



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab : 2^{14} \\ bc : 2^{17} \\ ac : 2^{20} \end{cases} \Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac : 2^{14+17+20} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{51} \Rightarrow abc : 2^{26}$$

$$ac : 7^{37} \Rightarrow abc : 7^{37}$$

Значит abc не меньше $2^{26} \cdot 7^{37}$. $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ к примеру
если $b = 2^6 = 64$, $a = 2^9 \cdot 7^{10}$, $c = 2^{11} \cdot 7^{27}$. Нетрудно заметить,
что в этом случае все условия по ~~9~~ делительности выполняются.

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \quad m \text{ должно являться делителем } a+b$$

~~a+b~~ не делит ~~a+b~~ $\Rightarrow a+b$ ~~взаимно простое~~

Докажем, что $m \leq 8$. Пойдем от противного. Пусть $m > 8$.

$$(a+b):m \Rightarrow (a+b)^2:m \Rightarrow 8ab:m (m \cdot k((a+b)^2-8ab):m)$$

Значит m ~~взаимно~~ не взаимно просто с a или b . Без ограничения общности скажем, что m не взаимно просто с a .

Обозначим их НОД за x ($x > 1$). $a+b:x (m \cdot k \cdot a+b:m) \Rightarrow b:x$

Но тогда a и b имеют общий делитель больше 1 и $\frac{a}{b}$ не может быть несократимой дробью. Противоречие. Значит $m \leq 8$.

• $m=8$ при $a=3$, $b=5$. Действительно, $\frac{a}{b}$ несократима и:

$$\frac{3+5}{3^2-6 \cdot 3 \cdot 5 + 5^2} = \frac{8}{9-90+25} = -\frac{8}{56} = -\frac{1 \cdot 8}{7 \cdot 8} = -\frac{1}{7}.$$

Ответ: $m=8$.



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

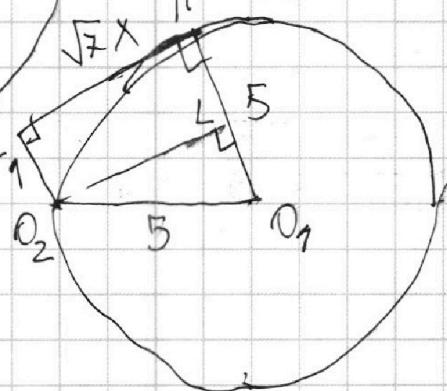
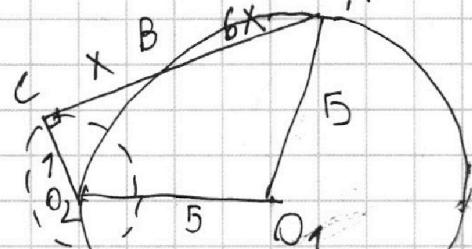
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AC}{BC} = 7 \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC-BC}{BC} = \frac{AC}{BC} - 1 = 6$$



$$O_2 L \perp K \parallel O_1$$

$$1) M L = C O_2 = 7 \quad (M, K, C \in O_2 L - \text{прямая.})$$

$$2) L O_1 = M O_1 = M L = 4$$

$$3) O_2 L = \sqrt{O_1 O_2^2 - L O_1^2} = 3$$

$$4) C_1 M = O_2 L = 3 = \sqrt{7} x \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$5) AB = 6x = \frac{6 \cdot 3\sqrt{7}}{7} = \frac{18\sqrt{7}}{7}.$$

$$\text{Объем: } AB = \frac{18\sqrt{7}}{7}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \mid \cdot \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 - (2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2 - 7x = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1) = 0$$

$$\begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \mid ^2$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$(4x^2 - 3x + 3) + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 0$$

Заметим, что первая скобка второго
нагромождения ($a > 0, D < 0$), вторая
ненулевая (квадратный корень) и в сумме давать может те же монотонные
(их сумма ненулевая).

$$2 - 7x = 0$$

~~123~~
$$x = \frac{2}{7}$$

Корень удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $x = \frac{2}{7}$.

ОДЗ:

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq 0$$

или

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \leq 1 \\ x \geq 1,5 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 1,5 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \alpha x - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$y = \alpha x + 10b$$

$$((x+8)^2 + (\alpha x + 10b)^2 - 1)(x^2 + (\alpha x + 10b)^2 - 4) \leq 0$$

$$(x^2 + 16x + 64 + \alpha^2 x^2 + 20\alpha x b + 100b^2 - 1)(x^2 + 20\alpha x b + \alpha^2 x^2 + 100b^2 - 4) \leq 0$$

$$((\alpha^2 + 1)x^2 + (20ab + 16)x + (100b^2 + 63))((\alpha^2 + 1)x^2 + 20abx + (100b^2 - 4)) \leq 0$$

При заданных α и b каждому значению x соответствует ровно одно значение y . \Rightarrow нам необходимо, чтобы неравенство выше имело ровно 2 решения. Это возможно в 2 случаях:

1) корни обоих многочленов в скобках равны. Но это невозможно т.к. по Т. Виноградова их корни разные.

