \in \mathbb{N} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 \in \mathbb{N}$.

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68}, \text{ Заметим, что у нас вида}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{55} \cdot 7^{68}$$

x^2 в разложении всех простых чисел четно (степень каждого простого в разложении ≥ 2)

Но 2^{55} имеет к. степень, значит, чтобы $abc \in \mathbb{N}$, число $a^2 b^2 c^2$ имеет хотя бы $\frac{55}{2}$ в разложении.

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{56} \cdot 7^{68} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{56} \cdot 7^{68} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$$

Проверим, что такое $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$ достижимо, приведем пример.

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^1$$

$$b = 2^5 \cdot 7^5$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{28}$$

Заметим, что $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$ $abc : 2^{28} \cdot 7^{34}$

Из условия: $ac : 7^{39} \Rightarrow abc : 7^{39}$

$$abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Получим $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$ и $abc : 2^{28} \cdot 7^{39}$, т.к.

для натурального числа x $a^2 b^2 c^2 :$

Покажем, что $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$ достигается.

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^5 \cdot 7^2$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{28}$$

$$\Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Ответ: $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Пусть $a+b \equiv m$, тогда и $(a+b)^2 \equiv m$, но
если мы хотим, чтобы дробь можно
было сократить на m , то и $(a+b)^2-9ab \equiv m$

$(a+b)^2 \equiv m \Rightarrow 9ab \equiv m$. Заметим, что т.к.
 $\frac{a}{b}$ - несократима, то в ее разложении
на простые нет одинаковых $\Rightarrow a+b \equiv m$, и
такого m (и даже его делителя простого
делителя) нет в разложении ни a ни b ,
иначе:

Пусть $m \equiv r$ и $a \equiv r$ (где r - простое, тогда)

$r \cdot k + b \equiv r \cdot n \Rightarrow b \equiv r$ - противоречие т.к.

$\text{НОД}(a, b) = 1$, т.к. $\frac{a}{b}$ несократима

Получим, что все делители числа $a+b$ отмы-
ты от делителей a и $b \Rightarrow$ делители
от $a \cdot b$

Но $9ab \equiv m \Rightarrow m$ не более 9, т.к. иначе
 $ab \not\equiv m$, а по $9ab \equiv m \Rightarrow 9 \equiv m \Rightarrow m \equiv 9$ либо
9, либо 3.

Пример для деления на 9.

$$a=5 \quad b=4$$

$$\frac{5+4}{25-140+16} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11} \text{ - можно сократить на 9.}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.

Дано:

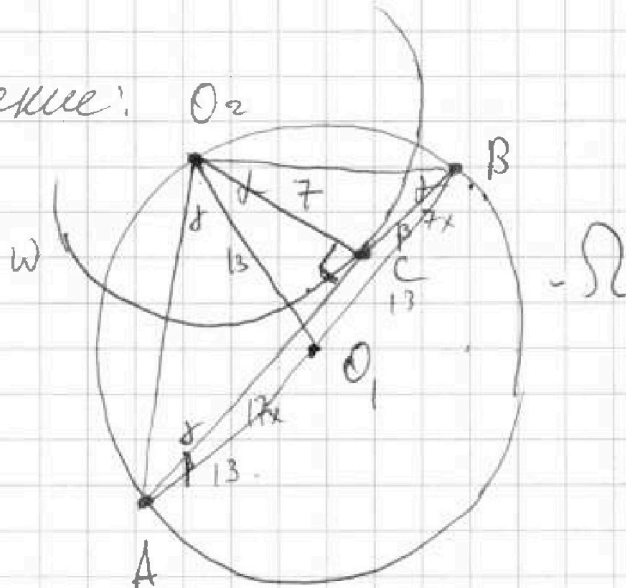
$$\frac{AC_2}{CB} = \frac{17}{7}$$

$$r = 7$$

$$R = 13$$

AB-?

Решение:



Пусть O_1 и O_2 - центры окр-ей Ω и ω соответственно.
Велико. $O_2C \perp AB$, т.к. AB - касательная к ω .

т.к. $A, O_1, B \in \Omega$, то $\triangle O_2O_1B \cong \triangle O_2O_1A \cong \triangle AOB$
равнобедренные, т.к. $O_2O_1 = O_1B = O_1A = R = 13$.

т.к. $O_1B = O_1A$ - это $\triangle AOB$ - равнобедрен $\Rightarrow \angle BOA = \angle O_1BA = \beta$

т.к. $O_1O_2 = O_1A = R = 13$, то $\triangle O_1O_2A$ равнобедрен $\Rightarrow \angle O_1O_2A = \angle O_2AO_1 = \alpha$.

