



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1)

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc: 2^{19} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$$

$$(a^2 b) \cdot (bc) \cdot (ac): 2^{9+19+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+13+20}$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

Т.к. квадрат натурального числа может

иметь только четную максимальную степень любого
простого делителя, значит $(abc)^2: 3^{42} \Rightarrow (abc)^2: 3^{42}$

$$(abc)^2: 5^{53} \Rightarrow (abc)^2: 5^{54}$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{54}$$

$$abc: 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

~~минимум~~

минимальное натуральное abc , которое делится
на $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{24}$, это и есть $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$, но по условию
 $a \cdot c: 5^{20} \Rightarrow$ и $abc: 5^{20} \Rightarrow$ минимальное $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$
(т.к. степени 2^{21} и 3^{21} не
могут уменьшиться).

$$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{15}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0, \text{ не трудно убедиться, что } ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{15} = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}, \text{ } bc = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{17} \cdot 5^{30} = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$$

Ответ: минимальное $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

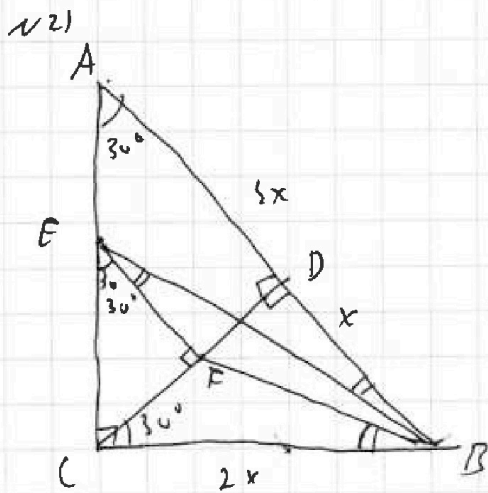
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\angle C = 90^\circ$

CD - высота

$EF \parallel AB$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$$

$$AD = 3 DB$$

пусть $DB = x$, тогда

$$AD = 3x$$

CD - высота из прямого угла, тогда $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3x \cdot x} = \sqrt{3} \cdot x$

$\triangle CDB$, $\angle D = 90^\circ$, тогда по Т. Пифагора:

$$CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$$

~~тогда~~ $DB = x = \frac{1}{2} CB \Rightarrow$ прямоугольный

$\triangle CDB$ $\angle DCB = 30^\circ$ (угл напротив катета, равно половине гипотенузы).

$$\angle ACD = 90 - \angle DCB = 60^\circ$$

$$\angle CAD = 90 - \angle ACD = 30^\circ$$

т.к. $EF \parallel AB$ и AE - секущая, то $\angle BAE = \angle FEC = 30^\circ$ (соответственные углы).

т.к. CB - касательная, а FB - хорда окружности, то

$\angle FBC = \frac{1}{2} \angle FCB$ (угл между касательной и хордой в точке касания равен половине дуги, которую хорда стягивает) и $\angle FEB = \frac{1}{2} \angle FCB$ (вписанный угол), тогда

$$\angle BEF = \angle FBC$$

т.к. $EF \parallel AB$ и EB - секущая $\Rightarrow \angle ABE = \angle BEF$ (накрест лежащие углы).

$$\triangle ABE \sim \triangle BFC \text{ (т.к. } \angle EAB = \angle DCB = 30^\circ$$

и $\angle ABE = \angle FBC$), тогда задано

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

можно заметить соответствия сторон

$$\frac{AE}{FC} = \frac{AB}{CB} = \frac{4x}{2x} = 2$$

$$\frac{AE}{FC} = 2 \Rightarrow AE = 2FC$$

~~В~~ $\triangle EFC$ т.к. $EF \parallel AB$ и CD — секущая, то
 $\angle EFC = \angle ADC = 90^\circ$

$$\text{В } \triangle EFC \quad \angle FEC = 30^\circ \text{ и } \angle EFC = 90^\circ \Rightarrow$$

