



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1)

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc: 2^{19} \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$(a^2 b) \cdot (bc) \cdot (ac): 2^{9+19+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+11+30}$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

Т.к. квадрат натурального числа может

иметь только чётную максимальную степень любого
простого делителя, значит $(abc)^2: 3^{41} \Rightarrow (abc)^2: 3^{42}$

$$(abc)^2: 5^{53} \Rightarrow (abc)^2: 5^{54}$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{54}$$

$$abc: 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

~~минимальное~~

минимальное натуральное abc , которое делится
на $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{24}$, это и есть $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$, но по условию

$a \cdot c: 5^{30} \Rightarrow$ и $abc: 5^{30} \Rightarrow$ минимальное $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$
(т.к. степени 2^{21} и 3^{21} не
могут уменьшиться).

$$a = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^{15}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^{10}, \text{ не трудно убедиться, что}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \quad ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{25} : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{25}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{26} : 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{26}$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

Ответ: минимальное $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

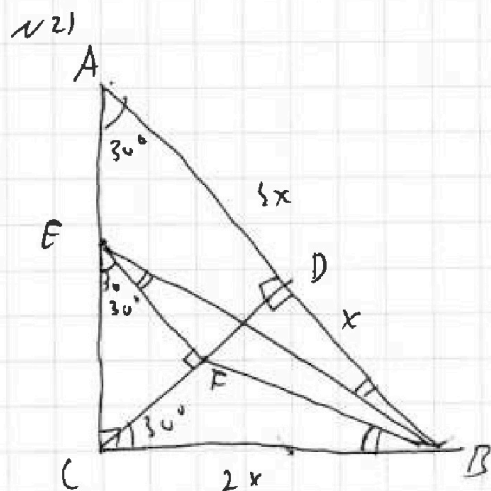
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\angle C = 90^\circ$

CD - высота

$EF \parallel AB$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$$

$$AD = 3 DB$$

Пусть $DB = x$, тогда
 $AD = 3x$

CD - высота из прямого
угла, тогда $CD = \sqrt{AD \cdot DB} =$
 $= \sqrt{3} \cdot x$

$\triangle CDB$, $\angle D = 90^\circ$, тогда по Т. Пифагора:

$$CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$$

$DB = x = \frac{1}{2} CB \Rightarrow$ прямоугольный
 $\triangle CDB$ $\angle CDB = 30^\circ$ (угл напротив катета,
равного половине гипотенузы).

$$\angle ACD = 90 - \angle DCB = 60^\circ$$

$$\angle CAD = 90 - \angle ACD = 30^\circ$$

В т.к. $EF \parallel AB$ и AE - секущая, то
 $\angle BAE = \angle FEC = 30^\circ$ (соответственные
углы).

т.к. CB - касательная, а FB - хорда окружности, то
 $\angle FBC = \frac{1}{2} \angle FCB$ (угл между касательной и хордой в
центре касания равен половине дуги, которую хорда
субтитует) и $\angle BEF = \frac{1}{2} \angle FCB$ (вписанный угол), тогда
 $\angle BEF = \angle FBC$

Т.к. $EF \parallel AB$ и EB - секущая $\Rightarrow \angle ABE = \angle BEF$
(накрест лежащие углы).

$\triangle ABE \sim \triangle BFC$ (т.к. $\angle EAB = \angle FCB = 30^\circ$
и $\angle ABE = \angle FBC$), тогда задано

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

можно записать соотношение сторон

$$\frac{AE}{FC} = \frac{AB}{CB} = \frac{4x}{2x} = 2$$

$$\frac{AE}{FC} = 2 \Rightarrow AE = 2FC$$

~~В треугольнике~~ Т.к. $EF \parallel AB$ и CD — медиана, то
 $\angle EFC = \angle ADC = 90^\circ$

$$\text{В } \triangle EFC \quad \angle FEC = 30^\circ \text{ и } \angle EFC = 90^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ сторона напротив $\angle FEC$ равна половине гипотенузы