т.к. $O_1O_2 = O_1B = R = 13$, то $\triangle O_1O_2B$ равнобедрен $\Rightarrow \angle O_1BO_2 = \angle O_1O_2B = \alpha$

т.к. $O_2C \perp AB$, то $\triangle O_2CB$ и $\triangle O_2CA$ прямоугольные \Rightarrow
из $\triangle O_2CB \angle O_2BC = \angle O_2BO_1 - \angle ABO_1 = \alpha - \beta$.

$$O_2B^2 = O_2C^2 + CB^2 = 49 + 49x^2 \Rightarrow O_2B = 7\sqrt{x^2 + 1}$$

по Т. Пифагора
аналогично $O_2A = \sqrt{7^2 + 17^2 x^2}$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{O_2C}{O_2B} = \frac{7}{7\sqrt{x^2 + 1}} \text{ из } \triangle O_2CB \quad \frac{7}{O_2B} \text{ из } \triangle O_2CB$$

по Т. синусов из $\triangle AOB \quad \frac{O_2A}{\sin(\alpha - \beta)} = 2R = 26 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \frac{O_2A}{26}$$

Подставим $\frac{O_2A}{26} = \frac{O_2C}{O_2B} \Rightarrow 7O_2A = 26O_2C \Rightarrow 49O_2A^2 = 26^2 O_2C^2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$49 O_2 A^2 = 26^2 A_2 B^2$$

$$7^2 \cdot (7^2 + 17^2 x^2) = 26^2 (7^2 + 7^2 x^2)$$

$$7^4 + 17^2 \cdot 7^2 x^2 = 26^2 \cdot 7^2 + 26^2 \cdot 7^2 x^2 \quad | : 7^2$$

$$7^2 + 17^2 x^2 = 26^2 + 26^2 x^2$$

$$x^2 (26^2 - 17^2) = 7^2 - 26^2$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{7}{O_2 B}$$

$$7 \cdot 26 = O_2 A \cdot O_2 B$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{O_2 A}{26} \Rightarrow$$

$$7 \cdot 7 \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{7^2+17^2 x^2} = 7 \cdot 26 \quad | : 7$$

$$\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{7^2+17^2 x^2} = 26 \quad | \wedge_2$$

$$(1+x^2)(7^2+17^2 x^2) = 26^2$$

$$7^2 + x^2(17^2+7^2) + 17^2 x^4 = 26^2$$

$$t = x^2$$

$$17^2 t^2 + (17^2+7^2)t - 26^2 + 7^2 = 0!$$

$$D = (17^2+7^2)^2 + 4 \cdot (26^2+7^2) \cdot 17^2$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0. \quad \text{Один из корней}$$

$$t_1 = 1$$

t_2 по Ф.Т. Виета

$$t_1 + t_2 = -\frac{338}{289}$$

$$1 + t_2 = -\frac{338}{289} \Rightarrow t_2 = -\left(\frac{338}{289} + 1\right)$$

$t = x^2 \Rightarrow t_2$ не подходит, т.к. $t_2 < 0$.

$t_1 = x^2 \Rightarrow x = \pm 1$, но x -длина, оставившаяся
Только $x = 1$, иначе сумма не 24.

$$AB = AC + BC = 17x + 7x = 24x = 24.$$

Ответ: \textcircled{B} $AB = 24$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

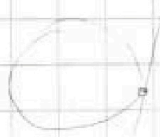


$$y^2 = x^2 - 1 - x^2$$

$$y = -ax + 8b$$

$$y^2 = a^2x^2 - 16abx + 64b^2$$

$$y^2 = (a^2 + 1)x^2 - 16abx$$



$$4b^2 - 12b + 8 \geq 0$$

$$\begin{aligned} &(-ax - 12 + 8b)^2 \\ &(-ax + (8b - 12))^2 = \end{aligned}$$

$$D = 144 - 16 \cdot 8 = 144 - 128 = 16$$

$$b_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a} = \frac{-8 \pm 4}{8}$$

$$\begin{aligned} &= a^2x^2 - 2ax(8b - 12) + (8b - 12)^2 \\ &= a^2x^2 - 16abx + 24ax + 64b^2 - \\ &= 192b + 144 \end{aligned}$$

$$b_1 = 2 \quad b_2 = -1$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 24 \\ + 96 \\ + 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 192 \overline{) 4} \\ 16 \overline{) 48} \\ 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 32 \\ + 48 \\ 72 \\ \hline 768 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 192 \overline{) 16} \\ 18 \overline{) 12} \\ 32 \end{array}$$

$$12^2 + 12 \cdot 20 \cdot 7$$

$$12(12 + 140)$$

$$12 \cdot 152$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

0 31

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 24 = 12 \quad x_1 = \frac{6 + \sqrt{12}}{6} \quad x_2 = \frac{6 - \sqrt{12}}{6}$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{6 - \sqrt{12}}{6}\right] \cup \left[\frac{6 + \sqrt{12}}{6}; +\infty\right)$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$\Delta = 3x^2 + 3x + 1 = 0, \quad D = 9 - 12 = -3 \Rightarrow \text{нет корней.}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = (1 - 9x) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (1 - 9x)^2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 - 9x = (1 - 9x)^2 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1) \quad x \neq \frac{1}{9}$$

$$1 = 1 - 9x + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x, \Rightarrow x \geq 0.$$

$$4(12x^2 + 12x + 4) = 81x^2$$

$$65x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 144 + 16 \cdot 69 = 1248$$

$$x_1 = \frac{-12 \pm \sqrt{1248}}{2 \cdot 65} = -\frac{1}{2} + 52 = 51,5$$

$$x_2 = \frac{-12 - \sqrt{1248}}{2 \cdot 65} = -\frac{1}{2} - 52 = -53,5$$

x_2 не подходит, т.к. $x \geq 0$

$$x_1 = 51,5$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x = \frac{1}{9}$$

Подставим и проверим.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{27} + \frac{4}{3}} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{37}{27}} - \sqrt{\frac{37}{27}} = 0. \quad x = \frac{1}{9} - \text{корень.}$$

лишние корни

Возведем в первый раз в квадрат,

предположим, что правая часть ≥ 0 .

