



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 1.

$$\{a, b, c\} \in \mathbb{N}$$

$$\text{Пусть } ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14} \cdot K, \quad bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot m,$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot n, \text{ тогда из данных равенств имеем:}$$

$$a^2 = 2^8 \cdot 3^{17} \cdot 5^{26} \cdot \frac{Kn}{m}; \quad b^2 = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{-4} \cdot \frac{Km}{n}; \quad c^2 = 2^{24} \cdot 3^{33} \cdot 5^{30} \cdot \frac{mn}{K}$$

$$(abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot Kmn \quad (\{K, m, n\} \in \mathbb{N})$$

Как видим из 2-ого равенства, чтобы b был натуральным,
необходимо, чтобы $\frac{Km}{n}$ содержало множитель 5^4 (именно 5^4 для минимальности)

а также множитель 3^4 (именно 3^4 для минимальности)

Это возможно например при $K = 5^4, m = 3, n = 1$.

$$\text{Тогда имеем: } a^2 = 2^8 \cdot 3^{16} \cdot 5^{30}, \quad b^2 = 2^4 \cdot 3^{10}, \quad c^2 = 2^{24} \cdot 3^{34} \cdot 5^{26}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}, \quad b = 2^2 \cdot 3^5, \quad c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$$

Мы подбирали минимально возможные K, m, n , чтобы

произведение abc было минимальным (как видим из 4-ого равенства $(abc)^2$ зависит прямо пропорционально от K, m, n),
поэтому при таких K, m, n произведение минимально.

$$\text{Итак } \min(abc) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}.$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

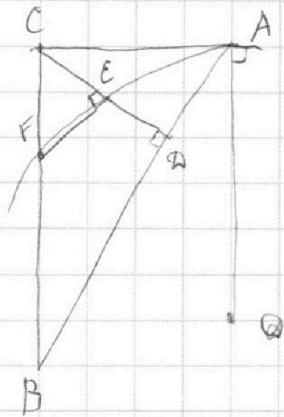


МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2



$$AB \parallel EF \Rightarrow CD \perp FE$$

Пусть $BD = 5x$, $AD = 2x$, тогда $CD = \sqrt{5x \cdot 2x} = x\sqrt{10}$

П.к. $AB \parallel EF$, то $\angle DBC = \angle EFC = \angle DCA$.

Отсюда $\frac{BD}{FE} = \frac{CD}{DE}$ и $\frac{AD}{CE} = \frac{CD}{FE}$

$$FE = \frac{BD \cdot DE}{CD} = \frac{CD \cdot CE}{AD}$$

$$\frac{5x \cdot DE}{x\sqrt{10}} = \frac{x\sqrt{10} \cdot CE}{2x} \Rightarrow \frac{DE}{CE} = \frac{10}{10} = 1$$

т.е. $DE = CE = y$ и $FE = \frac{BD \cdot DE}{CD} = \frac{5x \cdot y}{x\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} y$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot FE = \frac{1}{2} y \cdot \frac{5}{\sqrt{10}} y = \frac{5}{2\sqrt{10}} y^2$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{10} \cdot x = x^2 \sqrt{10}$$

$$CD = CE + ED = 2y = x\sqrt{10} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{x^2 \sqrt{10}}{\frac{5}{2\sqrt{10}} y^2} = \frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{2 \cdot 10}{5} = \frac{4}{10} \cdot 4 = \frac{16}{10}$$

Ответ: $\frac{16}{10}$

3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos a \in [0; \pi] \Rightarrow 0 \leq 9\pi - 2x \leq \pi \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}$$

$$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right);$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{4\pi}{10}\right);$$

$$\sin x - \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = 0;$$

$$2 \sin \frac{x - \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}}{2} \cos \frac{x + \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}} = 0;$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = 0, & \begin{cases} \frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5} = \pi n, \\ \frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{cases} \\ \cos\left(\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = 0; & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{2}, \\ x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi m}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right\} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right];$$

$$\left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}; \frac{27\pi}{6}\right\} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$$

Проверкой убеждаемся, что все полученные корни подходят

$$\text{Ответ: } x \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right\}$$