$$\Rightarrow FC = \frac{1}{2} EC$$

$$EC = 2FC$$

В $\triangle ABC$ применим т. Пифагора:

$$AC^2 + CB^2 = AB^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2\sqrt{3}x,$$

$$\text{но } AC = AE + EC = 2FC + 2FC = 2\sqrt{3}x$$

$$4FC = 2\sqrt{3}x$$

$$FC = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$\triangle ABC \sim \triangle EFC$ (т.к. $\angle ACB = \angle EFC = 90^\circ$ и $\angle CAB = \angle CEF = 30^\circ$)

$$\text{при этом коэф. подобия } k = \frac{CB}{CF} = \frac{2x}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{но } \frac{S_{ABC}}{S_{EFC}} = k^2 = \frac{16 \cdot 3}{9} = \frac{16}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{S_{ABC}}{S_{EFC}} = \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порука QR-кода недопустима!

115)

$$5 \arcsin(\cos(x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

можно считать, что $\sin$ от обеих частей уравнения

$$\sin(5 \arcsin(\cos(x))) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$

$$\cos(x) - \cos\left(\frac{2\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 0$$

$$-2 \sin\left(\frac{x + \frac{2\pi}{2} - \frac{x}{2}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x - \frac{2\pi}{2} + \frac{x}{2}}{2}\right) = 0$$

↓

$$\sin\left(\frac{2x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\frac{2x}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi k$$

$$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

полученные x - корни уравнения

$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, тогда возьмем $\arcsin$ от
обеих частей

$$\arcsin(\cos(x)) = \arcsin\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

где $d =$

Если $\forall x + \frac{\pi}{2}, d \in [0; 2\pi]$
приняв значение π I или IV четверти
тригонометрической окружности,

~~то~~ $\arcsin(\sin d) = d$, и полученные корни
будут удовлетворять условию задачи

Если d принадлежит π или III четверти, то

$\arcsin(\sin d) = \pi - d$, и если $\pi - d \neq d$, то ~~то~~ такие
корни не являются решениями ($\pi - d = d$ рассматриваем
отдельно)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

так. $\arcsin$ - возвращает угол от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$,

то $\frac{\pi}{2} \geq \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} \geq -\frac{\pi}{2}$, заметим, что все такие углы
в 1 или 4 четверти, тогда
они будут удовлетворять исходной системе
приведем список корней.

$$\text{при } x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}\pi k$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}k \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = -1; 0; 1$$

$$\text{исходно } \frac{\pi}{2} \geq \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$$

$$x = 2\pi; -\frac{\pi}{3}; -3\pi$$

$$\text{при } x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k:$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}\pi k}{5} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k \leq \frac{\pi}{2} \quad | -\frac{\pi}{6}; : \pi$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \leq \frac{k}{3} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$-\frac{4}{6} \leq \frac{k}{3} \leq \frac{2}{6} \quad | \cdot 3$$

$$-2 \leq k \leq 1 \quad ; k = -2; -1; 0; 1$$

$$x = -3\pi; -\frac{4}{3}\pi; \frac{\pi}{3}; 2\pi$$

$$\text{если } \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} = \pi - \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}, \text{ то}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2}\pi$$

$$x = 2\pi, \text{ что уже есть в ответах}$$

$$\text{общий ответ: } x = -3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4)

$$\begin{cases} ax + 2y - 3z = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

все значения a , для которых найдётся
 z такое, что равенство выполняется.