\Rightarrow сторона напротив $\angle FEC$ равна половине гипотенузы

$$\Rightarrow FC = \frac{1}{2} EC$$

$$EC = 2FC$$

В $\triangle ABC$ применим т. Пифагора:

$$AC^2 + CB^2 = AB^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2\sqrt{3}x,$$

$$\text{но } AC = AE + EC = 2FC + 2FC = 2\sqrt{3}x$$

$$4FC = 2\sqrt{3}x$$

$$FC = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$\triangle ABC \sim \triangle EFC$ (т.к. $\angle ACB = \angle EFC = 90^\circ$ и $\angle CAB = \angle CEF = 30^\circ$)

$$\text{при чём коэф. подобия } k = \frac{CB}{CF} = \frac{2x}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{но } \frac{S_{ABC}}{S_{EFC}} = k^2 = \frac{16 \cdot 3}{9} = \frac{16}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{S_{ABC}}{S_{EFC}} = \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



115)

$$5 \arcsin(\cos(x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

можно сделать так, возьмем \sin от обеих частей уравнения

$$\sin(5 \arcsin(\cos(x))) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$

$$\cos(x) - \cos\left(\frac{2\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 0$$

$$-2 \sin\left|\frac{x + \frac{2\pi}{2} - \frac{x}{2}}{2}\right| \cdot \sin\left|\frac{x - \frac{2\pi}{2} + \frac{x}{2}}{2}\right| = 0$$

$$\sin\left(\frac{2x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\frac{2x}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi k$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3} \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

полученные x - корни уравнения

$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, тогда возьмем \arcsin от
обеих частей

$$\arcsin(\cos(x)) = \arcsin\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

где $d =$

Если $x + \frac{\pi}{2}$ принадлежит I или IV четвертям
принимается значение d , и тогда получаем уравнение

$\arcsin(\sin d) = d$, и тогда получаем уравнение

Если d принадлежит II или III четвертям, то

$\arcsin(\sin d) = \pi - d$, и если $\pi - d \neq d$, то $\pi - d = d$ (рассмотрим
отдельно)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

так как \arcsin - возвращает угол от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$,

то $\frac{\pi}{2} \geq \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} \geq -\frac{\pi}{2}$, заметим, что все такие углы
в 1 или 4 четвертях, тогда
они будут удовлетворять исходной системе
принципиально любых корней.

$$\text{при } x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}k \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = -1; 0; 1$$

~~$k = -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}$~~
 $x = 2\pi; -\frac{\pi}{2}; -3\pi$

$$\text{при } x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k:$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}\pi k}{5} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k \leq \frac{\pi}{2} \quad | -\frac{\pi}{6}; : \pi$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \leq \frac{k}{3} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$-\frac{4}{6} \leq \frac{k}{3} \leq \frac{2}{6} \quad | \cdot 3$$

$$-2 \leq k \leq 2 \quad ; k = -2; -1; 0; 1$$

$$x = -3\pi; -\frac{4}{3}\pi; \frac{\pi}{3}; 2\pi$$

$$\text{если } \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} = \pi - \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}, \text{ то}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2}\pi$$

$$x = 2\pi, \text{ что уже есть в ответах}$$

$$\text{общий ответ: } x = -3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4)

$$\begin{cases} ax + 2y - 3z = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9) | (x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

все значения a , для которых найдётся
 x, z такое, что выполняются условия.

решение уравнения $(x^2 + y^2 - 9) | (x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$

Эквивалентные решения совокупности

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \end{cases}$$

перепишем исходную систему (учитывая это)

$$\begin{cases} ax + 2y - 3z \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + 2y - 3z \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