2) дискriminanti оба ~~же~~ трёхчленов равны и их корни не равны (последнее верно в силу Т. Виноградова)

$$\mathcal{D}_1 = 100a^2b^2 + 16ab + 64 - 100a^2b^2 - 63a^2 - 100b^2 - 63 = 16ab - 63a^2 - 100b^2 + 7$$

$$\mathcal{D}_2 = 100a^2b^2 - 100a^2b^2 + 9a^2 - 100b^2 + 4 = 9a^2 - 100b^2 + 4$$

$$\begin{cases} 16ab - 63a^2 - 100b^2 + 7 = 0 \\ 9a^2 - 100b^2 + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{решение} \quad \text{решение}$$

$$640ab - 252a^2 - 900b^2 + 4 = 0$$

$$640ab - 256a^2 - 300b^2 = 0$$

$$64a^2 - 16ab + 75b^2 = 0 \quad | :b^2$$

$$64\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 16\frac{a}{b} + 75 = 0$$

$$\mathcal{D}_1 = 6400 - 75 \cdot 64 = 25 \cdot 64$$

$$\frac{a}{b} = \frac{80 \pm \sqrt{25 \cdot 64}}{64} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 64a = 120b \\ 64a = 40b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a = 15b \\ 8a = 5b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 64a^2 = 225b^2 \\ 64a^2 = 25b^2 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$9a^2 - 64a^2 + 1 = 0 \quad a^2 - 25 \quad b^2 + 1 = 0$$

отсюда

бок

$$\begin{cases} a^2 - 64a^2 + 1 = 0 \\ 9a^2 - 64a^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{63} \\ a^2 = \frac{1}{55} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\frac{1}{63}} \\ a = -\sqrt{\frac{1}{63}} \\ a = \sqrt{\frac{1}{55}} \\ a = -\sqrt{\frac{1}{55}} \end{cases}$$

$$\text{ответ: } \sqrt{\frac{1}{63}}; -\sqrt{\frac{1}{63}}; \sqrt{\frac{1}{55}}; -\sqrt{\frac{1}{55}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

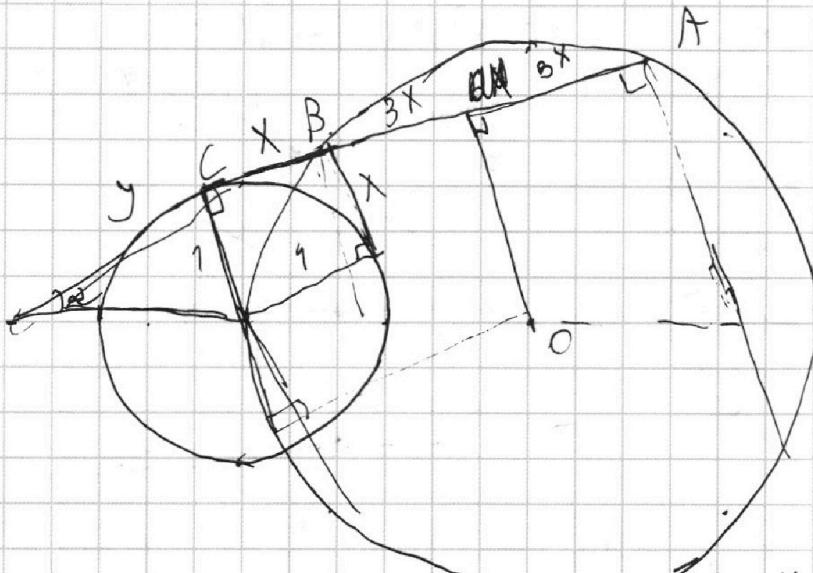
5

6

7

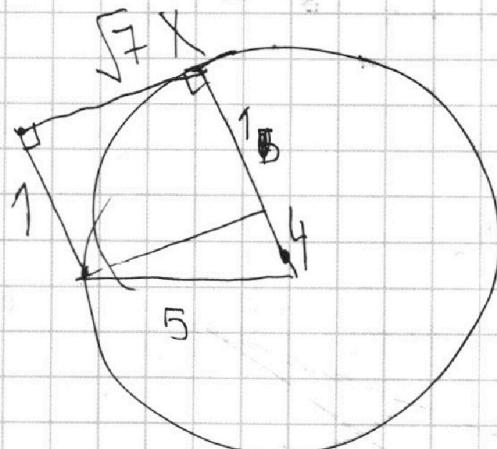
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = \frac{y+4x}{\sqrt{25-9x^2}}$$