решение уравнения $(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$

Эквивалентные равенства совокупности

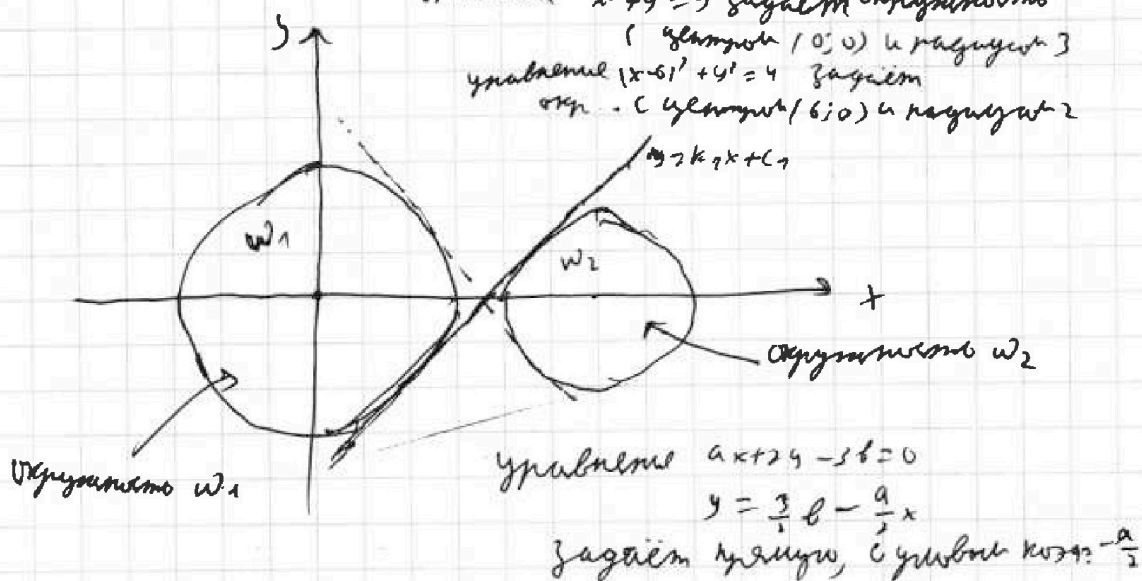
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \end{cases}$$

перепишем исходную систему (учитывая это)

$$\begin{cases} ax + 2y - 3z \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + 2y - 3z \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \end{cases}$$

решим систему графически, введя x, y, z .

уравнение $x^2 + y^2 = 9$ задаёт окружность
(центр $(0; 0)$ и радиус 3)
уравнение $(x-6)^2 + y^2 = 4$ задаёт
окр. с центром $(6; 0)$ и радиусом 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печата QR-кода недопустима!

по условию b - произвольное, значит прямая

$$y = \frac{3}{2}b + \frac{a}{2}x \text{ имеет } \text{произвольное} \text{ значение } b \text{ в вертикальном направлении.}$$

Заметим, что график симметричен относительно Ox , тогда будем рассуждать только $a < 0$, в силу симметрии ~~если касаться в точке a , то он касаться в точке $-a$~~ , если касаться ~~в точке a~~ в точке a , то он касаться в точке $-a$.

при $a < 0$, прямая $y = \frac{3}{2}b - \frac{a}{2}x$ возрастает.

$$\text{Значит } k = -\frac{a}{2}, k > 0$$

$$\text{Значит } l = \frac{3}{2}b,$$

$$y = kx + l$$

~~рассуждая, также, что $y = kx + l$ касается~~

окружности w_1 (см. рисунок), тогда, если эта же прямая пересекает вторую окружность, то при изменении l на очень малое значение ε ; $\varepsilon \rightarrow 0$; $\varepsilon > 0$ касавшаяся прямая будет пересекать сразу обе окружности и будет иметь 4 решения

если ~~касается~~ прямая $y = kx + l$ касавшаяся w_1 касается w_2 , то при изменении l , она пересечет ~~обе~~ обе окружности с точки из окружностей, тогда решений не будет если

рассуждая. прямую $y = kx + l_1$ - общую касательную двум окружностям (см. рисунок); при $k > k_1$ будет увеличение l от $+\infty$ до $-\infty$, вследствие прямой коснется w_1 второй раз раньше, чем w_2 первый, но тогда у системы не более 2-х решений; || при $k < k_1$, при увеличении l от $+\infty$ до $-\infty$, до 1-го касания 0 решений, в точке касания - 1 решение, до второго касания 2 решения, в точке второго касания тоже 2 решения; а далее уже не имеют более 2-х решений. Прямая больше не коснется $w_1 \Rightarrow$ не подходит

