



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1. $ab: 2^5 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$, $bc: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{18}$; $ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{24}$.

из данных произведем все 3 чис, для наименьших значений они равны были
равным произведем притом все в степени из условия.

$a \cdot b \cdot c: 2^{30} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \rightarrow abc: 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

$2^{18} \Rightarrow a$ содержит 2^4 , $b - 2^2$, $c - 2^{12}$ $ab - 2^6$, $bc - 2^{14}$, $ac - 2^{16}$

$3^{30} \Rightarrow a - 3^5$, $b - 3^5$, $c - 3^{10}$, $ab - 3^{10}$, $bc - 3^{15}$, $ac - 3^{20}$

$5^{24} \Rightarrow 5^{11} \cdot 5^{13} = 2^{24} < 5^{14}$, нам в левом случае не будет факта 5 в левом
или минимум в левом

$b - 3^5$, $a - 5^{11}$, $c - 5^{13} \rightarrow ab - 5^{11} \cdot 3^5$, $bc - 5^{13} \cdot 3^5$, $ac - 5^{24} \cdot 3^5$

$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}$, $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$; $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{18}$ $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ - мин.

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1/3. $\arccos(\sin x) = 95 - 2x$ $0 \leq \arccos(x) \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \frac{95-2x}{10} \leq \pi$

$$\arccos(\sin x) = \frac{95-2x}{10}$$

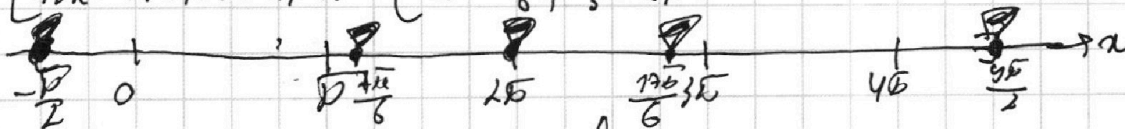
$$\sin x = \cos\left(\frac{95-2x}{10}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{95-2x}{10}\right)$$

$$\begin{cases} 95-2x \leq 6\pi \\ 95-2x \geq 0 \\ x \geq -\frac{\pi}{2} \\ x \leq \frac{95}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{95-2x}{10} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{2} = \frac{95-2x}{10} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\pi - 10x = 95 - 2x + 20\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 10x - 5\pi = 95 - 2x + 20\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x = -4\pi + 20\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 11x = 19\pi + 20\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



С учетом ОДЗ имеем следующие решения:

$$\arccos(\sin(-\frac{\pi}{2})) = 95 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos(-1) = 180 \Rightarrow 180 = 190 \checkmark \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(\sin \frac{7\pi}{6}) = 95 - \frac{7\pi}{3} \Rightarrow \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{20\pi}{3} \Rightarrow \frac{190 - 7\pi}{3} = \frac{20\pi}{3} \Rightarrow \frac{190}{3} = \frac{20\pi}{3} \checkmark \quad x = \frac{7\pi}{6}$$

$$\arccos(\sin 2\pi) = 95 - 2 \cdot 2\pi \Rightarrow \arccos(0) = 95 - 4\pi \Rightarrow 180 - \frac{\pi}{2} = 95 - 8\pi \Rightarrow 180 - 95 = 5\pi - 8\pi \checkmark \quad x = 2\pi$$

$$\arccos(\sin \frac{17\pi}{6}) = 95 - \frac{17\pi}{3} \Rightarrow \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{10\pi}{3} \Rightarrow 180 - \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} \checkmark \quad x = \frac{17\pi}{6}$$

$$\arccos(\sin \frac{9\pi}{2}) = 95 - \frac{9\pi}{2} \Rightarrow \arccos(1) = 0 \Rightarrow 180 - 0 = 0 \checkmark \quad x = \frac{9\pi}{2}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{7\pi}{6}$; $x = 2\pi$; $x = \frac{17\pi}{6}$; $x = \frac{9\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

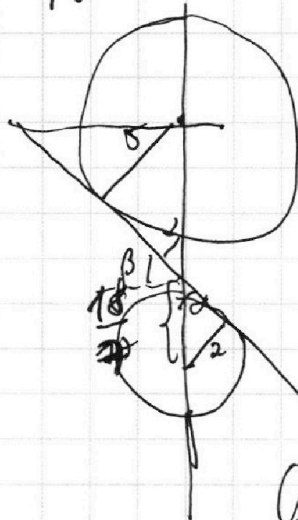
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4. Прямые.



$$\sin \alpha = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}, \quad \text{M.A.} \beta = 30^\circ \Rightarrow \cos \beta = \sin \alpha = \frac{3}{2}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{49}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}, \quad \cos \beta = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Поле экстр. поле $-\frac{5}{62} = -\frac{4\sqrt{2}}{7} \Rightarrow \boxed{a = \frac{35}{24\sqrt{2}}}$