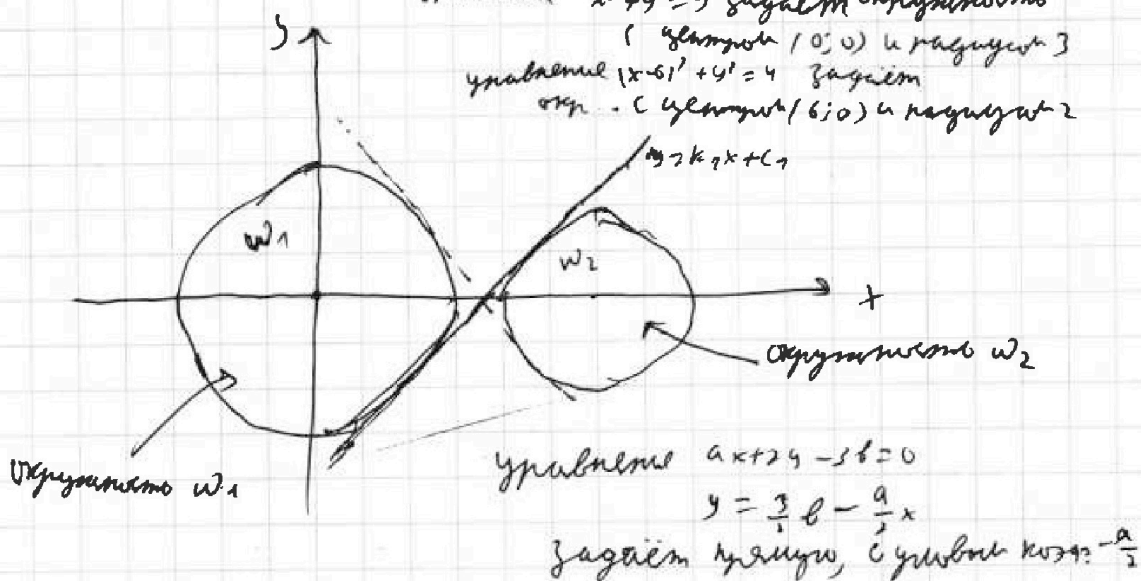
решим систему графически, введя x, y, z .

уравнение $x^2 + y^2 = 9$ задаёт окружность

(центр $(0, 0)$ и радиус 3)

уравнение $(x-6)^2 + y^2 = 4$ задаёт

окр. с центром $(6, 0)$ и радиусом 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

по условию b - произвольное, значит прямая

$$y = \frac{3}{2}b + \frac{a}{2}x \text{ имеет } \begin{matrix} \text{произвольное} \\ \text{значение} \end{matrix} \text{ в вертикальном} \\ \text{направлении.}$$

Заметим, что график симметричен относительно
 Ox , тогда будет рассматриваться только $a < 0$, в силу сим-
метрии ~~если $a > 0$, то он касается w_1 в точке $(0, \frac{3}{2}b)$~~
, если касается ~~в~~ w_2 в $y = a$, то он касается
в $y = -a$.

при $a < 0$, прямая $y = \frac{3}{2}b - \frac{a}{2}x$ возрастает.

$$\text{Значит } k = \frac{-a}{2}, k > 0$$

$$\text{Значит } l = \frac{3}{2}b,$$

$$y = kx + l$$

~~рассмотрим, какое c , что $y = kx + c$ касается~~

~~окружностям w_1 (см. рисунок), тогда, если
эта же прямая пересекает вторую окружность, то
при изменении c на очень малое значение ϵ ; $\epsilon \rightarrow 0$; $\epsilon > 0$
приближаясь к нулю будет пересекать сразу обе окружности
и будет иметь 2 решения~~

~~Если ~~же~~ касается прямая $y = kx + c$ касаясь w_1 касаясь
 w_2 , то при изменении c , она пересечет ~~какую-то~~ одну
из окружностей, тогда решений не будет
если~~

рассмотрим прямую $y = k_1x + c_1$ - общую касательную
двум окружностям (см. рисунок); при $k > k_1$ будет
увеличиваться c от $+\infty$ до $-\infty$, следовательно прямая коснется
 w_1 второй раз раньше, чем w_2 первый, но тогда
 y система не будет 2-х решений; || при $k < k_1$, при
увеличении c от $+\infty$ до $-\infty$, до 1-го касания 0 решений,
в точке касания - 1 решение, до второго касания 2 решения,
в точке второго касания тоже 2 решения; а далее уже не можем
быть собой двумя н.к. Прямая больше не коснется $w_1 \Rightarrow$
 \Rightarrow не подходит



