



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| X |   |   |   |   |   |   |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1)

$$abc \in N$$
$$ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{70}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{50}$$

$$(a^2 b) / (bc) / (ac) : 2^{9+14+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{70} =$$
$$a^2 b^2 c^2 : 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

Т.к. квадрат натурального числа может

иметь только чётную минимальную степень каждого простого делителя, значит  $(abc)^2 : 3^{41} \Rightarrow (abc)^2 : 3^{42}$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{54}$$

$$abc : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{24}$$

$$(abc)^2 : 5^{53} \Rightarrow (abc)^2 : 5^{54}$$

~~нужно~~

минимальное натуральное  $abc$ , которое делится  
на  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{24}$ , но не на  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{25}$ , то мы убеждены  
 $a \cdot c : 5^{20} \Rightarrow ab \cdot c : 5^{20} \Rightarrow$  минимальное  $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$   
(т.к. степень  $2^{21}$  и  $3^{21}$  не  
делится на  $5^{20}$ ).

$$a = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^{15}$$

$b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0$ , не трудно убедиться, что

$$a \cdot b = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{15} : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{70}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15} : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$b \cdot c = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} : 2^{17} \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$a \cdot c = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{50}$$

Ответ: минимальное  $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

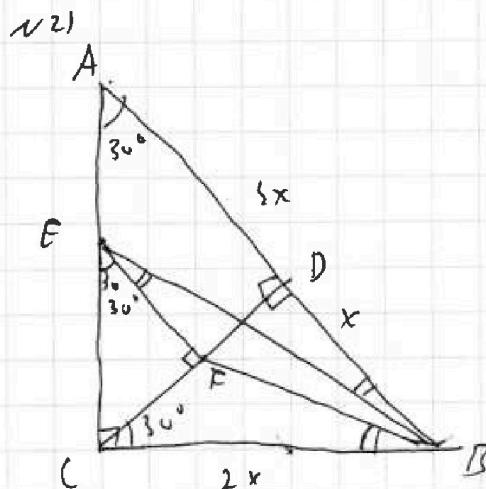
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\angle C = 30^\circ$

CD - высота

$EF \parallel AB$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$$

$$AD = 3DB \Rightarrow$$

пусть  $DB = x$ , тогда  
 $AD = 3x$

CD - высота из куда  
тогда, тогда  $CD = \sqrt{AD \cdot DB} =$   
 $= \sqrt{3} \cdot x$

Р $\Delta$  CDB,  $\angle D = 90^\circ$ , тогда по Т. Пифагора:

$$CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$$

~~$DB = x = \frac{1}{2} CB \Rightarrow$~~  Р $\Delta$  CDB из куда

$\angle CDB = \angle DCB = 30^\circ$  (зат касательная касательна, нельзя касательная касательной, половина половины)

$$\angle ACD = 90^\circ - \angle DCB = 60^\circ$$

$$\angle ADB = 90^\circ - \angle DCB = 30^\circ$$

и.к.  $EF \parallel AB$  и  $AE$  - сектанта, то  
 $\angle EAB = \angle FEC = 30^\circ$  (внешнемногогранник  
угол).

и.к.  $CB$  - касательная, а  $FB$  - касательная, то  
 $\angle FBC = \frac{1}{2} \angle FCB$  (зат касательной касательной и хорды в  
треугольнике налеи касательные дуги, которую касательная  
сектирует) и.к.  $\angle EFC = \frac{1}{2} \angle FBC$  (внешний угл), тогда  
 $\angle BEF = \angle FBC$

и.к.  $EF \parallel AB$  и  $E$  - сектанта  $\Rightarrow \angle ABE = \angle BEF$

и.к. сектирующая  
угол!