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

при $k=0 \Rightarrow a \geq 0$; тогда при $a < 0$ и $b \geq 0$ из первого уравнения $y \geq 0$, что
при $0 < k < k_1$ ~~не~~ касание в точке C_0 будет ^{дотыканием}
и решение, т.к. прямая будет уже не касаться, а пересекать
окр. окружности $\Rightarrow k < k_1$ не подходит
найдём k_1 и c_1
если прямая $y = kx + c$ касается окружности

$$x^2 + y^2 = 9, \text{ то } y \text{ уравнено}$$

$$x^2 + (kx + c)^2 = 9 \text{ дискриминант} = 0$$

$$x^2(k^2 + 1) + x \cdot 2ck + c^2 - 9 = 0$$

$$D = 4c^2k^2 - 4c^2k^2 - c^2 \cdot 4 + 36k^2 + 36 = 0$$

$$c^2 \Rightarrow \downarrow$$

$$4c^2 - 4 = 36k^2 + 36$$

$$c^2 = 9k^2 + 9$$

$$c = \pm 3\sqrt{k^2 + 1}$$

Получим второе касание - произведём при
знамен c , поэтому $c_1 = -3\sqrt{k^2 + 1}$

если прямая $y = kx + c$ касается окр.

$$(x-6)^2 + y^2 = 4, \text{ то } y \text{ уравнено}$$

$$(x-6)^2 + (kx+c)^2 = 4 \text{ дискриминант равен 0.}$$

$$x^2 - 12x + 36 + k^2x^2 + 2kxc + c^2 - 4 = 0$$

$$x^2(k^2 + 1) + x(2kc - 12) + c^2 - 4 = 0$$

$$D = 4k^2c^2 - 48kc + 144 - 4k^2c^2 + 16k^2 - 4c^2 + 16 = 0$$

$$16k^2 + 16 = 48kc + 4c^2 \quad | : 4$$

$$c^2 + 12kc = 4k^2 + 40, \text{ чтобы получить систему}$$

касательную, подставим $c = -3\sqrt{k^2 + 1}$

$$9k^2 + 0 + 36k\sqrt{k^2 + 1} = 4k^2 + 40$$

$$5k^2 - 31 = 36k\sqrt{k^2 + 1} \quad | \text{ возведём обе части в}$$

$$25k^4 - 310k^2 + 961 = 1296k^2 + 1298k^2 \quad \text{квадрат,}$$

$$1296k^2 + 1606k^2 - 961 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$k^2 = \frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}$$

отмечается
для дискриминанта
слева, т.к. $k^2 \geq 0$

т.к. $k > 0 \Rightarrow$

$$k_1 = \sqrt{\frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}}$$

так как $k < k_1$ система имеет 4 решения.
Следовательно $-\frac{a}{2} < k_1 \Rightarrow a > -2k_1$

аналогично при $k < 0$ при $k > k_1$ система
имеет 4 решения, из чего
следует $a = 0$
 $-2k_1 \leq a \leq 2k_1 \Rightarrow$

Ответ: $[-2k_1; 2k_1]$

$$-2 \sqrt{\frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}} \leq a \leq 2 \sqrt{\frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



и 31

$$\arcsin(\cos(x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos(x)) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

Случай $\arcsin(a) = b$

некоторые $a = b$, но и

$$\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = 2\pi k \quad \frac{\pi}{2} - 2$$

$$\sin(\arcsin(\cos(x))) = \sin(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10})$$

$$\cos(x) = \sin(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10})$$

$$\cos(x) - \sin(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}) = 0$$

$$\cos(x) - \cos(\frac{4\pi}{10} - \frac{x}{5}) = 0$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\sin(\frac{x+\pi}{2}) \cdot \sin(\frac{x-\pi}{2}) =$$

$$= (\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2}) (\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2})$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} - \frac{\cos 2\beta + 1}{2}$$

$$-2 \sin(\frac{6x}{10} + \frac{\pi}{10}) \cdot \sin(\frac{4x}{10} - \frac{\pi}{10}) = 0$$

$$\frac{6x}{10} + \frac{\pi}{10} = \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{20}{4} \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{10}{6} \pi k$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