из-за сдвигов симметрии к-эдр. нежна
уравн. с тождеств. нежна равен $-\frac{5}{6e} = \frac{4}{7}$

$$a = -\frac{35}{24\sqrt{2}}, \text{ range of } \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0, \frac{35}{24\sqrt{2}}\right).$$

Antw.: $a \in (-\frac{35}{24\sqrt{2}}; 0) \cup (0; \frac{35}{24\sqrt{2}})$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15. $\log_{11} x - 6 \log_{11} 11 = \log_{11} \frac{1}{121} - 5$ ОДЗ: $x > 0$
 $\log_{11} x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11} 11 - 5 \Rightarrow \log_{11} x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11} 11 - 5$
 пусть $\log_{11} x = t \Rightarrow t - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3} - 5 \Rightarrow t - \frac{6}{t} = -\frac{16}{3} \mid \cdot 3$
 $3t^2 + 16t - 16 = 0$, $3t^2 + 16t - 16 = 0$, $t \neq 0 \Rightarrow \log_{11} x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.

$\log_{11} (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{11,25y} (11^{-13}) - 5$ ОДЗ: $y > 0$; $0,5y \neq 1$ $y \neq 2$
 $\log_{11} (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} = \frac{-13}{3 \cdot \log_{11} (0,5y)} - 5$, пусть $\log_{11} (0,5y) = m$
 $m^4 + \frac{1}{m} = \frac{-13}{3m} - 5 \mid \cdot 3$ $3m^5 + 15m + 16 = 0$, $3m^5 + 15m + 16 = 0$, $m \neq 0$
 $\log_{11} (0,5y) \neq 0$ $0,5y \neq 1$ $y \neq 2$

$3t^5 + 15t - 16 = 0$ $(t^5 + m^5) + 5(t+m) = 0 \Rightarrow (t+m)(t^4 - t^3m + t^2m^2 - tm^3 + m^4) + 5(t+m) = 0$
 $3(t^5 + m^5) + 15(t+m) = 0 \mid :3$ $(t+m)(t^4 - t^3m + t^2m^2 - tm^3 + m^4 + 5) = 0$

$t+m=0 \Rightarrow \log_{11} x + \log_{0,5y} 11 = 0 \Rightarrow \log_{11} (0,5xy) = 0$ $0,5xy = 1 \Rightarrow xy = 2$

$t^4 - t^3m + t^2m^2 - tm^3 + m^4 + 5 = 0$ $(t^2 + m^2)^2 - 2t^2m^2 - tm(t^2 + m^2) + 5 = 0$

пусть $t^2 + m^2 = a$, $tm = b$ $a^2 - b^2 - ab + 5 = 0$
 $a^2 - ab - b^2 + 5 = 0$ $\Delta = b^2 + 4b^2 - 20 = 5b^2 - 20 = 5(b^2 - 4)$

$a = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{b \pm \sqrt{5(b^2 - 4)}}{2}$

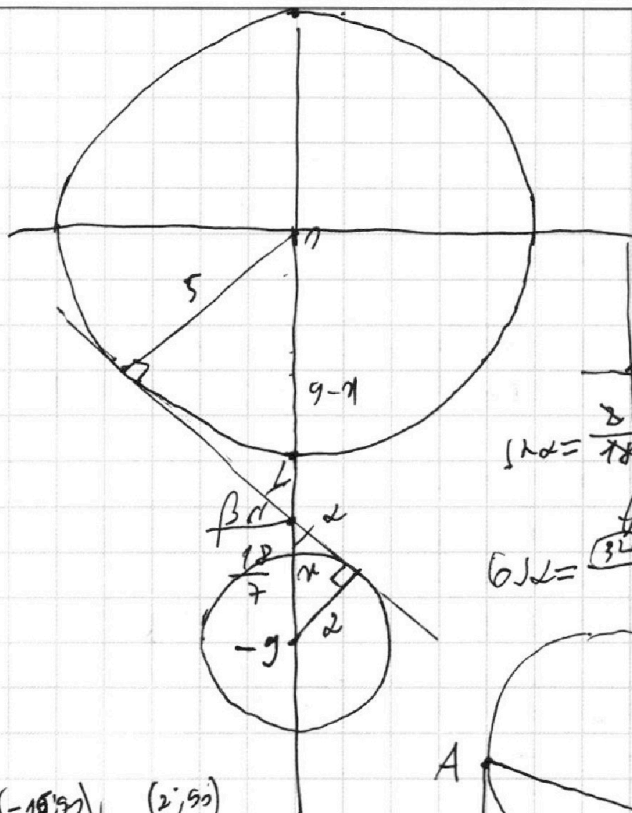
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{9-11}{x} = \frac{5}{2}$$