как видим, или этот корень или этот ток.

Проверим: $x = 51,5$.

$$\sqrt{3 \cdot 51,5^2 - 6 \cdot 51,5 + 2} - \sqrt{3 \cdot 51,5^2 + 3 \cdot 51,5 + 1} = 1 - 51,5 \cdot 9$$

< 0 .

$$1 - 51,5 \cdot 9 + \sqrt{3 \cdot 51,5^2 + 3 \cdot 51,5 + 1} \geq 0$$

$$1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x - 1 \quad \text{для проверки}$$

$x = 51,5$.

Ответ: $x = \frac{1}{9}, x = 51,5$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

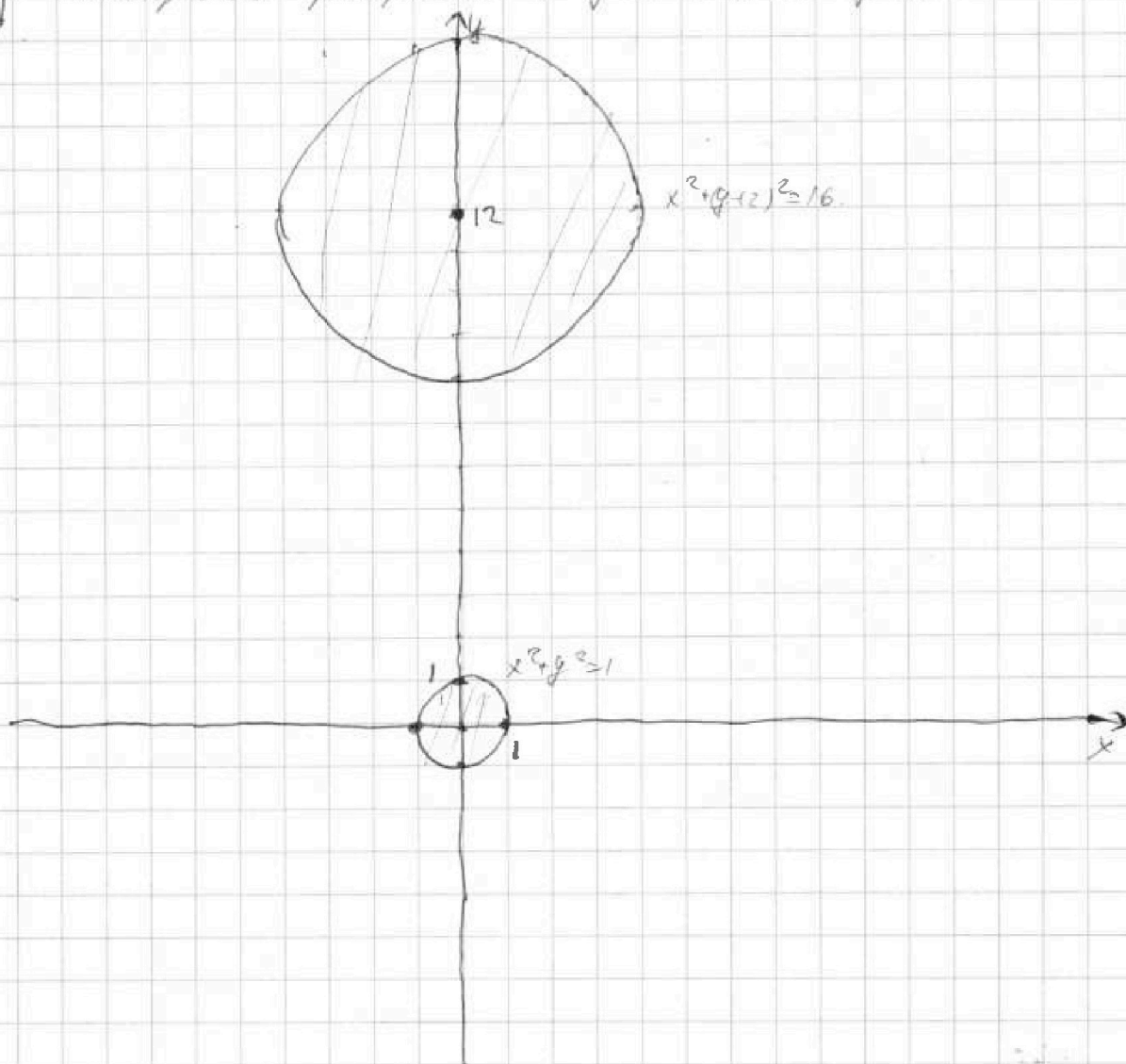


$$\begin{cases} ax+by-8c=0 \Rightarrow y = -ax+8c \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \Rightarrow 1) \text{ либо } \begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \geq 0 \end{cases}$$
$$2) \text{ либо } \begin{cases} x^2+(y-12)^2-16 \leq 0 \\ x^2+y^2-1 \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим оба случая; предельно
построить эллипсы $x^2+y^2-1=0$ и $x^2+(y-12)^2-16=0$.

