МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0.5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

Задание 1.

$\{a, b, c\} \in \mathbb{N}$

Пусть $ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot K$, $bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot m$,

$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot n$, тогда из данных равенств имеем:

$a^2 = 2^8 \cdot 3^{17} \cdot 5^{26} \cdot \frac{Kn}{m}$, $b^2 = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{-4} \cdot \frac{Km}{n}$; $c^2 = 2^{24} \cdot 3^{33} \cdot 5^{30} \cdot \frac{mn}{K}$

$(abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot Kmn$ $(\{K, m, n\} \in \mathbb{N})$

Как видим из 2-ого равенства, чтобы b был натуральным, необходимо, чтобы $\frac{Km}{n}$ содержало множитель 5^4 (именно 5^4 для минимальност) а также множитель 3^1 (именно 3^1 для минимальности)

Это возможно например при $K = 5^4$, $m = 3$, $n = 1$.

Тогда имеем: $a^2 = 2^8 \cdot 3^{16} \cdot 5^{30}$; $b^2 = 2^4 \cdot 3^{10}$; $c^2 = 2^{24} \cdot 3^{34} \cdot 5^{26}$

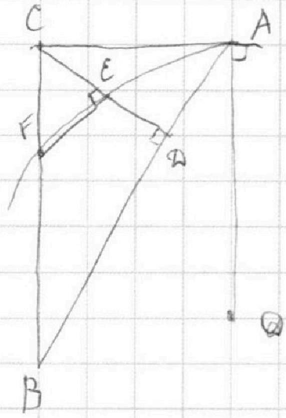
$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$ $b = 2^2 \cdot 3^5$, $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$

Мы подбирали минимально возможные K, m, n, чтобы произведение abc было минимальным (как видим из 4-ого равенства $(abc)^2$ зависит прямопропорционально от K, m, n), поэтому при таких K, m, n произведение минимально.

Итак $\min(abc) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$.

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Задание 2



$AB \parallel EF \Rightarrow CD \perp FE$

Пусть $BD = 5x$, $AD = 2x$, тогда $CD = \sqrt{5x \cdot 2x} = x\sqrt{10}$

Т.к. $AB \parallel EF$, то $\angle DBC = \angle EFC = \angle DCA$.

Отсюда $\frac{BD}{FE} = \frac{CD}{DE}$ и $\frac{AD}{CE} = \frac{CD}{FE}$

$$FE = \frac{BD \cdot DE}{CD} = \frac{CD \cdot CE}{AD}$$

$$\frac{5x \cdot DE}{x\sqrt{10}} = \frac{x\sqrt{10} \cdot CE}{2x} \Rightarrow \frac{DE}{CE} = \frac{10}{10} = 1.$$

Т.е. $DE = CE = y$ и $FE = \frac{BD \cdot DE}{CD} = \frac{5x \cdot y}{x\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} y$.

$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot FE = \frac{1}{2} y \cdot \frac{5}{\sqrt{10}} y = \frac{5}{2\sqrt{10}} y^2$.

$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{10} \cdot x = x^2\sqrt{10}$;

$CD = CE + ED = 2y = x\sqrt{10} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{10}}$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{x^2\sqrt{10}}{\frac{5}{2\sqrt{10}} y^2} = \frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{2 \cdot 10}{5} = \frac{4}{10} \cdot 4 = \frac{16}{10}.$$

Ответ: $\frac{16}{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 3.

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$\arccos a \in [0;\pi] \Rightarrow 0 \le 9\pi - 2x \le \pi \Rightarrow x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$

$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}$

$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$;

$\sin x = \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{4\pi}{10}\right)$;

$\sin x - \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = 0$;

$2\sin\frac{x - \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}}{2}\cos\frac{x + \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}}{2} = 0$;

$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = 0, \\ \cos\left(\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5} = \pi n, \\ \frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi m; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{2}, \\ x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi m}{3}. \end{array}\right.$

$\left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right\} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$,

$\left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}; \frac{27\pi}{6}\right\} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$