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

при $k=0 \Rightarrow a \geq 0$; тогда при $a \geq 0$ и $b \geq 0$ из первого уравнения $y \geq 0$, что
 при $0 < k < k_1$, ~~тогда~~ касательная в точке C_1 будет ^{дальше} ~~дальше~~ ^{и кас.}
 и касательная, т.к. прямая будет уже не касаться, а пересекать
 окружность $\Rightarrow k < k_1$ невозможно
 найдем k_1 и c_1
 если прямая $y = kx + c$ касательна к окружности

$$x^2 + y^2 = 9, \text{ то } y \text{ уравнение}$$

$$x^2 + (kx + c)^2 = 9 \text{ дискриминант} = 0$$

$$x^2(k^2 + 1) + x \cdot 2kc + c^2 - 9 = 0$$

$$D = 4c^2k^2 - 4c^2k^2 - c^2 \cdot 4 + 36k^2 + 36 = 0$$

$$c^2 \Rightarrow \downarrow$$

$$4c^2 - 4 = 36k^2 + 36$$

$$c^2 = 9k^2 + 9$$

$$c = \pm 3\sqrt{k^2 + 1}$$

поэтому второе касание \rightarrow найдем k и c , поэтому $c_1 = -3\sqrt{k^2 + 1}$

если прямая $y = kx + c$ касательна к окр.

$$(x-6)^2 + y^2 = 4, \text{ то } y \text{ уравнение}$$

$$(x-6)^2 + (kx + c)^2 = 4 \text{ дискриминант равен } 0.$$

$$x^2 - 12x + 36 + k^2x^2 + 2kxc + c^2 - 4 = 0$$

$$x^2(k^2 + 1) + x(2kc - 12) + c^2 - 4 = 0$$

$$D = 4k^2c^2 - 48kc + 144 - 4k^2c^2 + 16k^2 - 4c^2 + 16 = 0$$

$$16k^2 + 16 = 48kc + 4c^2 \quad | : 4$$

$$c^2 + 12kc = 4k^2 + 40, \text{ чтобы получить окружность}$$

касательную, выставляем $c = -9\sqrt{k^2 + 1}$

$$9k^2 + 0 + 36k\sqrt{k^2 + 1} = 4k^2 + 40$$

$$5k^2 - 37 = 36k\sqrt{k^2 + 1} \quad | \text{ возведем обе части в}$$

$$25k^4 - 340k^2 + 961 = 1296k^4 + 1298k^2 \quad \text{квадрат}$$

$$-1271k^2 + 961 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$k^2 = \frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}$$

Отмечаем дискриминант не равен, т.к. $k^2 > 0$

т.к. $k > 0 \Rightarrow$

$$k_1 = \frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}$$

Для $k < k_1$ система имеет 4 решения.

Следовательно $-\frac{a}{2} < k_1 \Rightarrow a > -2k_1$

$a > -2k_1$

Аналогично для $k < 0$ для $k > k_1$ система имеет 4 решения, т.е.

$-2k_1 < a < 2k_1 \Rightarrow$

Ответ: $2k_1 < a < 2k_2$

$$-2 \frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241} < a < 2 \frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



и 31

$$\arcsin(\cos(x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos(x)) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{20}$$

Случай ~~$\arcsin(a) = b$~~

некорректное $a = b$, но и

$$\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} \leq 2\pi k + \frac{\pi}{2} - 2$$

$$\sin(\arcsin(\cos(x))) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{20}\right)$$