1)



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ур-е окр-во $x^2+y^2 \leq 1$ говорит о том, что нам подходят все точки внутри окр-та $x^2+y^2=1$ и на границе. Аналогично с ур-ем $x^2+(y+12)^2=16$.

Получается, в условии 1) прямая $y=-ax+8b$ должна либо пересекать окр-т $x^2+y^2=1$ и либо касаться, либо не пересекать окр-т $x^2+(y+12)^2=16$.

Получается, что тогда в ур-е система имеет 2 решения, прямая $y=-ax+8b$ должна касаться как окр-та $x^2+y^2=1$, так и окр-та $x^2+(y+12)^2=16$. Т.к. если она будет их пересекать хотя бы одну из них, то уже будет бесконечное множество решений системы.

Это значит, что у системы

$$1) \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=-ax+8b \end{cases} \text{ одно решение}$$

$$2) \begin{cases} x^2+(y+12)^2=16 \\ y=-ax+8b \end{cases} \text{ - также одно решение.}$$

Решим систему 1.

$$\begin{cases} y^2=1-x^2 \\ y=-ax+8b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-ax+8b)^2=1-x^2 \\ a^2x^2-16abx+64b^2=1-x^2 \\ a^2(x^2+1)-16abx+64b^2-1=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow \\ y^2=(-ax+8b)^2 \quad D=256a^2b^2-4a^2(64b^2-1)=0 \\ \text{подставим} \quad D=256a^2b^2-256a^2b^2+4=0$$

$$a^2x^2+64b^2-16abx+x^2-1=0 \quad 1=0. \text{ удовлетворили}$$

$$(a^2+1)x^2-16abx+64b^2-1=0. \text{ одно решение} - D=0.$$

$$D=256a^2b^2-4(a^2+1)(64b^2-1) \quad \text{относительно } x.$$

$$D=256a^2b^2-4(64a^2b^2-a^2+64b^2-1)$$

$$D=4a^2-256b^2+4=0. \quad 4a^2=256b^2-4 \\ a^2=64b^2-1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Получаем, что чтобы система имела одно решение $a^2 = 64b^2 + 1$.

Помогим в случае 2).

$$(y-12)^2 \begin{cases} x^2 + (y-12)^2 = 16 \\ y = -ax + 8b \end{cases}$$

$$x^2 + (-ax - 12 + 8b)^2 = 16$$

$$x^2 + a^2x^2 - 2ax(8b - 12) + (8b - 12)^2 = 16$$

$$x^2 + a^2x^2$$

$$x^2(a^2 + 1) - 16abx + 24ax + 64b^2 - 192b + 144 = 16$$

$$(a^2 + 1)x^2 + x(24a - 16ab) + 64b^2 - 192b + 128 = 0$$

решение одно $\Rightarrow D = 0$

$$D = (24a - 16ab)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1)(64b^2 - 192b + 128) = 0$$

$$D = 576a^2 + 256a^2b^2 - 768a^2b - 4(64a^2b^2 - 192a^2b + 128a^2 + 64b^2 - 192b + 128) = 0$$

$$D = 576a^2 + 256a^2b^2 - 768a^2b - 256a^2b^2 + 768a^2b - 512a^2 - 256b^2 + 768b - 512 = 0$$

$$64a^2 - 256b^2 + 768b - 512 = 0 \quad | : 64$$

$$a^2 - 4b^2 + 12b - 8 = 0 \quad \text{решим относительно } a$$

$$-4b^2 + 12b + a^2 - 8 = 0$$

$$D = 144 + 4(4b^2 - 8) = 144 + 16b^2 - 32 = 16(b^2 + 1)$$

$$b = \frac{-12 \pm \sqrt{16(b^2 + 1)}}{-8} \quad a = 4b^2 - 12b + 8$$

III. к. Как нужно касание двух окружностей, то при фикс. a и b также должны быть положительными и теми и теми. В первом случае:

$$(1) \begin{cases} a^2 = 64b^2 + 1 \\ \Rightarrow 60b^2 + 12b - 7 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} a^2 = 4b^2 - 12b + 8 \end{cases}$$

$$D = 144 + 240 \cdot 7$$
$$b_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12 \cdot 152}}{120} = \frac{-12 \pm \sqrt{12 \cdot 152}}{120}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$D = 64a^2 - 256b^2 + 768b - 512 = 0.$$

$$a^2 - 4b^2 + 12b - 8 = 0$$

$a^2 = 4b^2 - 12b + 8$ - чтобы было касание с верхней окр-ю.