2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

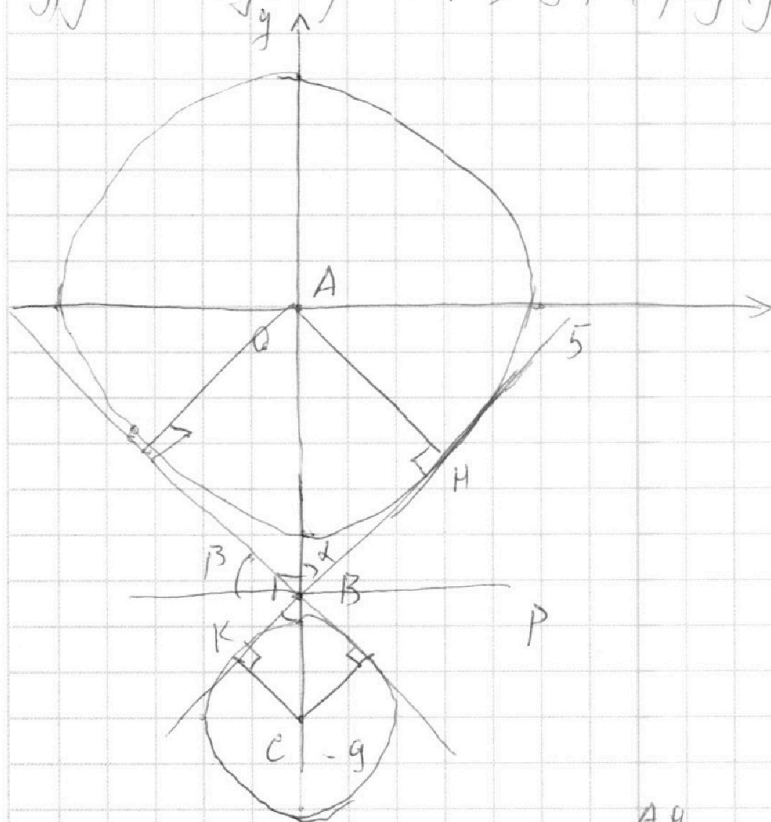


Задание 4.

Ответ: $a \in (-\frac{35}{12\sqrt{2}}; \frac{35}{12\sqrt{2}})$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 14y + 77) = 0 \end{cases}$$

Графиком 2-ого уравнение являются две окружности,
одна из которых с центром $(0; 0)$ и радиусом 5, а
другая с центром $(0; -9)$ и радиусом 2.



Проведём общие
касательные

Если прямая $5x + 6ay = 6$
будет нп

$$AC = 9 = AB + BC$$

$$\triangle AMB \sim \triangle CKB$$

$$\frac{AK}{AB} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BC}{9-BC} = \frac{2}{9}$$

$$5BC = 18 - 2BC$$

$$BC = \frac{18}{7} \Rightarrow AB = \frac{45}{7}$$

$$\sin \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{49}{81} - 1 = \frac{32}{81}$$

Прямая $p \parallel Ax \Rightarrow \tan \beta = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{9}{\sqrt{32}}$

$$= \sqrt{\frac{32}{49}} = \frac{2\sqrt{2}}{7}$$

Значит, если угол наклона в прямой

$y = \frac{6}{6a} - \frac{5}{6a}x$ будет меньше, чем $\tan \beta = \frac{2\sqrt{2}}{7}$ то
она будет иметь менее 4-х пересечений с окружностями

Значит $|\frac{5}{6a}| < \frac{2\sqrt{2}}{7}$, $\frac{5}{6a} < \frac{2\sqrt{2}}{7}$ $a \in (-\frac{35}{12\sqrt{2}}; \frac{35}{12\sqrt{2}}) \setminus \{0\}$
А также $a=0$ тоже подходит.

4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 5.

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{12} - 5; \quad (x > 0, x \neq 1)$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \quad | \times (3 \log_{11} x); \quad (\log_{11} x = t)$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0 \quad (1)$$

$$\log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{\frac{1}{2}y} 11 = \log_{\frac{1}{2}y^3} (11^{-13}) - 5; \quad \left(\frac{1}{2}y = z, z > 0, z \neq 1\right)$$

$$\log_{11}^4 z + \frac{1}{\log_{11} z} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} z} - 5 \quad | \times (3 \log_{11} z); \quad (\log_{11} z = w)$$

$$3w^5 + 15w + 16 = 0 \quad (2)$$

Заметим, что $f(t) = 3t^5 + 15t$ является возрастающей функцией ($f'(t) = 15t^4 + 15 \geq 15$), а значит уравнения (1) и (2) имеют один действительный корень.

По т. Виета для уравнения (1) и (2) имеем:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = -\left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{16}{3};$$

$$t_1^5 = \frac{16}{3} \quad (\text{т.к. один действ. корень})$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = -\frac{16}{3}$$

$$w_1^5 = -\frac{16}{3} \quad (\text{т.к. один действ. корень})$$

Отсюда имеем $\log_{11}^5 x = \frac{16}{3}$, $\log_{11}^5 z = -\frac{16}{3}$; $\log_{11} x = \sqrt[5]{\frac{16}{3}}$, $\log_{11} z = -\sqrt[5]{\frac{16}{3}}$.