$$CO^2 = 6x^2 + 25$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

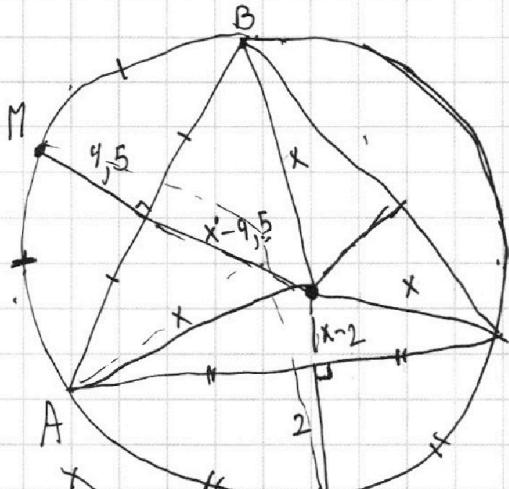
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

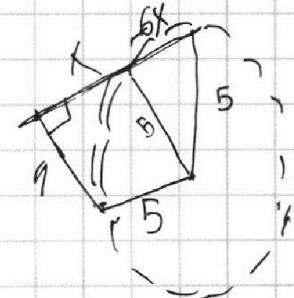
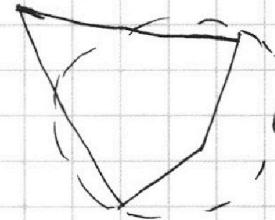
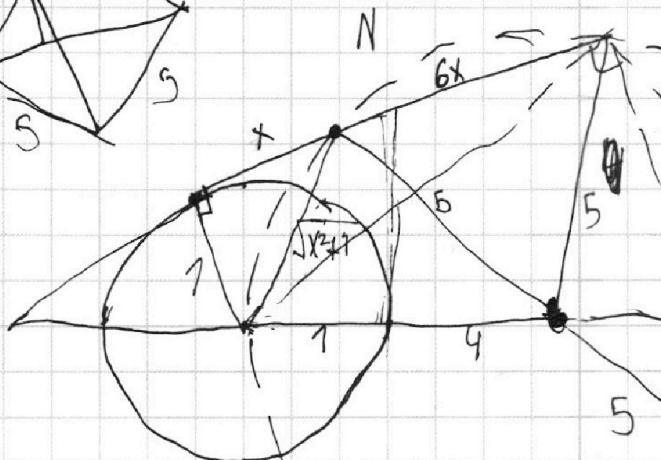
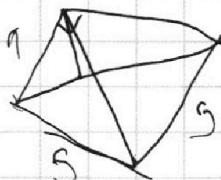
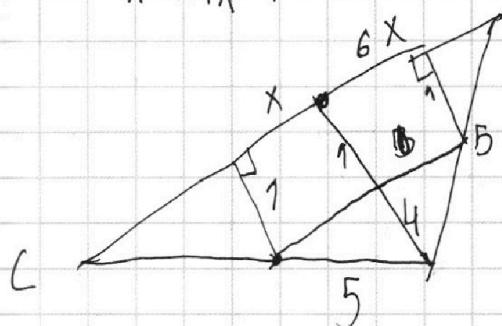
МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

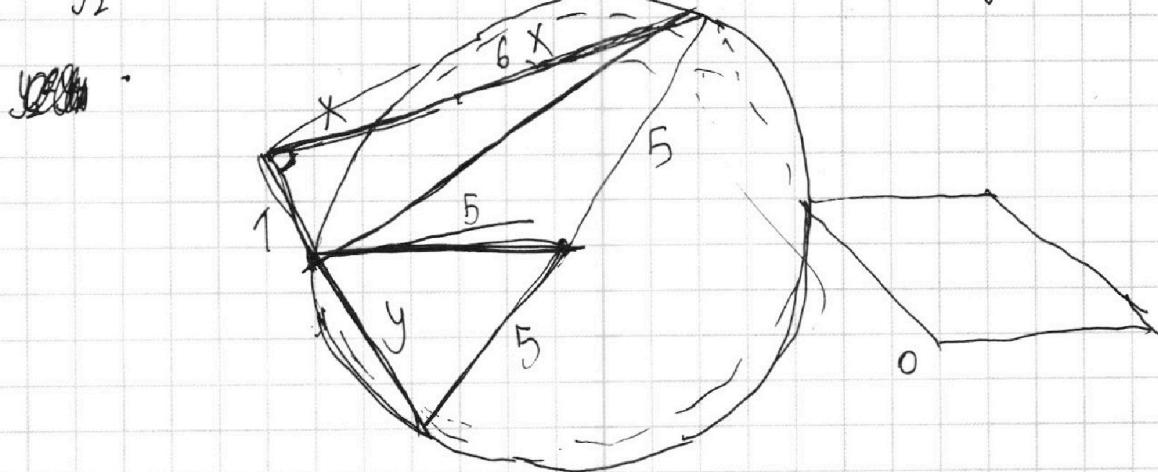


$$x^2 - x^2 + 4x - 4 = \sqrt{4x - 4}$$



$$y_2 = 12 + y_1 + 2x_1 - 2x_2$$

$$6x^2 = 1 + y$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) ab : 2^{14}$$