$\triangle ABE \sim \triangle BFC$  / и.к.  $\angle ABE = \angle BFC = 30^\circ$

и  $\angle ABE = \angle FBC$ , тогда закончен



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

тогда значение штанги строим

$$\frac{AE}{FC} = \frac{AB}{CB} = \frac{4x}{2x} = 2$$

$$\frac{AE}{FC} = 2 \Rightarrow AE = 2FC$$

~~База~~  $\angle EFC$  т.к.  $EF \parallel AB$  и  $CD$ -секущая, то  
 $\angle EFC = \angle ADC = 90^\circ$

В  $\triangle EFC$   $\angle FEC = 30^\circ$  и  $\angle EFC = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$  Синуска напротив  $\angle FEC$  равна половине гипотенузы

$$\Rightarrow FC = \frac{1}{2} EC$$

$$EC = 2FC \neq$$

В  $\triangle ABC$  применят Т. Пифагора:

$$AC^2 + CB^2 = AB^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2\sqrt{3}x,$$

$$\text{но } AC = AE + EC = 2FC + 2FC = 4FC = 4\sqrt{3}x$$

$$4FC = 2\sqrt{3}x$$

$$FC = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$\triangle ABC \sim \triangle EFC$  (н.к.  $\angle ACB = \angle EFC = 90^\circ$  и  $\angle CAB = \angle CEF = 30^\circ$ )

$$\text{причем коэф. подобия } k = \frac{CB}{CF} = \frac{2x}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{но } \frac{S_{ABC}}{S_{EFC}} = k^2 = \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\text{Однобр.: } \frac{S_{ABC}}{S_{EFC}} = \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3)

$$5 \arcsin(\cos(x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

нужно сделать 5, потому что  $\sin$  отсюда частей уравнения

$$\sin(\arcsin(\cos(x))) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x + \frac{\pi}{2})\right) = 0$$

$$\cos(x) - \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{x}{3}\right) = 0$$

$$-2 \sin\left(\frac{x + \frac{2\pi}{3} - \frac{x}{3}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x - \frac{2\pi}{3} + \frac{x}{3}}{2}\right) = 0$$



$$\sin\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \sin\left(\frac{3x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi k$$

$$\frac{3x}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \sum \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + \sum \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

полученные  $x$  - корни уравнения

$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ , тогда будем  $\arcsin$  от  $\sin$  отсюда частей

$$\arcsin(\cos(x)) = \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2}))$$

тогда  $d =$

$$\operatorname{atan} \frac{\sqrt{x + \frac{\pi}{2}}}{2} ; d \in [0; 2\pi]$$

получаем в I и III четверти  
получаем в IV и II четверти

~~или~~  $\arcsin(\sin d) = d$ , и получим что у нас  
должно учитываться четверть

если  $d$  принадлежит II или III четверти, то

$\arcsin(\sin d) = \pi - d$ , и если  $\pi - d \neq d$ , то ~~то~~ мы

здесь оказываемся в противоречии ( $\pi - d = d$  решением)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

task.  $\arcsin -\frac{1}{2}$  - возможные углы от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$ ,

mo  $\frac{\pi}{2} \geq \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} \geq -\frac{\pi}{2}$ , значит, что все такие углы  
в 5 раз отличны от  $\frac{\pi}{2}$ , тогда  
они будут удовлетворять исходной системе  
уравнений синусом косинусом.

$$\text{пред} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} n$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} k \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = -1; 0; 1$$

$$\cancel{x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}}$$

$$x = 2\pi j - \frac{\pi}{2}; j \in \mathbb{Z}$$

$$\text{пред } x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} nk:$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} nk}{5} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k \leq \frac{\pi}{2} \quad | - \frac{\pi}{6}; : \pi$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \leq \frac{k}{3} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$-\frac{4}{6} \leq \frac{k}{3} \leq \frac{2}{6} \quad | \cdot 3$$

$$-2 \leq k \leq 1 \quad ! k = -2; -1; 0; 1$$

$$x = -3\pi j - \frac{4}{3}\pi; \frac{\pi}{3} j 2\pi$$

$$\text{пред } x + \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}, \text{ mo}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{5} n$$

$$x = 2\pi j, \text{ что у нас есть в ответах}$$

$$\text{одинаковый ответ: } x = -3\pi j - \frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} j 2\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4)

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+4^2)-4(x^2+4^2)-12x+32=0 \end{cases}$$

Все знают  $a$ , где конкретно находится  
 $x$ , так как это равенство имеет.