Проверкой убеждаемся, что все полученные корни подходят

Ответ: $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

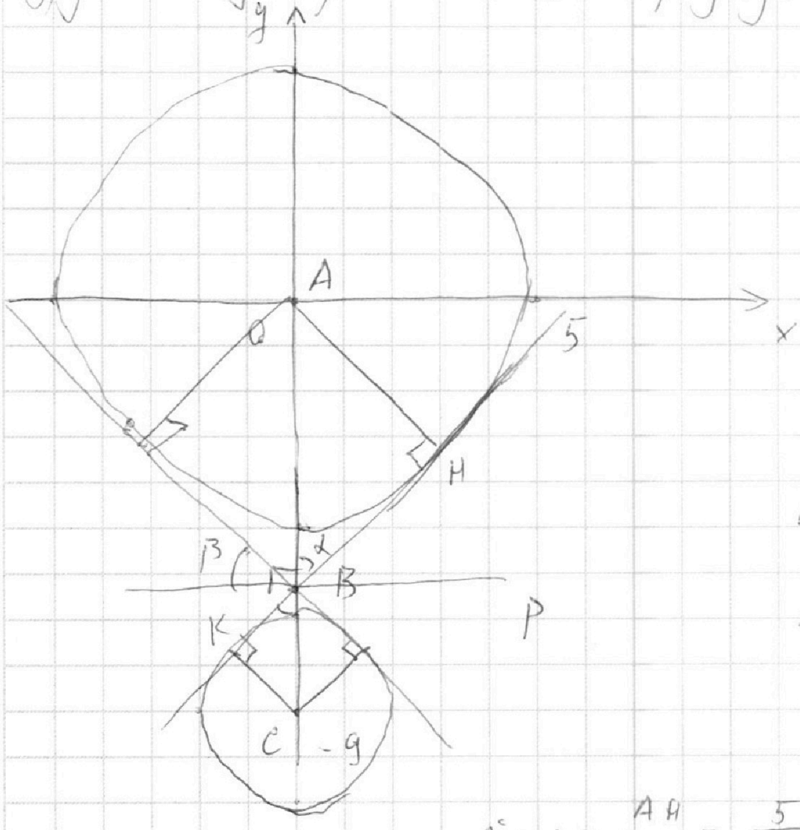
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 4. Ответ: $a \in \left(-\frac{35}{12\sqrt{2}}; \frac{35}{12\sqrt{2}}\right)$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - в = 0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases}$$

Графиком 2-ого уравнение являются две окружности, одна из которых с центром $(0;0)$ и радиусом 5, а другая — с центром $(0;-9)$ и радиусом 2.



Проведём общие касательные

Если прямая $5x+6ay=в$ будет ни

$AC = +9 = AB + BC$

$\triangle AHB \sim \triangle CKB$.

$\frac{CK}{AH} = \frac{BC}{9-BC} \Rightarrow \frac{BC}{9-BC} = \frac{2}{5}$

$5BC = 18 - 2BC$

$BC = \frac{18}{7} \Rightarrow AB = \frac{45}{7}$.

$\sin\alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{5}{\frac{45}{7}} = \frac{7}{9} \Rightarrow ctg^2\alpha = \frac{81}{49} - 1 = \frac{32}{49}$

Прямая $p \parallel Ax \Rightarrow tg\beta = tg(\frac{\pi}{2}-\alpha) = ctg\alpha = \boxed{tg^2\alpha = \frac{49}{32}}$

$= \sqrt{\frac{32}{49}} = \frac{2\sqrt{2}}{7}$. Значит, если угол наклона в прямой $y = \frac{в}{6a} - \frac{5}{6a}x$ будет меньше, чем $tg\beta = \frac{2\sqrt{2}}{7}$, то ~~что~~ она будет иметь менее 4-ёх пересечений с окружностями.

Значит $\left|-\frac{5}{6a}\right| < \frac{2\sqrt{2}}{7}$, $\frac{5}{6a} < \frac{2\sqrt{2}}{7}$ $a \in \left(-\frac{35}{12\sqrt{2}}; \frac{35}{12\sqrt{2}}\right) \setminus \{0\}$ 4

А также $a=0$ тоже подходит.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задание 5.

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{\sqrt{x^3}} \frac{1}{121} - 5$; $(x>0,\ x\neq 1)$

$\log_{11}^4 x - 6\cdot\frac{1}{\log_{11}x} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\log_{11}x} - 5 \ \Big|\times(3\log_{11}x)$; $(\log_{11}x = t)$

$3t^5+15t-16=0$ (1)

$\log_{11}^4\left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{\frac{1}{2}y} 11 = \log_{\sqrt{\frac{1}{2}y^3}}\left(11^{-13}\right) - 5$; $\left(\frac{1}{2}y = z,\ z>0,\ z\neq1\right)$

$\log_{11}^4 z + \frac{1}{\log_{11}z} = -\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{\log_{11}z} - 5 \ \Big|\times(3\log_{11}z)$, $(\log_{11} z = w)$

$3w^5+15w+16=0$ (2)

Заметим, что $f(a)=3a^5+15a$ является возрастающей функцией ($f'(a)=15a^4+15\geq 15$), а значит уравнения (1) и (2) имеют один действительный корень.