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{20}\right) = 0$$

$$\cos(x) - \cos\left(\frac{4\pi}{20} - \frac{x}{5}\right) = 0$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) =$$

$$= \left(\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{b}{2} \cos \frac{a}{2}\right) \left(\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} - \sin \frac{b}{2} \cos \frac{a}{2}\right)$$

$$\sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} - \sin^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$\sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} - \cos^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos^2 \frac{b}{2} - \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos 2b + 1}{2} - \frac{\cos 2a + 1}{2}$$

$$-2 \sin\left(\frac{6x}{20} + \frac{\pi}{20}\right) \cdot \sin\left(\frac{4x}{20} - \frac{\pi}{20}\right) = 0$$

$$\frac{6x}{20} + \frac{\pi}{20} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{10}{6} \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{20}{4} \pi k$$

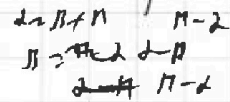
$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} = \pi - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{20} \quad x = 2\pi$$

$$2x + \pi = \pi \quad 2x = 0 \quad x = 0$$

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} = -\frac{x}{5} - \frac{\pi}{20} \quad \beta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2x}{5} = -\frac{\pi}{10} \quad \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\pi k, 2$$

$$\frac{2x}{5} = -\frac{\pi}{10} \quad x = -\frac{\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

~~определить из каких x , не принадлежащих промежутку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ принадлежат к четвертому или к третьему четвертям.~~

~~где $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k$, следовательно каждая x принадлежит к четвертому или к третьему четвертям, тогда рассмотрим только первое k .~~

~~$k=0 \quad x = -\frac{\pi}{2}$~~

~~$k=1$~~

~~$k=2$~~

~~$k=3$~~

$\arcsin x$ - возвращаем угол от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, тогда

~~$\arcsin(x)$ возвращаем угол от $-\frac{5\pi}{2}$ до $\frac{5\pi}{2}$, тогда~~

~~$\arcsin(x) - \frac{\pi}{2}$ возвращаем угол от~~

тогда произведем отбор корней x , таких, что

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} \leq \frac{\pi}{2}$ и $\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} \in I$ или IV четверти

или $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k$

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}k \leq \frac{\pi}{2}$

$k = -1, 0, 1$.

$\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$

$-\frac{4}{3}\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{8}{6}\pi + \frac{3}{6}\pi = -\frac{5}{6}\pi$

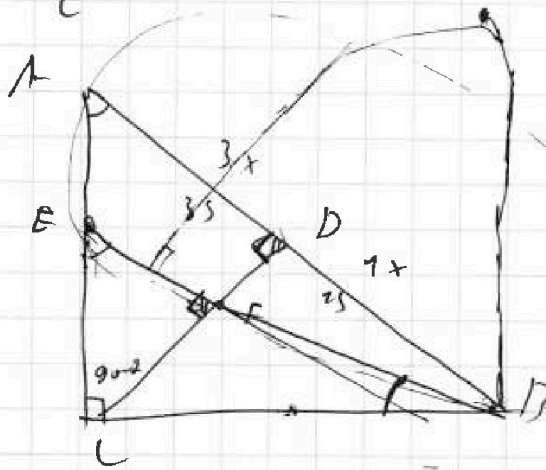
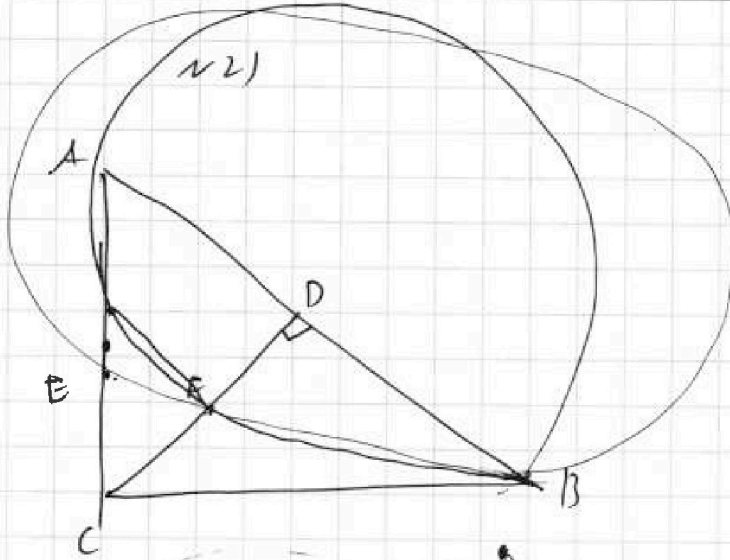
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