решение уравнения  $(x^2+4^2)-4(x^2+4^2)-12x+32=0$

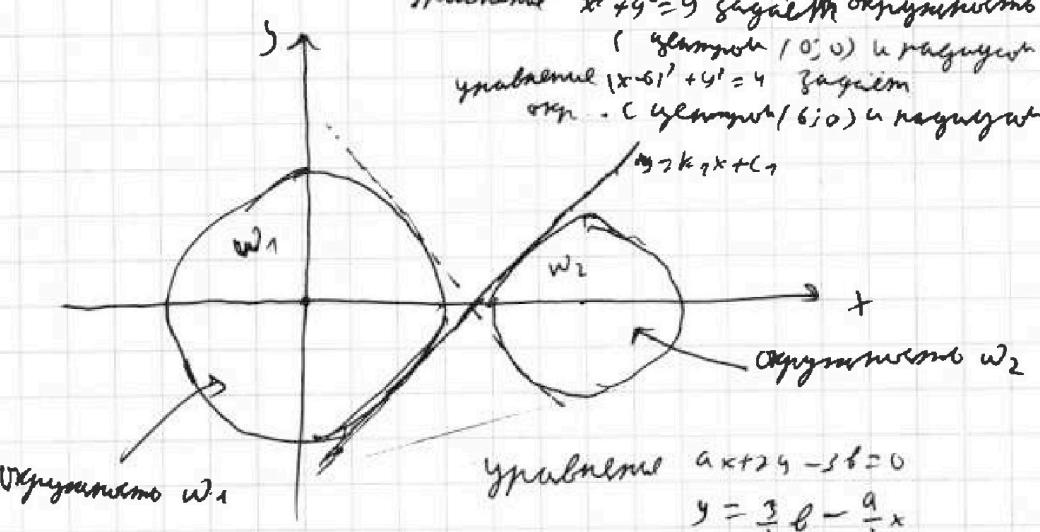
Эквивалентные решения свободны

$$\begin{cases} x^2+4^2-9=0 \\ x^2+4^2-12x+32=0 \end{cases}$$

Начнем исходную систему (учитывая это)

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ x^2+y^2=9 \\ x^2-12x+36+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+2y-3b \\ x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{cases}$$

• решим систему графически, в окнх  $xOy$ .  
уравнение  $x^2+y^2=9$  задает окружность  
(чертежи  $(0;0)$  и радиусы)  
уравнение  $(x-6)^2+y^2=4$  задает  
окр. с центром  $(6;0)$  и радиусом 2



уравнение  $ax+2y-3b=0$

$y = \frac{3}{2}b - \frac{a}{2}x$

задает прямую, с угловым коэффициентом  $-\frac{a}{2}$



Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

но условие в - приведение, упростим выражение

$$y = \frac{3}{2}b + \frac{a}{2}x \text{ можно } \overset{\text{приведение}}{\text{записать так же в вертикальной}} \\ \text{направлении.}$$

Задача, что график является отображением  
Ох, тогда будет рассматриваться только  $a < 0$ , т.к. если  
будет ~~отображение~~ ~~пересекаться с~~ ~~одна~~  
если наименее одна кривая в линии, то он наименее  
в линии.