По т. Виета для уравнения (1) и (2) имеем:

$t_1t_2t_3t_4t_5 = -\left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{16}{3}$

$t_1^5=\frac{16}{3}$ (т.к. один действ. корень)

$w_1w_2w_3w_4w_5 = -\frac{16}{3}$

$w_1^5 = -\frac{16}{3}$ (т.к. один действ. корень)

Отсюда имеем $\log_{11}^5 x = \frac{16}{3}$, $\log_{11}^5 z = -\frac{16}{3}$; $\log_{11}x = \sqrt[5]{\frac{16}{3}}$, $\log_{11} z = -\sqrt[5]{\frac{16}{3}}$.

$x = 11^{\sqrt[3]{\frac{16}{3}}}$, $z = 11$

Причём $t_1=-w_1$ $\left(3t_1^5+15t_1-16 = -3w_1^5-15w_1-16 = -(3w_1^5+15w_1+16)=0\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Запомним это ($t=-w$).

Теперь найдем необходимое произведение:

$xy = 11^{t} \cdot 2z = 11^{t} \cdot 2 \cdot 11^{w} = 2 \cdot 11^{(t+w)} = 2 \cdot 11^{0} = 2$

Значит $xy = 2$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x^2+y^2=5^2$

$x^2+(y+9)^2=2^2$

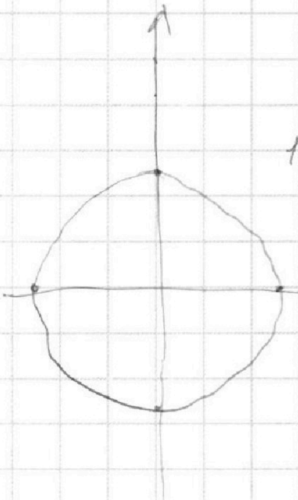
$t^{\frac{1}{2}}y=z=11^w$

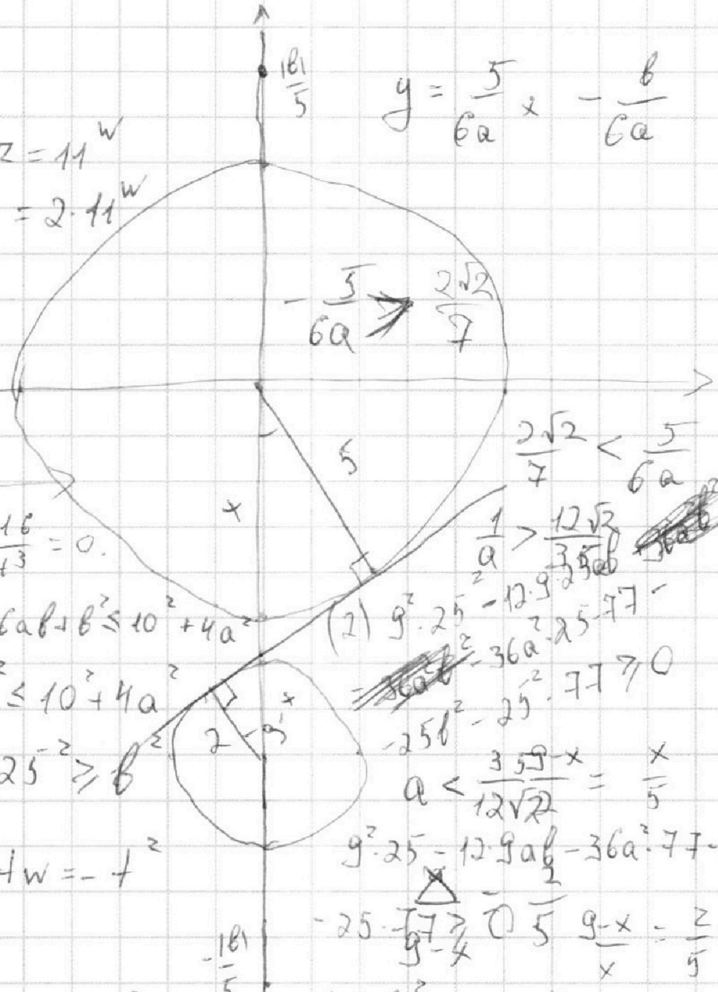
$x=11^t \quad y=2\cdot 11^w$

xy

$11^t\cdot 2\cdot 11^w=$

$=2\cdot 11^{t+w}$





$y=\frac{5}{6a}x-\frac{b}{6a}$

$-\frac{5}{6a} \to \frac{2\sqrt2}{7}$

$\frac{2\sqrt2}{7}<\frac{5}{6a}$

$\frac{1}{a}>\frac{12\sqrt2}{35}$

$3t^2+\frac{15}{t^2}-\frac{16}{t^3}=0.$

$(9\cdot 6a)^2+2\cdot 9\cdot 6ab+b^2\le 10^2+4a^2$

$\begin{cases}(54a+b)^2\le 10^2+4a^2\\(30a)^2+25^2\ge b^2\end{cases}$

(2) $9^2\cdot 25-12\cdot 9\cdot ab-36a^2\cdot 25\cdot 77-$

$-36a^2\cdot 25\cdot 77\ge 0$

$-25b^2-25^2\cdot 77$

$a<\frac{35\sqrt{9}-x}{12\sqrt2}=\frac{x}{5}$

~~$a=0$: $5x=b$~~

$x=\frac{b}{5}$

$9^2\cdot 25-12\cdot 9ab-36a^2\cdot 77-b^2-$

$-25\cdot 77\ge 0$ $\quad \frac{2}{5}$ $\quad \frac{9-x}{x}=\frac{2}{5}$

$4w=-t^2$

$\frac{b}{5}\in(-2;2)$

$b\in(-10;10)$

$\begin{cases}77\cdot 36a^2+2\cdot 6\cdot 9ab+b^2\le 25\cdot 4\\25\cdot 36a^2-b^2+25^2\ge 0\end{cases}$