определить из корней x , не принадлежащих I и IV четвертям

где $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} k$, очевидно каждое 4 значение k четверти где x будет повторяться, тогда рассмотрим только первые 4 k .

$$k=0 \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

$$k=1$$

$$k=2$$

$$k=3$$

$\arcsin x$ - возвращает угол от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, тогда

$\arcsin(1)$ возвращает угол от $-\frac{5\pi}{2}$ до $\frac{5\pi}{2}$, тогда

$\arcsin(1) - \frac{\pi}{2}$ возвращает угол от

тогда произведем отбор корней x , таких, что

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} \leq \frac{\pi}{2} \text{ и } \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} \text{ в I или IV четверти}$$

$$\text{или } x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} k:$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} k \leq \frac{\pi}{2}$$

или от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ всегда в I или IV четверти, так как это будет быть повторяется!
 $k = -1, 0, 1.$

$$\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{4}{3}\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{8}{6}\pi + \frac{3}{6}\pi = -\frac{5}{6}\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

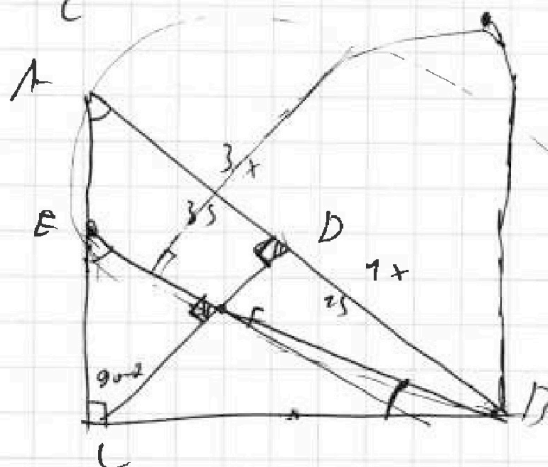
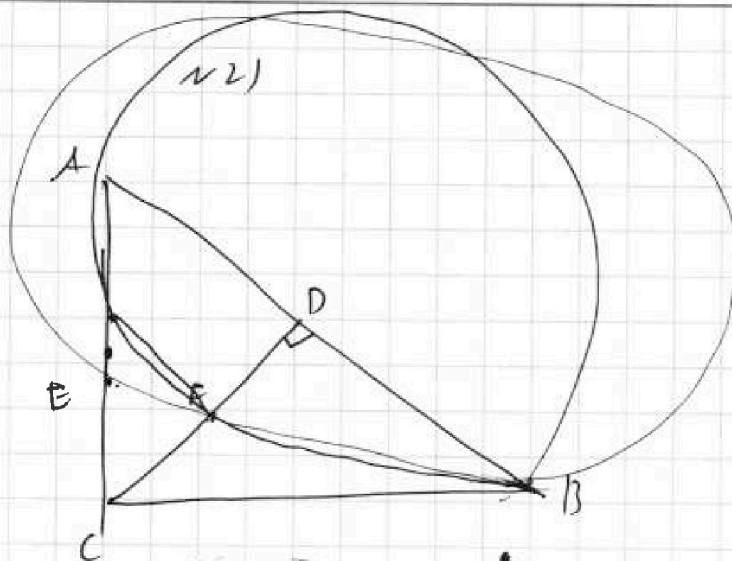
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