так  $a < 0$ , выражение  $y = \frac{3}{2}b + \frac{a}{2}x$ . Видим.

$$\text{Задана } k = -\frac{a}{2}, k > 0$$

$$\text{Задана } c = \frac{3}{2}b,$$

$$y = kx + c$$

показано, что  $\text{у} \rightarrow \text{касательство}$

окружности  $W_1$  (см. рисунок), тогда, если  
это не будет пересечением второго отображения, то  
при выполнении с при этом имеем значение  $E$ ;  $E \rightarrow 0$ ;  $E > 0$   
выбираемую кривую будем пересекать сразу две окружности  
и будут иметь и плюсом

также ~~пересечения~~ кривая  $y = kx + c$  ~~касается~~  $W_1$  ~~касательно~~  
 $W_2$ , но при выполнении  $c$ , она пересекает ~~не~~ ~~одну~~  
~~один~~ с обеих из отображений, тогда решим не более 2  
единиц

расмотрим кривую  $y = kx + c$ , - общую касательную  
двух окружностей (см. рисунок); при  $k > k_2$  будем  
иметь  $c = 0 + \infty \rightarrow -\infty$ , наоборот кривая касается  
 $W_1$ . Второй раз равное, т.к.  $W_2$  перевёрнут, но тогда  
у касания не более 2-х решений; при  $k = k_1$ , при

условии  $c = 0 + \infty \rightarrow -\infty$ ,  $g_0 \rightarrow -\infty$  ~~касание~~ ~~ограничение~~,  
второе касание - 1 решений,  $g_0$  ~~второе~~ ~~касание~~ 2 решения,  
второе ~~второе~~ ~~касание~~ тоже 2 решения, а здесь у нас не более  
двоих ~~вторых~~ ~~касаний~~ н.к. Кривая должна не касаться  $W_1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  не находиться



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Перечня QR-кода недопустима!

если  $k=0 \Rightarrow ax^2$ , тогда при  $a > 0$  из первого уравнения  $y>0$ , что  
если  $0 < k < k_1$ , например в точке  $(x_0, y_0)$  будем ~~дальше~~ <sup>аналитика</sup>  
и решать, т.к. прямая будет уже не касательной, а касательной  
все окружности  $\Rightarrow$  к ним не подходит  
найдём  $k_1$ , иск  
если прямая  $y=kx+c$  касается окружности

$$x^2 + y^2 = 9, \text{ то } y \text{ уравнение}$$

$$x^2 + (kx + c)^2 = 9 \text{ дисперсионное } = 0$$

$$x^2(k^2 + 1) + x \cdot 2kc + c^2 - 9 = 0$$

$$D = 4c^2/k^2 - 4ck^2 - c^2 \cdot 4 + 30k^2 + 36 = 0$$

$$\cancel{c^2} \quad \Downarrow$$

$$4c^2 \cdot k^2 + 4 = 36k^2 + 36$$

$$c^2 = 9k^2 + 9$$

$$c = \pm \sqrt{k^2 + 1}$$

одно из двух второе касание  $\Rightarrow$  пронзигаем при  
некотором  $c$ , поэтому  $c_1 = -3\sqrt{k^2 + 1}$

если прямая  $y = kx + c$  касается окр.

$$(x-6)^2 + y^2 = 9, \text{ то } y \text{ уравнение}$$

$$(x-6)^2 + (kx + c)^2 = 9 \text{ дисперсионное } = 0.$$

$$x^2 - 12x + 36 + k^2x^2 + 2xkc + c^2 - 9 = 0$$

$$x^2(k^2 + 1) + x(2kc - 12) + c^2 - 9 = 0$$

$$D = 4k^2c^2 - 48kc + 144 - 4k^2c^2 + 16k^2 - 4c^2 + 96 = 0$$

$$16k^2 + 96 = 48kc + 4c^2 / : 4$$

$c^2 + 12kc = 4k^2 + 40$ , чтобы получилось однозначно

касательностью, получаем  $c = -8\sqrt{k^2 + 1}$

$$9k^2 + 0 \rightarrow 36k\sqrt{k^2 + 1} = 4k^2 + 40$$

$$5k^2 - 31 = 36k\sqrt{k^2 + 1} \quad \{ \text{выбираем все плюс} \}$$

$$25k^4 - 310k^2 + 961 = 1296k^4 + 1296k^2 \quad \text{квадраты!}$$

$$-1241k^4 + 1606k^2 - 961 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$k^2 = \frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}$$

Отрицательное  
значение дискриминанта  
скрыт, т.к.  $k^2 > 0$

так

$$k_1 = \sqrt{\frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}}$$

или при  $k < k_1$  система имеет решение.