$45-5x=2x$

$y=0$: $5x=b$

$\sin x=\frac{7\cdot 5}{45}=\frac{7}{9}$ $\quad (45)^2-10^2=35\cdot 55=$

$y=\frac{-5}{6a}x+\frac{b}{6a}$

$(5x)^2+25(y+9)^2=10^2$ $\quad 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ $=25\cdot 7\cdot 11$

$36a^2y^2-12aby+b^2+25(y^2+18y+81)=10^2$ $\quad x=\frac{45}{7}$

$b<0$:

$(36a^2+25)+(18\cdot 25-12ab)y+b^2+25\cdot 81-10^2=0.$

(1) $25\cdot 36a^2-b^2+25^2\ge 0.$

$\begin{cases}x^2+y^2=5^2\\5x+6ay=b \ (2)\end{cases}$

$\frac{D}{4}=(9\cdot 25-6ab)^2-(36a^2+25)(b^2+25\cdot 77)\ge 0.$

$(b-6ay)^2+25y^2=25$

$-t^2$ $\quad ctg\alpha=\frac{4\sqrt2}{7}$ $\quad ctg^2\alpha=\frac{81}{49}-1=\frac{32}{49}$

$36a^2y^2-12aby+b^2+25y^2=25^2$

$\frac{D}{4}=36a^2b^2-(36a^2+25)(b^2-25^2)=$

$(36a^2+25)y^2-12aby+b^2-25^2=0.$

$=36a^2b^2-36a^2b^2+36a^2\cdot 25^2-25b^2-$

$3t(t^4+5)=16$

$+25^3=(6\cdot 25)^2a^2-25b^2+25^3\ge 0.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1. $ab : 2^6 3^{13} 5^{11}$

$bc : 2^{14} 3^{21} 5^{-13}$

$ac : 2^{16} 3^{25} 5^{-28}$

$\{k, m, n\} \geq 1$

$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} k$

$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{-13} m$ $\qquad abc^2 = 2^{30} \cdot 3^{46} \cdot 5^{-41} \cdot mn$

$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{-28} n$ $\qquad c^2 = 2^{24} \cdot 3^{33} 5^{-30} \cdot \frac{mn}{k}$ $\qquad m = 3^1$

$b^2 = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{-4} \frac{km}{n}$ $\qquad k = 5^4$

$a^2 = 2^8 \cdot 3^{17} \cdot 5^{26} \cdot \frac{kn}{m}$ $\qquad n = 1$

$(abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot kmn = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{56} mn = 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{56} n =$
$= 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{56}$