$$\begin{cases} (1) a^2 = 4b^2 - 12b + 8 \\ (2) a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases} \text{ - для нижней окр-ти.}$$

$$(1)-(2): 60b^2 + 12b - 9 = 0.$$

$$D = 144 + 240 - 9 = 144 + 12 \cdot 12 = 15.$$

$$b_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144(1+15)}}{120}$$

$$b_1 = \frac{-12 + 12\sqrt{16}}{120} = \frac{-120 + -12 + 48}{120} = \frac{36}{120} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

$$b_2 = \frac{-12 - 48}{120} = -\frac{1}{2}$$

$$a^2 \geq 0 \Rightarrow 4b^2 - 12b + 8 \geq 0$$

$$64b^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow |b| \geq \frac{1}{8}$$

$$4b^2 - 12b + 8 \geq 0$$

$$D = 144 - 128 = 16$$

$$b_4 = \frac{12+4}{8} = 2$$

$$b_3 = \frac{12-4}{8} = 1$$

$\Rightarrow b \notin (1; 2)$ - подходит все b , кроме $b \in (1; 2)$, т.к. коэффициенты при $b^2 > 0$.

т.к. это так, то корни b_1 не подходит, т.к.

оба корня b_1 и b_2 как видно подходят найдем в них значения a^2

$$a^2 = 64b^2 - 1 = 64b_1^2 - 1 = \frac{64 \cdot 9}{25} - 1 = \frac{16 \cdot 9 - 25}{25}$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$a^2 = 64b_2^2 - 1 = 64 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 15 \Rightarrow a = \pm \sqrt{15}$$

$$\text{Ответ: } a \in \pm \frac{\sqrt{119}}{5}, a = \pm \sqrt{15}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = (1 - 9x)^2$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 3x(x + 1) + 1$$

$$3x(x - 2) + 2$$

$$(3x(x + 1) + 1)(3x(x - 2) + 2)$$

$$\underbrace{(3x(x + 1) + 1)}_a (\underbrace{3x(x + 1) + 2 - 3x})$$

$$(a + 1)(a - 3x + 2)$$

$$a^2 + a - 3ax + 2a - 3x + 2$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = \boxed{1 - 9x}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = c \Rightarrow a$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{a + b} - \sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a + b} + \sqrt{a} - 2\sqrt{a(a + b)} = b^2$$

$$\sqrt{a + b} + \sqrt{a} - 2\sqrt{a(a + b)} = b^2$$

$$2a + b - 2\sqrt{a(a + b)} = b^2$$

$$\begin{array}{r} 5 + 3 \\ 25 - 7 \cdot 15 + 9 \\ 36 - 70 - 35 \end{array}$$

$$5 \quad 3$$

$$\begin{array}{r} 5 + 4 \\ 25 + 16 - 7 \cdot 20 \\ 41 - 140 - 41 = \\ = 99. \end{array}$$

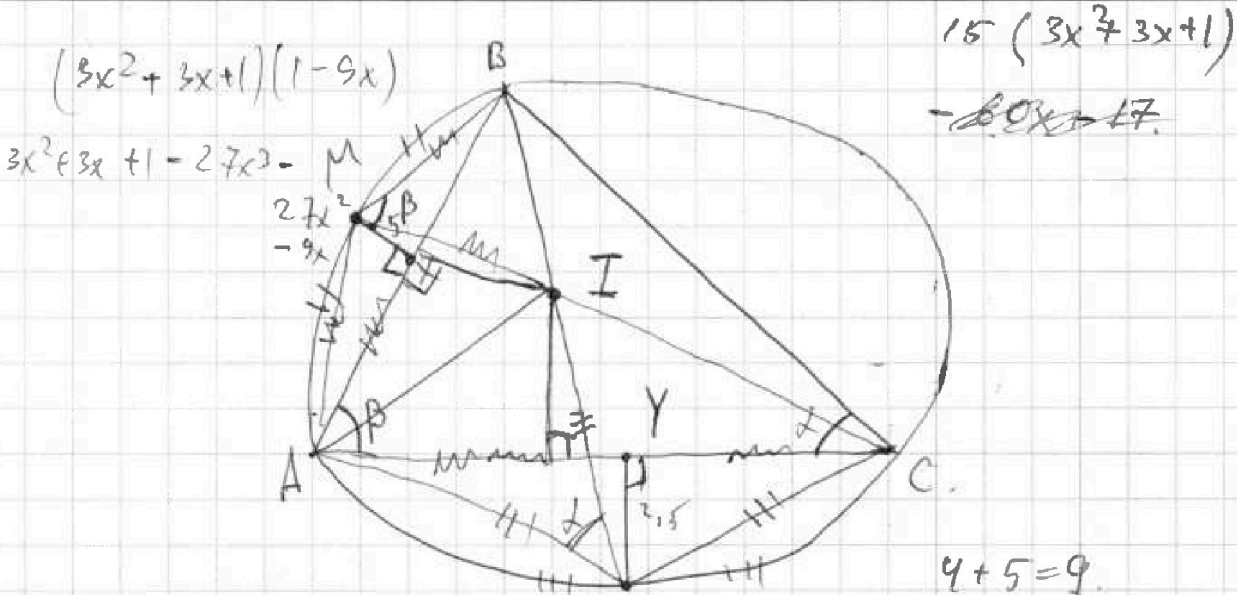
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