Симметрическое уравнение  $\frac{-9}{2} > k_1 \Rightarrow a > -2k_1$

аналогично при  $k > k_1$  при  $k > k_1$  система  
будет иметь решение, т.к.  
~~a > -2k\_1~~

$-2k_1 < a < 2k_1 \Rightarrow$

Ответ: ~~81~~ ~~0~~ ~~0~~ ~~0~~

$$-2 \sqrt{\frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}} < a < 2 \sqrt{\frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 31

$$\arcsin(\cos(x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos(x)) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{20}$$

Сделать

некоторые  $a = b$ , но и

$$\begin{aligned} \frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} &= \pi - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \\ 2x + \pi &= \pi \\ 2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$



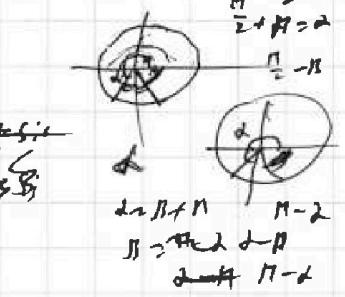
$$\sin(\arcsin(\cos(x))) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{20}\right) \leq \frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} \leq 2\pi k + \frac{\pi}{2} - 2$$

$$\sin(\arcsin(\cos(x))) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{20}\right)$$

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{20}\right)$$

$$\cos(x) - \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{20}\right) = 0$$

$$\cos(x) - \cos\left(\frac{4\pi}{20} - \frac{x}{5}\right) = 0$$



$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{2}\right) (\sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{2}\right)) =$$

$$= \left( \sin \frac{x}{5} \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{x}{5} \sin \frac{\pi}{2} \right) \left( \sin \frac{x}{5} \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{x}{5} \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sin^2 \frac{x}{5} \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{x}{5} \cos^2 \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^2 \frac{x}{5} \cdot 0 - \cos^2 \frac{x}{5} = -\cos^2 \frac{x}{5}$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{2} - \cos^2 \frac{x}{5} = -\cos^2 \frac{x}{5} = -\cos 2x + 1$$



$$-2 \sin\left(\frac{6x}{20} + \frac{\pi}{20}\right) \cdot \sin\left(\frac{4x}{20} - \frac{\pi}{20}\right) = 0$$

$$\frac{6x}{20} + \frac{\pi}{20} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \pi k$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| X | X | X | ✓ | X | X | X |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

отобрать из косинус x, не кратные четверти

четверти

если  $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} nk$ , остаток кратное 4 и кратное  $\pi$   
четверти числа x будут повторяться,

тогда рассмотрят только первое 4 k..

$$k=0 \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

$$k=1$$

$$k=2$$

$$k=3$$

аналогично - возвращают угол  $-\frac{\pi}{2}$  к  $\frac{\pi}{2}$ , тогда

(5 кратно) - возвращают угол  $-\frac{5\pi}{2}$  к  $\frac{5\pi}{2}$ , тогда

(5 кратно) - возвращают угол  $-\frac{10\pi}{2}$  к  $\frac{10\pi}{2}$ ,

тогда произведён отбор кратных  $\frac{\pi}{3}$  таких, что

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x + \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} \leq \frac{\pi}{2} \text{ и } \frac{x + \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} - \text{ в I или IV четверти}$$

таким образом  $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$  всегда в I

таким образом это число это четное (так как возвращаются),

тогда  $k = -1, 0, 1$ .