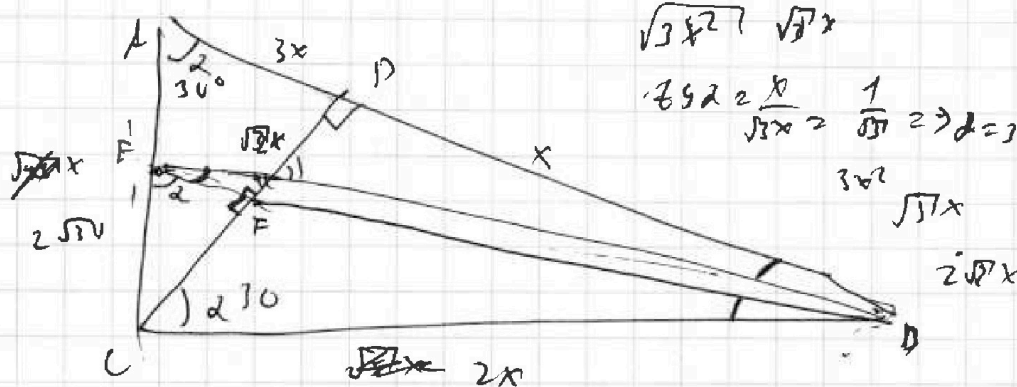
МФТИ



$$AD:DB = \frac{3}{1}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CBF}}$$

$$\int ABC = 4$$



$$\sqrt{3x^2} \quad \sqrt{x^2}$$

$$692 \pm \frac{10}{\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}} \Rightarrow d = 10^2$$

$$3\sqrt{2} \quad \sqrt{17}x \quad 2\sqrt{17}x$$

$$\frac{E_D}{E_R} = 2 \Rightarrow E_D = 2 F_D$$

$$\frac{AE}{CF} = 2 \quad AG = 2CF$$

$$CE = \frac{1}{2} FC$$

$$AC = 2\sqrt{3}x = AF + EC$$

$$2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 12 \in \mathbb{C}$$

$$CF = \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6) 36

$$36 + 60 + 1200$$

$$6^4 k^2 > 41k^2 + 9$$

$$-35k^2 - 2 \cdot 41 \cdot 9k^2 = 87 > 0$$

1296

$$6^4 k^2 - 41k^2 - 2 \cdot 41 \cdot 9k^2 - 87 > 0$$

$$x^2 + k^2 + 2kx + c^2 = 9$$

$$x^2(k^2 + 1) + x \cdot 2k + c^2 - 9 = 0$$

$$y = kx + c$$

$$D = 4k^2 c^2 - 4$$

$$x^2 + (kx + c)^2 = 9$$

$$4k^2 c^2 + 36k^2 + 4c^2 + 36 = 0$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3^3 = 3$$

$$6^4 k^2 + 6^4 k - 41^2 k^2 - 2 \cdot 41 \cdot 9k - 87 > 0$$

$$-382k^2$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ 31 \\ 31 \\ 51 \\ \hline 981 \end{array}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3^3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \log_3^3 - 8$$

$$36k^2 + 36 = 4c^2$$

$$ax + 29 = 38$$

$$8^2 \cdot (k^2 + 1) = 4c^2$$

$$9(k^2 + 1) = c^2$$

$$x^2 + 9k^2 = 9$$

$$k_1 > k$$

$$t^4 + \frac{4}{t} + 8 = 0$$

$$\frac{4}{t}$$

$$6^4 k^4 + 6^4 k^2 > 41^2 k^4$$

$$4 > 32$$

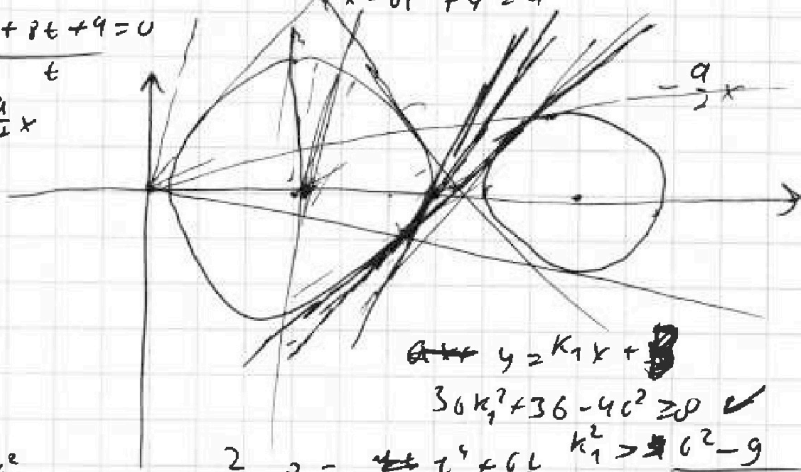
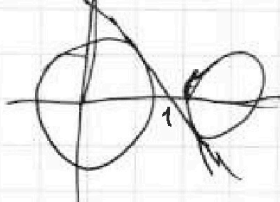
$$t^4 + \frac{4}{t} + 8 \geq 0$$