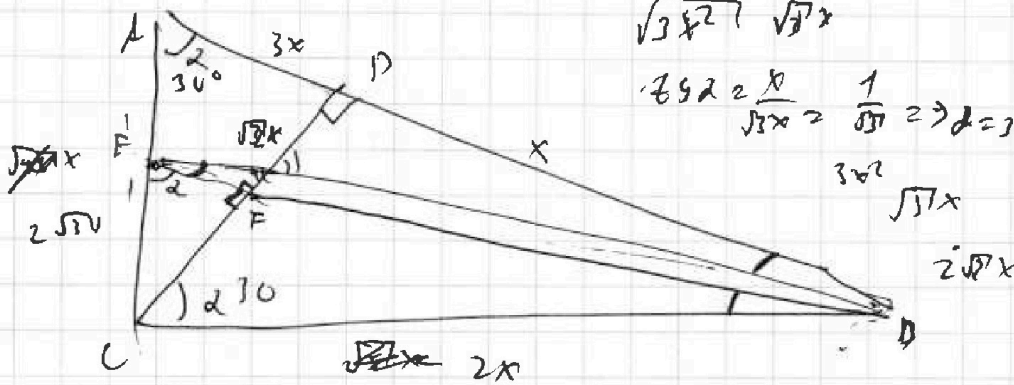
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AD = DE = \frac{3}{7}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CDF}}$$

$$S_{ABC} = 45$$



$$\sqrt{3}x^2 \sqrt{3}x$$

$$\sqrt{3}x^2 = \frac{1}{\sqrt{3}x} \Rightarrow d = 30^\circ$$

$$\frac{ED}{FB} = 2 \Rightarrow EB = 2FD$$

$$\frac{AE}{CF} = 2 \Rightarrow AE = 2CF$$

$$60 - 2\theta$$

$$CE = \frac{1}{2} AC$$

$$AC = 2\sqrt{3}x = AE + EC$$

$$2\sqrt{3}x = \frac{3}{2} EC$$

$$CF = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6) 36

$36 + 60 + 1200$

$6^4 k^2 > \dots$

$-35k^2 - 2 \cdot 4 \cdot 9k^2 = 87 > 0$

1296 -

$6^4 k^2 - 41k^2 - 2 \cdot 4 \cdot 9k^2 - 87 > 0$

$x^2 + k^2 + 2kx + c^2 = 9$

$\log_3^4 v + 6 \log_3^4 3 = 3$

$x^2(k^2+1) + x \cdot 2k + c^2 - 9 = 0$

$6^4 k^2 + 6^4 k - 41k^2 - 28.41k - 87 > 0$

$y = kx + c$

$D = 4k^2 c^2 - \dots$

$-382k^2$

$x^2 + (kx+c)^2 = 9$

31
31
51
981

$\log_3^4 x + 6 \log_3^4 3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \log_3^4 7 - 8$