$$\cos(17 + \frac{1}{3}) \Rightarrow -\cos(\frac{17}{2}) \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2}$$

$$\cos(-\frac{8}{2}) = -\frac{5}{6}$$

$$-\frac{4}{3} 17 + \frac{1}{2} = -\frac{8}{6} 17 + \frac{3}{6} 17 \Rightarrow$$



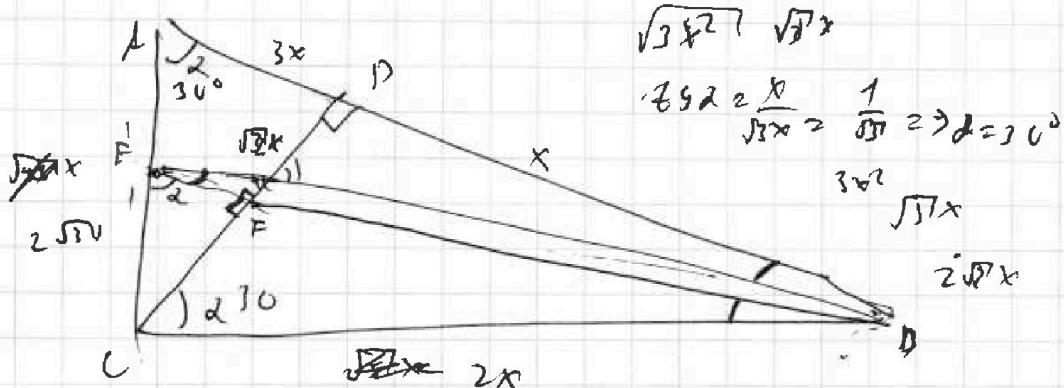
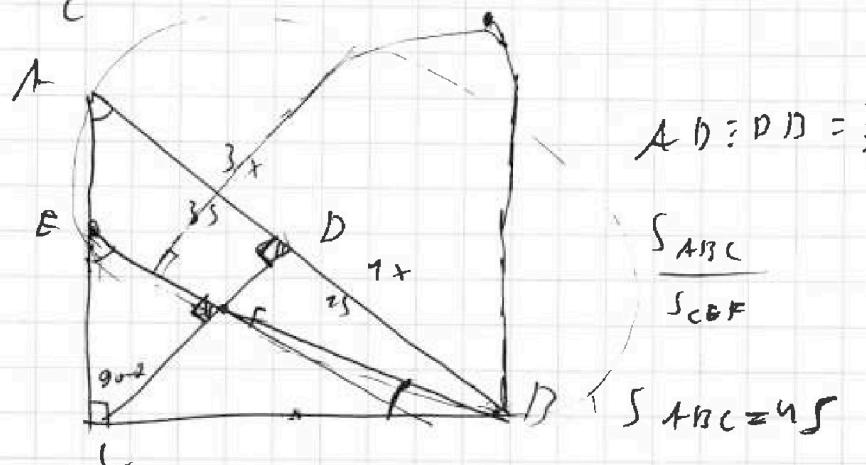
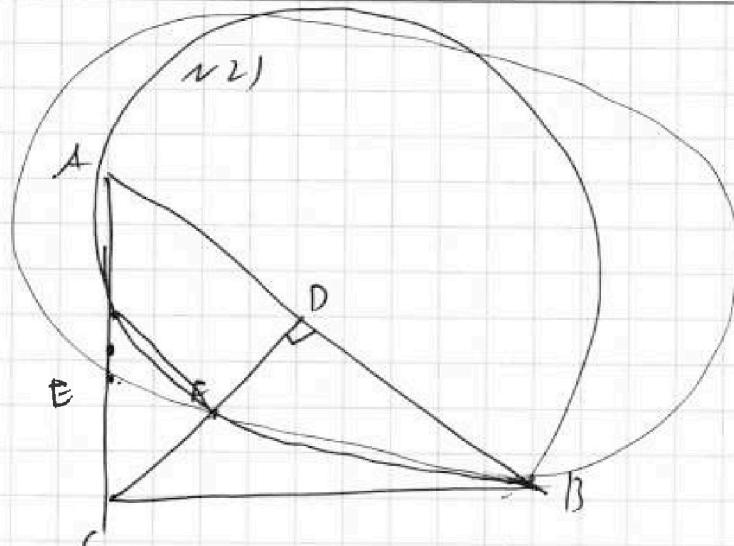
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{ED}{FB} = 2 \Rightarrow EB = 2FD$$