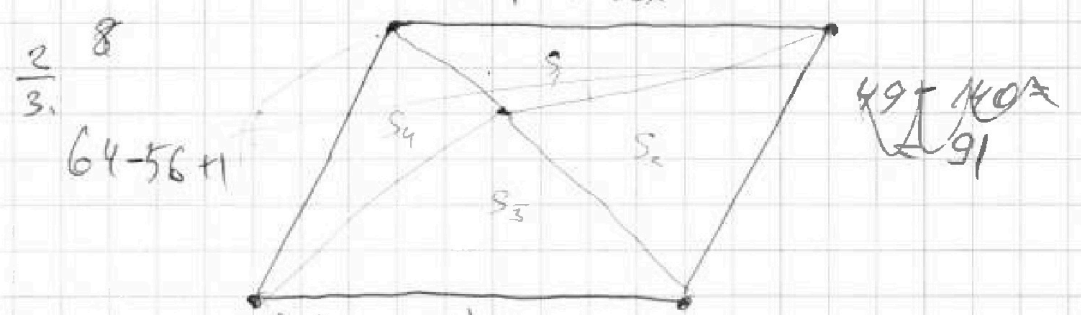
$$AN^2 = 2.5^2 + AY^2$$

$$AM^2 = 5^2 + AX^2$$

$$4x^2 - 4x + 1 + x^2 - 2x + 1 = 16 + 25 = 49 - 28 \cdot 5$$

$$4x^2 - 8x + 4 = 49 - 140x$$

$$4x^2 - 8x + 4 - x^2 + 2x - 2 = 49 - 140x$$



$$a + b = m$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = m^2$$

$$3(x^2 - 2x + 1) - 1 = 3(x-1)^2 - 1$$

$$3(x^2 - 2x + 1) - 1 = 3(x-1)^2 - 1$$

$$\frac{1}{2} (3(x-1)^2 - 1) + 1 - 9x = m$$

$$1 - 14 + 4 = 49 \quad \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 2\sqrt{(3x^2 + 3x + 1)(3x^2 + 3x + 1 - 9x)}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4. $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$\sqrt{3(x^2 - 2x + 1) - 1} - \sqrt{3(x^2 + x + 1) - 1} = 1 - 9x$ $y^2 = 1 - x^2$

$\sqrt{a - 9x + 1} - \sqrt{a} = 1 - 9x$

$a - 9x + 1 - 9a$

$3x^2 - 6x + 2 = 4x^2 - 4x + 1 + x^2 - 2x + 1$

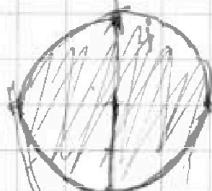
$3x^2 + 3x + 1 = 4x^2 + 4x + 1 - x^2 - x$
 $(2x + 1)^2 = x(x + 1)$

№6.

$ax + y - 8b = 0$

$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$

$x^2 + y^2 \leq 1$
 $x^2 + y^2 = 1$



y



$x^2 + y^2 = 1 = ax$

$x^2 + y^2 - 1 = 0$

$y^2 = 1 - x^2$

$y = ax + 8b$

ax^2

$16 \cdot 9 =$

$= 90 + 9 \cdot 6 =$

$= 144 - 250 =$

-106

x

либо $x^2 + y^2 = 1 \leq 0$

$x^2 + (y - 12)^2 \leq 16$

$x^2 + y^2 \leq 1$

внутри окр-ти.

$y = -ax + 8b$ $\forall a, b = 0$

(2)

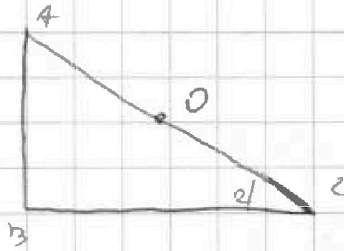
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

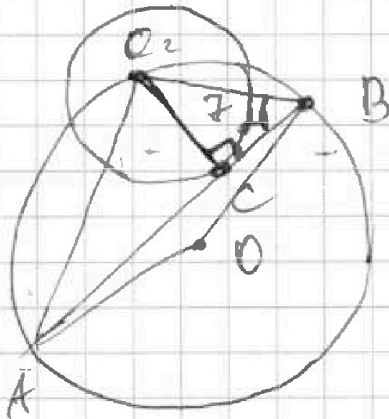
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~AB = AC = 2R?~~
~~Sind~~



$Sind = \frac{O_2B \cdot 7}{7 \cdot O_2B}$

~~Sind~~

$\frac{O_2A}{Sind} = 26$

$\frac{O_2B}{7} = \frac{O_2A}{Sind} = 26$
 $\sqrt{49} =$

$t_1 + t_2 = \frac{17^2 \cdot 7^2}{17^2} = 49$
 $t_1 \cdot t_2 = \frac{7^2 \cdot 26^2}{17^2}$