$36k^2 + 36 = 4c^2$

$t^4 + \frac{4}{t} + 8 = 0$

$ax + 29 = 38$

$8^2 \cdot (k^2+1) = 4c^2$

$6^4 k^4 + 6^4 k^2 > 41k^4$

$\frac{4}{t}$

$x^2 + c^2 = 9$

$9(k^2+1) = c^2$

$k_1 > k$

$4 > 32k$

$t^4 + \frac{4}{t} + 8 > 0$

$x^2 - 12 + 36 + 4^2 = 4$

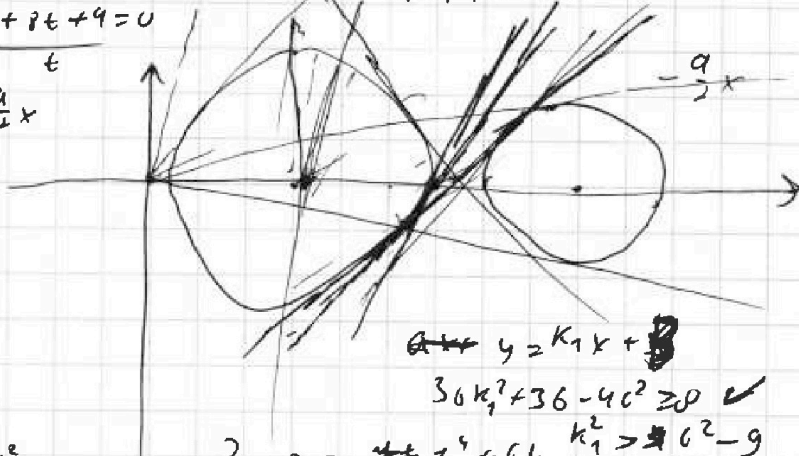
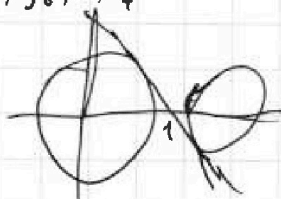
$4 > 36k \sqrt{k^2+1} + 41k^2 + 9$

$x - 6k^2 + 4^2 \geq 4$

$36k \cdot \sqrt{k^2+1} > 41k^2 + 9$

$y = \frac{3}{2}t - \frac{a}{2}x$

$x^2 - 12x + 36 + k^2 x^2 + \dots$



$x^2 - 12x + 36 + k^2 x^2 + 2kx + c^2 = 4$

$y = k_1 x + \dots$

$36k_1^2 + 36 - 4c^2 \geq 0$

$x^2(1+k^2) + x(2k-12) + 32 = 0$

$\frac{2}{t} - 8 = \dots$

$D = 4k^2 c^2 - 48kc + 144 - 128 - 128k^2 - 48c^2 - 4c^2$

$t^4 + \frac{4}{t} = \frac{2}{t} - 8$

$k_2 = \frac{c^2}{9}$

$16 > 48kc + 128k^2 + 4c^2$

$4 > 12k(c + 32k) + c^2$

$k^4 + \frac{4}{k} - \frac{11}{k} + 8 = 0$

$32k^2 + 16kc + c^2 - 4 = 0$

$D = 144c^2 - 128c^2 + 512$

$2k^5 + 20k - 19 = 0$

$16c^2 + 512 = 16(c^2 + 32)$

$k = \frac{-12c \pm \sqrt{c^2 + 32}}{64}$

$k^4 + \frac{2}{k} = \dots$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

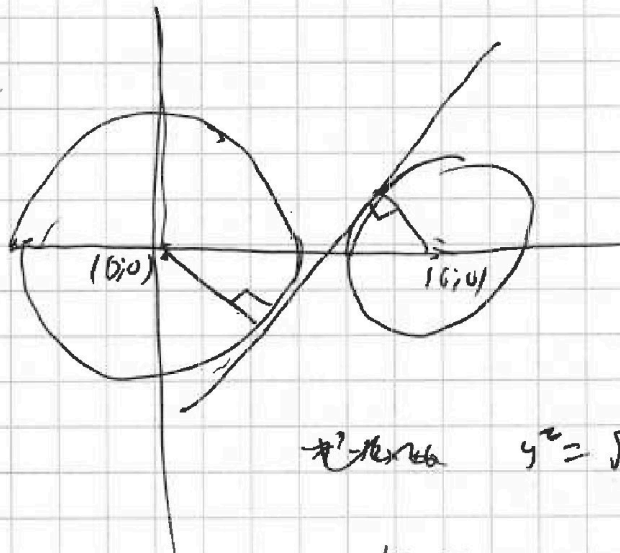
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = kx + 3\sqrt{b+1}$$



~~$x^2 + y^2 = b$~~ $y^2 = \sqrt{4 - (x - 6)^2}$

$$k =$$