$$18-11=7x$$

$$x = \frac{18}{7}$$

$$\frac{324}{156} = \frac{128}{128}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 16 \\ \hline 294 \\ 49 \\ \hline 784 \\ 4 \cdot 196 \cdot 32 \\ \hline 196 \cdot 49 \end{array}$$

$$17+32=49$$

$$8445=72$$

$$122 = \frac{217}{189} = \frac{7}{9}$$

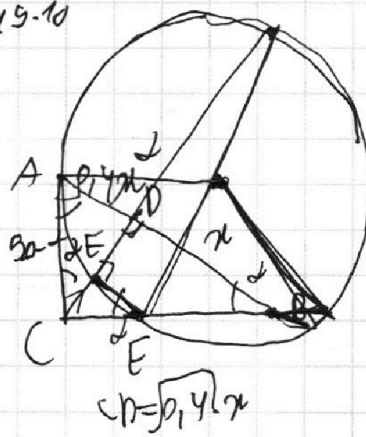
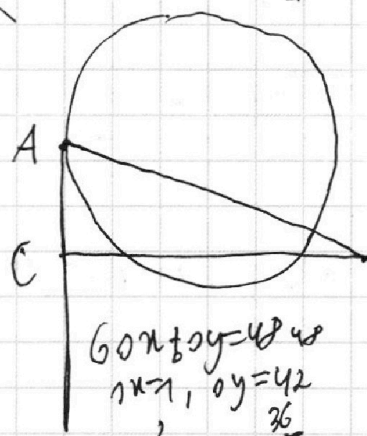
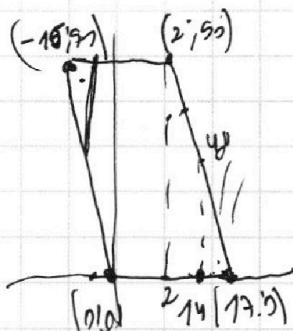
$$6p = \frac{7}{9}$$

$$573 = 9$$

$$612 = \frac{324}{49-4} = \frac{324}{45} = \frac{36}{5}$$

$$\frac{324}{45} = \frac{36}{5}$$

$$612 = \frac{36}{5} = \frac{36 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{432}{60}$$



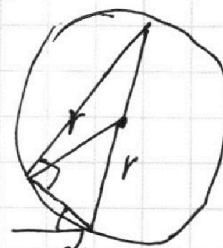
$$60x + 48y = 4848$$

$$1x + 1, 0y = 42$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

$$a^2 = b^2 - 0b + 50$$

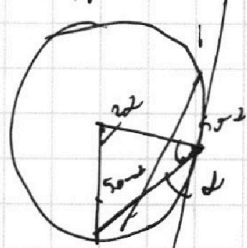
$$(a - a^2 + ab + 2b^2 + 50)$$



$$(t^2 + m^2) = (t + m)^2 - 2tm$$

$$(t^2 + m^2) / (t^2 + m^2 - 2tm) = t^2 + m^2 + 50$$

$$(t^2 + m^2 - 2tm) / (t^2 + m^2 - 2tm) = t^2 + m^2 + 50$$



$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3} \cdot 10 \arccos\left(\frac{5\sqrt{3}}{10}\right) = 9\sqrt{3} - 2\pi$$

$$\arccos\left(\frac{5\sqrt{3}}{10}\right) = \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10}$$

$$0 \leq \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$9\sqrt{3} - 2\pi \leq 10\frac{\pi}{2}$$

$$2\pi \leq \frac{9\sqrt{3}}{5}$$

$$9\sqrt{3} - 2\pi \geq 0$$

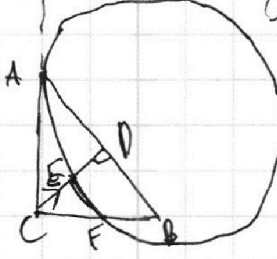
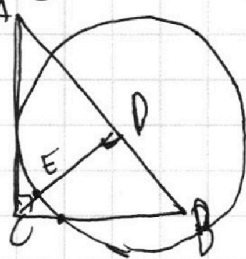
$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\arccos\left(\frac{5\sqrt{3}}{10}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arccos\left(\frac{5\sqrt{3}}{10}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$12\sqrt{3} = 26$$



$$\cos\left(\frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10}\right) = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\cos\left(\frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10}\right) - \sin \frac{\pi}{6} = 0$$

$$\cos\left(\frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$2\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} \sin \frac{\pi}{6} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

$$\sin \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{10} = 0$$