$\sqrt{(x^2+1)(7^2+17x^2)} =$

$\sqrt{7^2x^2 + 17^2x^4 + 7^2 + 17x^2}$

$\sqrt{7^2 + 17^2x^2 + 17^2} = 26$

$7^2 = 49$

$17^2 = 289$

$26^2 = 676$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 170 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ + 520 \\ \hline 676 \end{array}$$

$49x^2 + 289x^4 + 49 + 289x^2 = 676$

$289x^4 + 338x^2 + 49 = 676$

$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$

$289t^2 + 338t - 627 = 0$

$t = 1$

$289 + 338 = 627$
 $= 589 + 38$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6x^2 - 3x + 3$$

$$3(2x^2 - x + 1) - 2\sqrt{\quad} = 1 - 9x$$

$$a(1 - 9x) + a^2$$
$$a^2 + a(1 - 9x)$$

$$a(1 - 9x + a)$$

$$a^2 + a - 9ax$$

$$a^2 + a - 9(3x^2 + 3x + 1)x$$

$$3x^2 + 3x + 1 - 9x = (1 - 9x)^2 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$1 - 9x = (1 - 9x)^2 + 2\sqrt{\quad}$$

$$1 - 9x = (1 - 9x)^2 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 - 9x = t$$

$$t = t^2 + 2t\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$t + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$9x =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

ИФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 4

240 · 5 = 1200 16 - 69

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

OD3:

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x_1 = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}, \quad x_2 = \frac{6 - \sqrt{12}}{6} \Rightarrow x \in \left(\frac{6 - \sqrt{12}}{6}, \frac{6 + \sqrt{12}}{6} \right)$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$D = 9 - 12 = -3. \text{ Всегда } > 0.$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x}$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad \text{возведем в квадрат}$$

$$3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 + 3x + 1)(3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x)} = (1 - 9x)^2$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 2(3x^2 + 3x + 1)\sqrt{(3x^2 + 3x + 1)(1 - 9x)} = 1 + 81x^2 - 18x$$

$$2(3x^2 + 3x + 1)\sqrt{(3x^2 + 3x + 1)(1 - 9x)} = 75x^2 - 15x - 2$$

$$\sqrt{3(x^2 - 1)^2 - 1} - \sqrt{3(x-1)^2 - 9x} = 1 - 9x$$

$$3(x-1)^2 - 1 + 3(x-1)^2 - 9x - 2\sqrt{(3(x-1)^2 - 1)(3(x-1)^2 - 9x)} = (1 - 9x)^2$$

$$3x^2 - 6x + 3 - 1 + 3x^2 - 6x + 1 - 9x - 2\sqrt{(x-1)^2 - 1}(3(x-1)^2 - 9x) = 81x^2 + 1 - 18x$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 2\sqrt{(3(x-1)^2 - 1)(3(x-1)^2 - 9x)} = 81x^2 + 1$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 18 \\ \hline 414 \\ + 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) ab \geq 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$ac \geq 2^{23} \cdot 7^{18}$$

$$bc \geq 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc \geq 7^{34} \cdot 2^{27} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow abc \geq 7^{34} \cdot 2^{28}$$

$$\text{НОЗ}(a, b) = 1$$

2)

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\frac{(a+b)}{(a+b)^2-9ab}$$

4)

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$\sqrt{3x^2-3x+1} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$3x^2-6x+1 = (\sqrt{3x^2+3x+1})^2$$

$$\frac{(a+b)}{(a+b+3ab)(a+b-3ab)}$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\frac{(a+b)}{(a-b)^2-5ab}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$(3x^2-6x+2) - (3x^2+3x+1) =$$

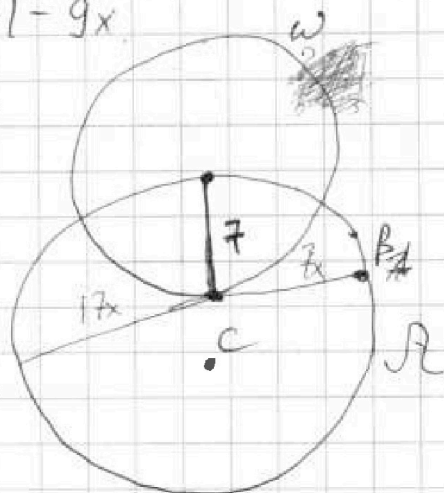
$$\sqrt{3x^2+3x+1} = a$$

$$3x^2-6x+2 = a-9x+1$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$a+b+a-2\sqrt{a^2+ab} = b^2$$

A



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = 2$

$a = 2^{10}$
 $b = 2^8$
 $c = 2^{12}$
 $b = 2^5$
 $a = 2^{10}$
 $c = 2^{13}$
 $7 \cdot 8$