$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$

$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 1$

$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$

$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{2} : -\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}$

$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{10\pi m}{6} : \frac{7\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{27\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}$

$27\pi \quad -\frac{3\pi}{6} \quad \frac{27\pi}{6} \vee \frac{9\pi}{2}$

$\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{3x}{5} = \frac{7\pi}{10} + \pi m$

$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi m}{3}, \frac{17\pi}{6}, \frac{9\pi}{2}$

3 $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, 2\pi,$

$\frac{3\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}$

$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) =$

$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$ $\qquad \frac{9\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2}$ $\qquad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$ $\qquad 2\pi + \frac{5\pi}{6}$

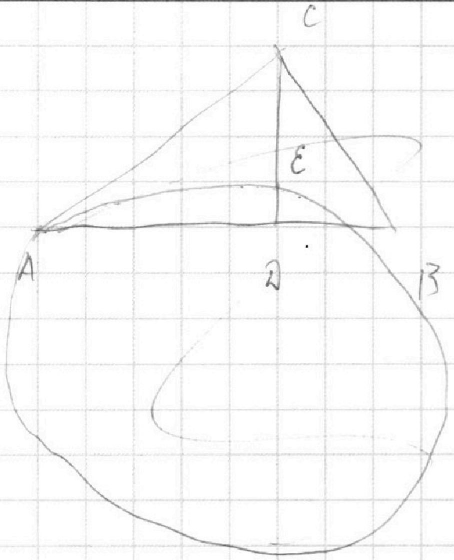
$\pi + \frac{\pi}{6}$

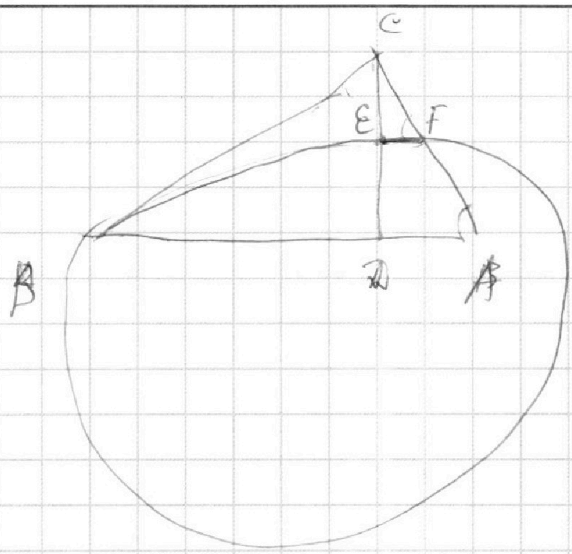
$\sin x - \sin\left(\frac{5\pi}{10} + \frac{x}{5} - \frac{9\pi}{10}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin \frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5} = 0 \\ \cos \frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5} = 0 \end{array}\right.$ $\qquad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

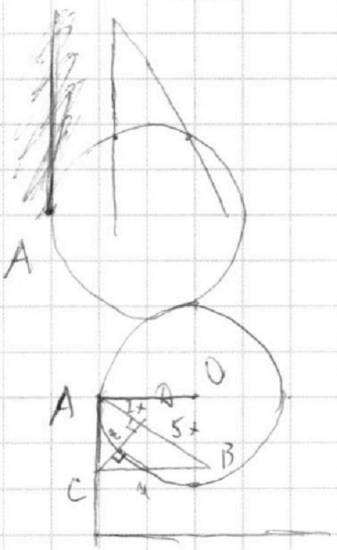
$2 \sin \frac{x - \frac{x}{5} + \frac{4\pi}{10}}{2} \cos\left(\frac{x + \frac{x}{5} - \frac{4\pi}{10}}{2}\right) = 0$

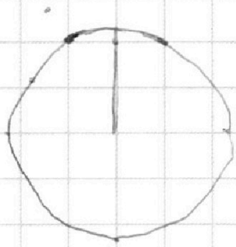
$\frac{20\pi}{3}, \quad 9\pi - \frac{7\pi}{3} \quad \frac{10\pi}{3} \quad 9\pi - \frac{17\pi}{3}$