При этом $t_1 = w_1$ ($3t_1^5 + 15t_1 - 16 = -3w_1^5 - 15w_1 - 16 = -(3w_1^5 + 15w_1 + 16) = 0$)

5



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Запомним это ($t = -w$).

Теперь найдем необходимое произведение:

$$xy = 11^t \cdot 2z = 11^t \cdot 2 \cdot 11^w = 2 \cdot 11^{(t+w)} = 2 \cdot 11^0 = 2$$

Значит $xy = 2$.

Ответ: 2

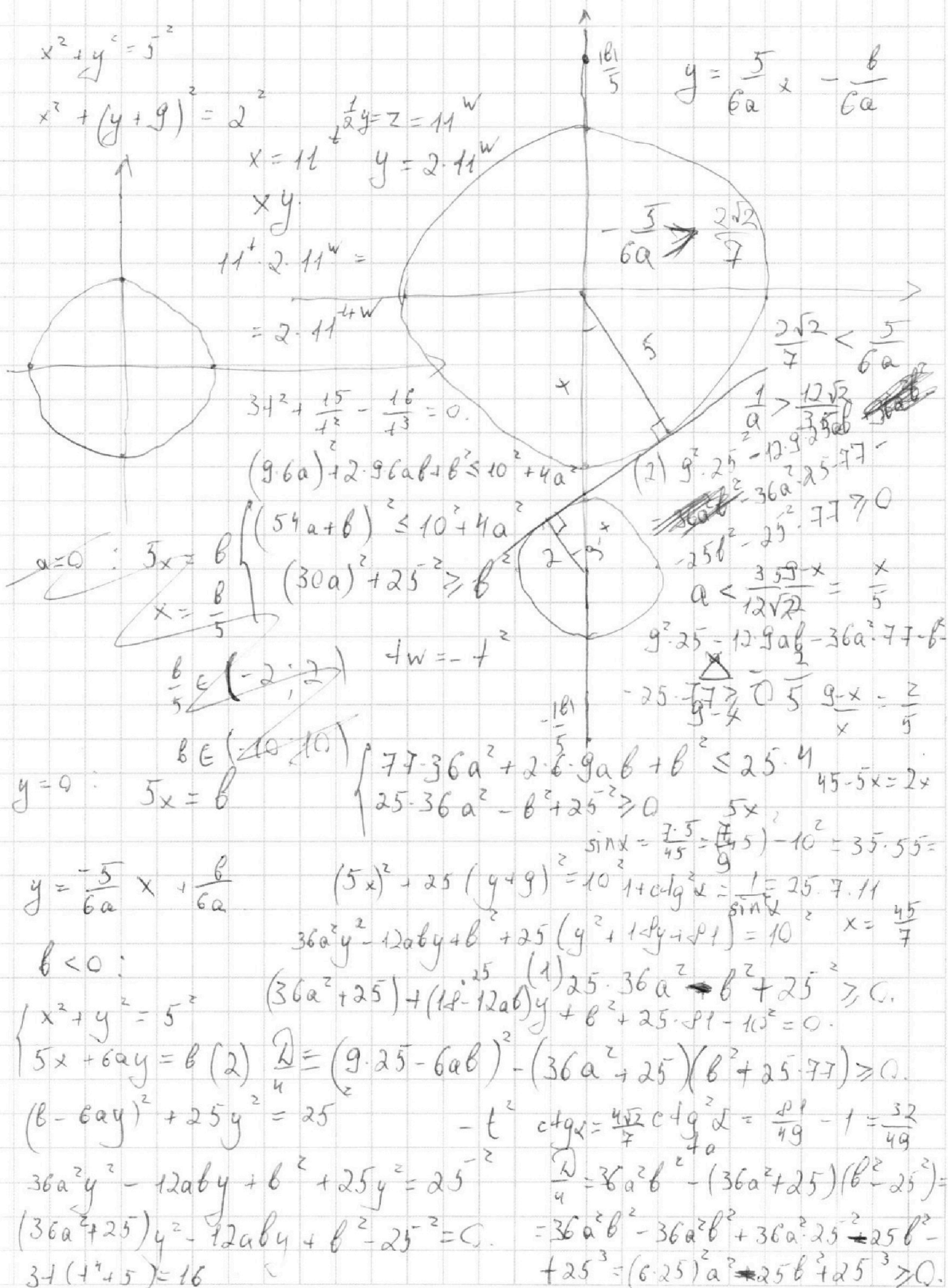
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