$$\frac{AE}{CF} = 2 \quad AF = 2CF$$

$$60 - 2x$$

$$(E = \frac{1}{2} FC)$$

$$AC = 2\sqrt{3}x = AF + FC$$

$$CF = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$$2\sqrt{3}x = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot FC$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

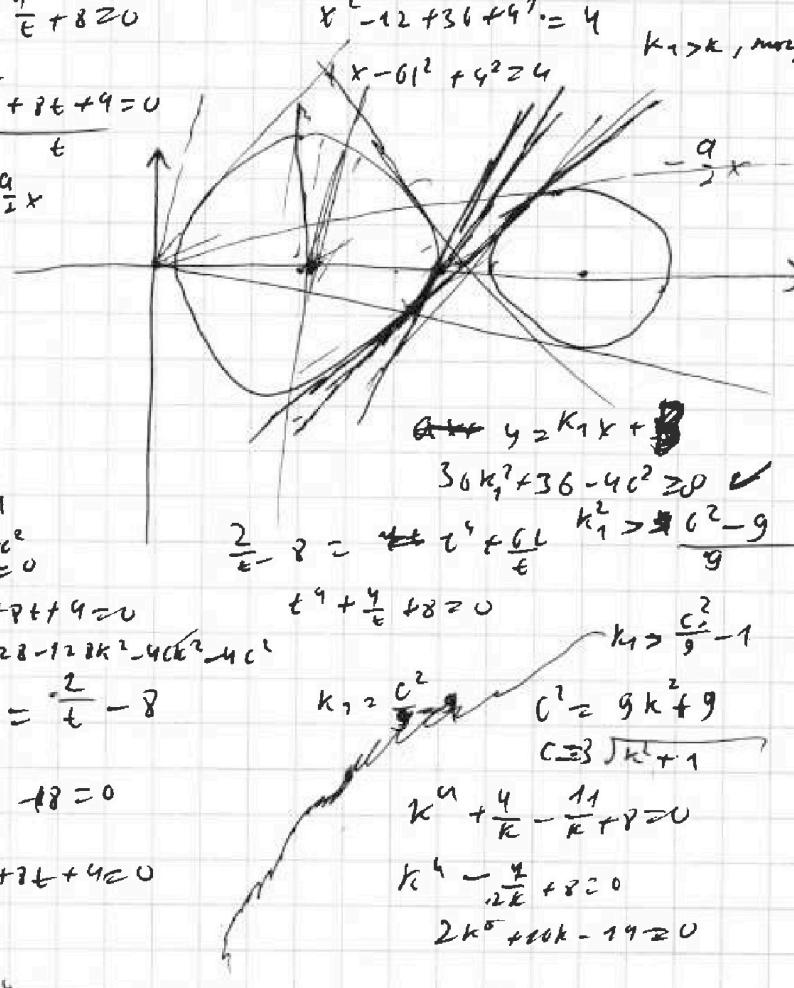
МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \text{6) } \frac{36}{216} \quad \frac{6^4 k^2}{36k + 60 + 1200} > \frac{6^4 k^2}{\cancel{6^4 k^2} - 4^4 k^2 - 2^4 k^2 - 8^4 k^2 = 8^4 k^2} \\
 & \text{1296} \quad \text{N} \quad 6^4 k^2 - 4^4 k^2 - 2^4 k^2 - 8^4 k^2 = 8^4 k^2 \\
 & \text{1296} \quad \log_3^4 x + 6 \log_3 3 = 3 \\
 & 6^4 k^2 + 6^4 k - 4^4 k^2 - 2^4 k^2 - 8^4 k^2 = 8^4 k^2 \\
 & -328 k^2 \\
 & \frac{31}{981} \quad \log_3^4 x + 6 \log_3 3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \log_3 7 - 8 \\
 & \log_3 t^4 + 4t^2 + 8 = 0 \\
 & 6^4 k^4 + 6^4 k^2 > 4^4 k^4 \\
 & \frac{4}{t} \\
 & \log_3 t^4 + 4t^2 + 8 = 0 \\
 & 30 k^2 + 36 - 4 c^2 \\
 & 4 k^2 c^2 + 36 k^2 \\
 & + 36 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 4 > 36 \\
 & 4 > 36 k \sqrt{k^2 + 1} + 4 k^2 + 9 \\
 & 36 k \sqrt{k^2 + 1} > 4 k^2 + 8 \quad \frac{t^5 + 8t + 9}{t} = 0 \\
 & y = \frac{3}{2} t - \frac{9}{2} x \\
 & x^2 - 12x + 36 + k^2 x^2 + \\
 & x^2 - 12x + 36 + k^2 x^2 + \\
 & t^4 + \frac{4}{t} + 8 = 0 \\
 & 36 k^2 + 36 - 4 c^2 \geq 0 \quad k_1 > k, \text{ more} \\
 & \frac{2}{t} - 8 = \frac{4}{t} t^4 + \frac{6}{t} \quad k_1^2 > \frac{c^2 - 9}{9} \\
 & t^4 + 8t + 9 = 0 \quad k_1 > \frac{c^2}{9} - 1 \\
 & 16 > 48 k^2 + 128 k^2 + 4 c^2 \quad k_1 = \frac{c^2}{9} \\
 & 4 > 12 k^2 + 32 k^2 + c^2 \quad c^2 = 9 k^2 + 9 \\
 & 4 > 44 k^2 + c^2 \quad c = 3 \sqrt{k^2 + 1} \\
 & 32 k^2 + 12 k^2 + c^2 + 4 > 0 \quad k^4 + \frac{4}{k} - \frac{11}{k} + 8 = 0 \\
 & D = 144 c^2 - 128 c^2 + 572 \quad k^4 - \frac{4}{2k} + 8 = 0 \\
 & 16 c^2 + 572 = 16(c^2 + 32) \quad 2 k^5 + 80 k - 19 = 0 \\
 & k = \frac{-12 \pm 4 \sqrt{c^2 + 1}}{64}
 \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