$$4 > 36k \sqrt{k^2 + 1} + 41k^2 + 9$$

$$36k \cdot \sqrt{k^2 + 1} > 41k^2 + 9 \quad t^5 + 8t + 4 = 0$$

$$y = \frac{3}{5}x - \frac{9}{2}x$$

$$x^2 - 12x + 36 + k^2 x^2 + 2kx + c^2 = 4$$



$$y = k_1 x + b$$

$$36k_1^2 + 36 - 4c^2 \geq 0$$

$$\frac{2}{t} - 8 = 4 + \frac{4}{t} + \frac{6}{t} \quad k_1^2 > \frac{c^2 - 9}{9}$$

$$t^4 + \frac{4}{t} + 8 \geq 0$$

$$k_1 > \frac{c^2}{9} - 1$$

$$k_1 = \frac{c^2}{9}$$

$$c^2 = 9k^2 + 9$$

$$c = 3\sqrt{k^2 + 1}$$

$$k^4 + \frac{4}{k} - \frac{11}{k} + 8 \geq 0$$

$$k^4 - \frac{7}{k} + 8 = 0$$

$$2k^5 + 20k - 19 \geq 0$$

$$k^4 + \frac{2}{k} = \frac{11}{2k} - 8$$

$$x^2 - 12x + 36 + k^2 x^2 + 2kx + c^2 = 4$$

$$x^2(1 + k^2) + x(2k - 12) + 32 = 0$$

$$t^5 + 8t + 4 = 0$$

$$D = 4k^2 c^2 - 48k + 144 - 128 - 12 \cdot 36k^2 - 4c^2 - 4c^2$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{2}{t} - 8$$

$$16 > 48k + 128k^2 + 4c^2$$

$$4 > 12k(1 + 32k^2) + c^2 \quad t^4 + \frac{4}{t} - 18 = 0$$

$$32k^2 + 16k + c^2 - 4 \geq 0$$

$$t^5 + 8t + 4 \geq 0$$

$$D = 144c^2 - 128c^2 + 512$$

$$16c^2 + 512 = 16(c^2 + 32)$$

$$k = \frac{-12c \pm 4\sqrt{c^2 + 32}}{64}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

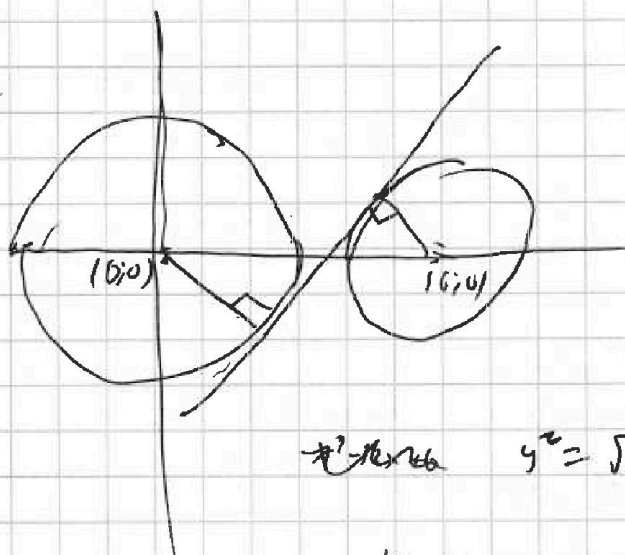
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4 = kx + 3\sqrt{x+1}$$



$$y^2 = 4 - (x-6)^2$$

$$k =$$