☐ 1
 ☐ 2
 ☐ 3
 ☐ 4
 ☐ 5
 ☐ 6
 ☐ 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1. \quad ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{29} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\{k, m, n\} \geq 1$$

$$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot k$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{29} \cdot 5^{13} \cdot m$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot n$$

$$abc^2 = 2^{30} \cdot 3^{46} \cdot 5^{41} \cdot mn$$

$$c^2 = 2^{24} \cdot 3^{33} \cdot 5^{30} \cdot \frac{mn}{k} \quad m=3^1$$

$$b^2 = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{-4} \cdot \frac{km}{n} \quad k=5^4$$

$$a^2 = 2^8 \cdot 3^{17} \cdot 5^{26} \cdot \frac{kn}{m} \quad n=1$$

$$(abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot kmn = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{56} \cdot mn = 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{56} \cdot n = 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{56}$$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} + \frac{9\pi}{2}$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{10\pi m}{6} = \frac{7\pi}{6} + \frac{17\pi}{6} + \frac{27\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$27\pi - \frac{3\pi}{6} \cdot \frac{27\pi}{6} \vee \frac{9\pi}{2}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$3. \quad 10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin x - \sin\left(\frac{5\pi}{10} + \frac{x}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) = 0$$

$$2 \sin \frac{x - \frac{x}{5} + \frac{4\pi}{10}}{2} \cos\left(\frac{x + \frac{x}{5} - \frac{4\pi}{10}}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5} = 0 \\ \cos \frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5} = 0 \end{cases} \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5. \log_{11} x - 6 \frac{1}{\log_{11} x} = \log_{x^3+121} \frac{1}{x} - 5 \quad x > 0, x \neq 1.$$

$$\log_{11}^4 x + \frac{2}{3} \frac{1}{\log_{11} x} - 6 \frac{1}{\log_{11} x} + 5 = 0 \quad \frac{1}{121} = 11^{-2}$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0. \quad \log_{11} x = t.$$

$$t \in (0; 1) \quad 3(x-1)(x^4+ax^3+bx^2+cx+d) = 0. \quad z = \frac{1}{2}y$$

$$\log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{\frac{1}{2}y} 11 = \log_{\frac{1}{2}y^3} (11^{-13}) - 5$$

$$\log_{11}^4 z + \frac{1}{\log_{11} z} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} z} - 15 \quad | \times 3 \quad w = \log_{11} z.$$

$$3\log_{11}^5 z + 15\log_{11} z + 16 = 0. \quad t, e(0; 1) \quad z \in \left(\frac{1}{11}; 1\right)$$

$$3w^5 + 15w + 16 = 0. \quad w \in (-4; 0) \quad (x-1)(x^4+ax^3+bx^2+cx+d) = 0$$

$$w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 = -\frac{16}{3} \quad x^4+ax^3+bx^2+cx+d \neq 0 \quad 3t^4 + 15 = 0. \quad \uparrow$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = \frac{16}{3} \quad 15w^4 + 15 = 0 \quad \uparrow$$

$$\frac{5}{3}w = -w^5 \quad 15t = 16 - 3 \cdot 5 \quad t = -w \quad 4 \cdot d = \frac{16}{3}$$

$$(t_1 w_1)(t_2 w_2)(t_3 w_3)(t_4 w_4)(t_5 w_5) = -\frac{4^4}{3^2} \quad 3ax^4 - 1x^4 = 0.$$

$$9t^5 w^5 + 45t w^5 - 16 \cdot 3w^5 + (x-1) \dots d_1 = 0 \quad d = \frac{16}{3t}$$

$$945t^5 w - 16 \cdot 15w + 16 \cdot 3t^5 + 16 \cdot 15t - 256 = 0. \quad (x+4) \dots d_2 = 0. \quad \frac{1}{3}w d^2 = \frac{16^2}{3^2} \cdot \frac{1}{3} - t$$

$$t d = -\frac{16}{3} \quad -1d_1 = -\frac{16}{3} \quad 1d_1 = \frac{16}{3} \quad a = t.$$

$$9t^5 w^5 + 45t w^5 + 45t^5 w - 16(3w^5 + 15w + 16^3) + 16(3t^5 + 15t - 16)t - 256 = 0.$$

$$9t^5 w^5 + 45t w^5 + 45t^5 w + 256 = 0. \quad w = -t \quad t^4 + 15 = d. \quad (x-1)(x^4+ax^3+bx^2+cx+d) = 0.$$

$$t(1^4 + 15) = \frac{16}{3} \quad \frac{1}{3} = 5 + \frac{1}{3} \quad 15x = dx - c + x \quad a = t$$

$$3t(1^4 + 15) = 16 \quad 45 = d - t^4 \quad bx^3 - 1ax^3 = 0. \quad c = t^3$$

$$b = t^2 \quad d =$$