$x + y + z + 2 + x = 7^6$

$a = 2^8$
 $b = 2^7$
 $c = 2^{10}$

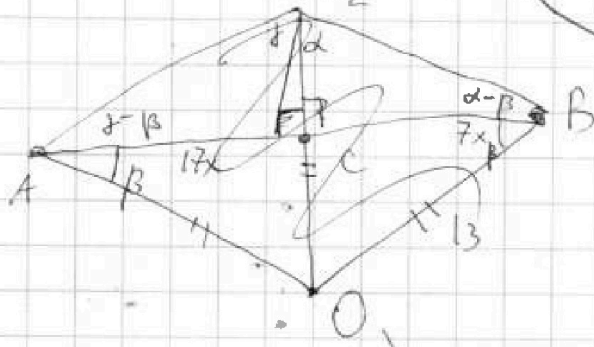
$c = 2$

34

$a = 2^{15}$
 $c =$

$x + y = 15$
 $y + z = 17$
 $x + z = 23$

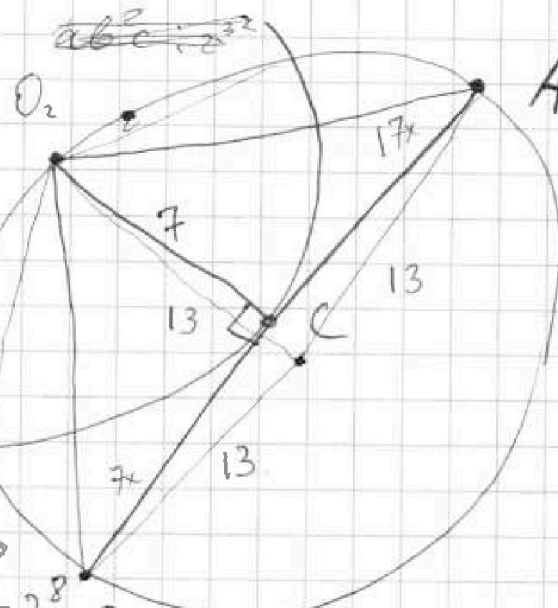
O_2



$\frac{7}{\sin(\alpha - \beta)} = O_2 A$

$\frac{7}{\sin(\beta - \alpha)} = O_2 B$

$\frac{O_2 B}{\sin(\beta - \alpha)} = 26$



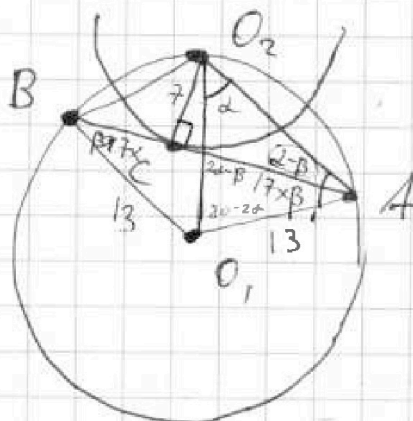
$O_2 B = \sqrt{49 + 10x^2}$

$O_2 A = 7\sqrt{1+x^2}$
 $O_2 C = \sqrt{7+17x^2}$

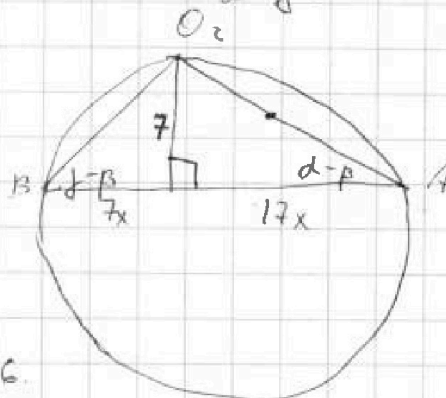
$\frac{BO_2}{\sin(\alpha - \beta)} = 26$

$\frac{O_2 A}{\sin(\beta - \alpha)} = 26$

$\frac{7}{4} \cdot O_2 A = O_2 C$



$2\alpha + \beta = 90^\circ$
 $2\beta + \alpha = 90^\circ$
 $\alpha = \beta$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$b_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 + 152}}{120}$$
$$b_1 = \frac{-12 - \sqrt{12^2 + 152}}{120}$$
$$b_2 = \frac{-12 + \sqrt{12^2 + 152}}{120}$$

Условие ур-е (2) имело смысл, то

$$4b^2 - 12b + 8 \geq 0$$

$$D = 144 - 128 = 16$$

$$b_{x1} = \frac{12-4}{8} = 1$$
$$b_{x2} = \frac{12+4}{8} = 2$$

\Rightarrow подходит $b \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.
Т.к. координаты $b^2 > 0$

Положа среди b_1 и b_2 те

Оценим b_1 и b_2 .

$$b_1 = \frac{-12 - \sqrt{12^2 + 152}}{120} < \frac{-12 - \sqrt{12^2 + 12^2}}{120} = \frac{-24\sqrt{2}}{120} < -1$$

$b_1 < 2 \Rightarrow$ он не подходит.

$$b_2 = \frac{-12 + \sqrt{12^2 + 152}}{120} > \frac{-12 + \sqrt{12^2 + 12^2}}{120} = \frac{-12 + 12\sqrt{2}}{120}$$

$$12 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 9$$

$$12 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3$$

$$12 \cdot 12 \cdot 15$$

$$4b^2 - 12b + 8 = 0$$

$$D = 144 - 16$$

$$b_1 = \frac{12-4}{8} = 1$$

$$b_2 = 2$$