$$m = 14$$

$$bc : 2^{17}$$

$$ac : 2^{20}$$

$$b \quad b-3 \quad c-6$$

$$b \quad b+3 \quad b+6$$

$$b=6 \quad b=9 \quad c=2^{11}$$

$$2p = 6 \quad 2a = 9 \quad 2c = 11$$

$$2(ab+bc+ac) = 57$$

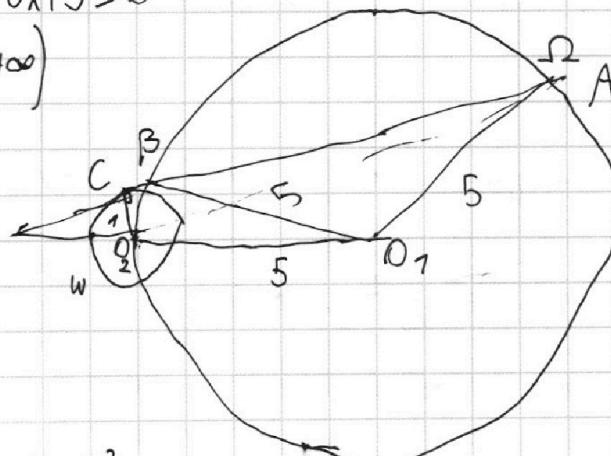
$$ab + bc + ac = 26$$

$$\beta_a = 10 \quad \beta_c = 27$$

$$\alpha_b =$$

$$Q3: 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$(-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$



$$\frac{AC}{CB} = 7 \quad R_W = 1$$

$$R_{S2} = 5$$

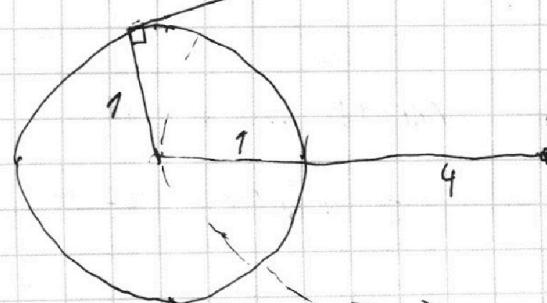
$$AB - ?$$

$$\frac{AB}{BC} = 6$$

$$AC \cdot BC = d^2 - R^2$$

$$7BC^2 = d^2 - R^2$$

$$AC^2 = (AO_1 - 1)(AO_1 + 1) = AO_1^2 - 1$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left((x+8)^2 + (ax+10b)^2 - 1 \right) (a^2 + 1)(ax+10b)^2 - 4 \leq 0$$

$$(x^2 + 16x + 64 + a^2 x^2 + 20abx + 100b^2 - 1) (x^2 + a^2 x^2 + 20abx + 100b^2 - 4) \leq 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 4(5ab + 4)x + (100b^2 + 63) \leq 0$$

$$\mathcal{D}_1 = 25a^2b^2 + 90ab + 16 - 100a^2b^2 + 160ab + 64 - 100a^2b^2 - 63a^2 - 100b^2 - 63 \\ = 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 7$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 20abx + (100b^2 - 4)$$

$$\mathcal{D}_1 = 100a^2b^2 - 100a^2b^2 + 9a^2 - 100b^2 + 4 \quad 90a = 75b$$

$$\mathcal{D}_1 = 9a^2 - 100b^2 + 4$$

$$160ab - 63a^2 - 100b^2 + 7 = 0$$

$$9a^2 - 100b^2 + 4 = 0$$

$$a^2 + 1 = 25b^2$$

$$160a\sqrt{\frac{a^2+1}{25}} - 63a^2 - 9a^2 - 9 + 7 = 0$$

$$32a\sqrt{a^2+1} - 67a^2 - 3 = 0$$

$$32a\sqrt{a^2+1} = 67a^2 + 3$$

$$32^2 a^{2+2} + 32^2 a^2 = 67^2 a^4 + 6 \cdot 67 a^2 + 9$$

$$690ab - 64 \cdot 9a^2$$

$$\mathcal{D}_1 = 6900 - 75 \cdot 64 = 25 \cdot 64 = \sqrt{\mathcal{D}_1} = 90$$

$$\frac{80 \pm 90}{64}$$