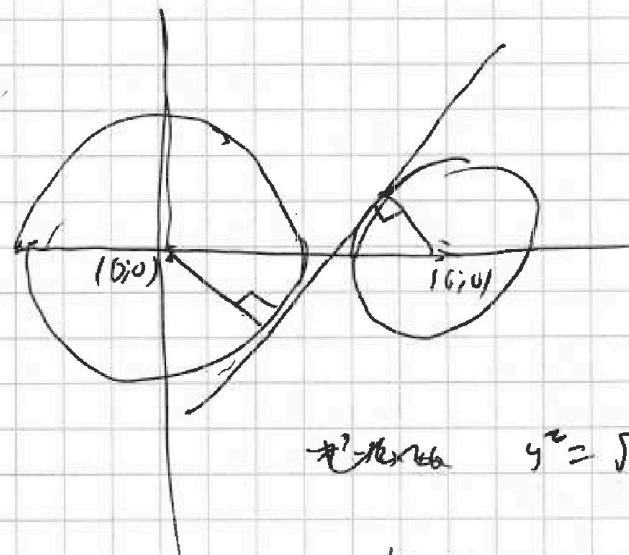
6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = kx + 3\sqrt{R+1}$$



$$x^2 + y^2 = 36 \quad y^2 = \sqrt{4-(x-6)^2}$$

$$k =$$