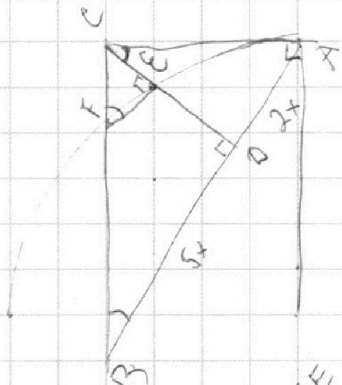




$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$ $AD = 2x$ $BD = 5x$







$\frac{DE}{CE} = \frac{10}{25} = 1$

$h = x\sqrt{10} - 2y$

$S_{ABD} = x^2\sqrt{10}$

$FE = \frac{5}{\sqrt{10}}y$

$\frac{5 \cdot DE}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{BC \cdot CE}}{2}$

$\frac{BD}{FE} = \frac{CE}{DE}$

$FE = \frac{BD \cdot DE}{CD} = \frac{CD \cdot CE}{AD}$

$\frac{AD}{CE} = \frac{ED}{FE}$

$CE \cdot FE = BD \cdot DE = AD \cdot CD$

$5x \cdot DE = 2x \cdot CD$

$\frac{DE}{CD} = \frac{2}{5}$

$CE = 2y$

$ED = 3y$

$\frac{BD}{FE} = \frac{CE}{CD}$

$FE = \frac{BD \cdot CD}{CE}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5. $\log_{11}^4 x - 6\frac{1}{\log_{11} x} = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$ $x>0, x \neq 1$

$\log_{11}^4 x + \frac{2}{3}\frac{1}{\log_{11} x} - 6\frac{1}{\log_{11} x} + 5 = 0$ $\frac{1}{121} = 11^{-2}$

$3t^5 + 15t - 16 = 0$. $\log_{11} x = t$.

$t \in (0;1)$ $3(x-t_1)(x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0$.

$z = \frac{1}{2}y$

$\log_{11}^4(\frac{1}{2}y) + \log_{\frac{1}{2}y} 11 = \log_{\frac{1}{8}y^3}(11^{-13}) - 5$

$\log_{11}^4 z + \frac{1}{\log_{11} z} = -\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{\log_{11} z} - 15 \mid \times 3$ $w = \log_{11} z$.

$x \in (1;11)$

$3\log_{11}^5 z + 15\log_{11} z + 16 = 0$. $t_1 \in (0;1)$ $z \in (\frac{1}{11}; 1)$

$3w^5 + 15w + 16 = 0$. $w \in (-1;0)$ $(x-t_1)(x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0$

$-t_1 d = -\frac{16}{3}$

$w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 = -\frac{16}{3}$ $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \neq d$ $15t^4 + 15 = 0$.

$t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 = \frac{16}{3}$ $15w^4 + 15 = 0$

$t = -w$ $t_1 d = \frac{16}{3}$

~~$5w - w^5$~~ $15t = 16 - 3t^5$

$(t_1 w_1)(t_2 w_2)(t_3 w_3)(t_4 w_4)(t_5 w_5) = -\frac{4^4}{3^2}$ $3ax^4 - tx^4 = 0$

3 $-w_1 d_1 = \frac{16}{3}$

$(x-t)\ldots d_1 = 0$ $d = \frac{16}{3t}$

$9t^5w^5 + 45tw^5 - 16\cdot 3w^5 +$ $w_1 d_1 = -\frac{16}{3}$

$(x+t)\ldots d_2 = 0$. $(twd)^2 = \frac{16^2}{3^2}$ $3 - t$

$+45t^5w - 16\cdot 15w + 16\cdot 3t^5 + 16\cdot 15t - 256 = 0$.

$td = \frac{16}{3}$ $-td_1 = -\frac{16}{3}$ $td_1 = \frac{16}{3}$ $a = t$.

$td_2 = \frac{16}{3}$

$wd = \frac{16}{3}$ $+d_2 = \frac{16}{3}$

$9t^5w^5 + 45tw^5 + 45t^5w - 16(3w^5 + 15w + 16) + 16(3t^5 + 15t - 16) - 256$.

$twd^2 = -\frac{16^2}{3^2}$ $t^2d^2 = \frac{16^2}{3^2}$ $\frac{d_1}{d_2} = 1$ $x^2 - 2tx + t^2 = 0$

$9t^5w^5 + 45tw^5 + 45t^5w + 256 = 0$. $w = -t$ $t^4 + 15 = d$. $(x-t)(x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0$.

$\frac{w}{t} = -1$

$a = t$

$t(t^4 + 15) = \frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3}$ $15x = dx - ctx$ $bx^3 - tax^3 = 0$. $c = t^3$

$3t(t^4 + 15) = 16$ $15 = d - t^4$ $b = t^2$ $d =$