



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.

$abc - ?$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow b < a < c$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a : 2 \text{ и } a : 7$$

$$b : 2 \text{ и } b : 7$$

$$c : 2 \text{ и } c : 7$$

Также замечаем, что:

$$\begin{cases} abc^2 : 2^{32} \cdot 7^{29} \\ abc^2 : 2^{40} \cdot 7^{58} \\ a^2bc : 2^{38} \cdot 7^{50} \end{cases} \Rightarrow a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 : 2^{32+40+38} \cdot 7^{50+58+29}$$

$$a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 : 2^{110} \cdot 7^{137}$$

Т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $abc \geq 0$

Найдём целую часть с округлением
большую сторону от
делителя показателя на 4

$$\begin{array}{r|l} 110 & 4 \\ 8 & 27,5 \\ \hline 30 & \\ -28 & \\ \hline 20 & \\ -20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 137 & 4 \\ 12 & 34,25 \\ \hline 17 & \\ 16 & \\ \hline 10 & \\ 8 & \\ \hline 20 & \\ 20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$a \cdot b \cdot c = : 2^{27,5} \cdot 7^{\frac{137}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = 2^{28} \cdot 7^{35}$$

$$\text{Answer: } 2^{28} \cdot 7^{35}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

$b \neq 0$, т.к. $a, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})}$$

$$= \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{b}}{\frac{a^2}{b^2} - 7\frac{a}{b} + 1} = \frac{\left(\frac{a}{b} + 1\right) \cdot \frac{1}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7\left(\frac{a}{b}\right) + 1}$$

$$x = \frac{a}{b}$$

т.к.

$$D = 49 - 4 = 45$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{(x+1) \frac{1}{b}}{x^2 - 7x + 1}$$

$$\frac{7-3\sqrt{5}}{2} - 1$$

$$7-3\sqrt{5} - 2$$

$$5-3\sqrt{5}$$

$$81-45$$

$$36 > 0$$

$$= \frac{(x+1)}{b\left(x - \frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$= \frac{x+1}{b(x^2-7x+1)}$$

#

$$0 < \frac{7-3\sqrt{5}}{2} < 1$$

$$= \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{\left(\frac{a}{b} + 1\right)}{b\left(\left(\frac{a}{b} + 1\right)^2 - 9\frac{a}{b}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{b} - 9\frac{a}{b}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$$

Заметим, что $3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) =$

$$= 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = 1 - 9x$$

Значит, $1 - 9x = \left(\left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \right)^2 - \left(\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \right)^2 \right) =$

$$= \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \right) \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \right)$$

Подставим

$$\left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \right) \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 \right) = 0$$

Или

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} & \sim -6x + 2 + 3x^2 = 3x^2 + 3x + 1 \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$9x = 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \cup \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{8}{9} \right)^2 \cup \frac{1}{3}$$

$$1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \cup \frac{8}{9} \cup \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{64}{81} > \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{9} \Rightarrow x = \frac{1}{9} - \text{корень}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{3x^2} - 6x + \cancel{2} = \cancel{1} - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \cancel{3x^2} + 3x + \cancel{1}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x$$

$$4(3x^2 + 3x + 1) = 81x^2$$

$$12x^2 + 3x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 69 = 285$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{285}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{285}}{2 \cdot 69} = \frac{3 \pm \sqrt{285}}{138}$$

$$\begin{array}{r} 9x \geq 0 \\ x > 0 \\ \begin{array}{r} 3 \\ 69 \\ \times 4 \\ \hline 276 \end{array} \end{array}$$

$$1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 0$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} < 1$$

$$3x^2 + 3x + 1 < 1 \quad | : 3$$

$$3x^2 + 3x < 0$$

$$x(x+1) < 0$$

$$\begin{cases} x \in (-1; 0) \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

Значит, реш. уравнения является
ег. корень $x = \frac{1}{9}$

Ответ: $\frac{1}{9}$

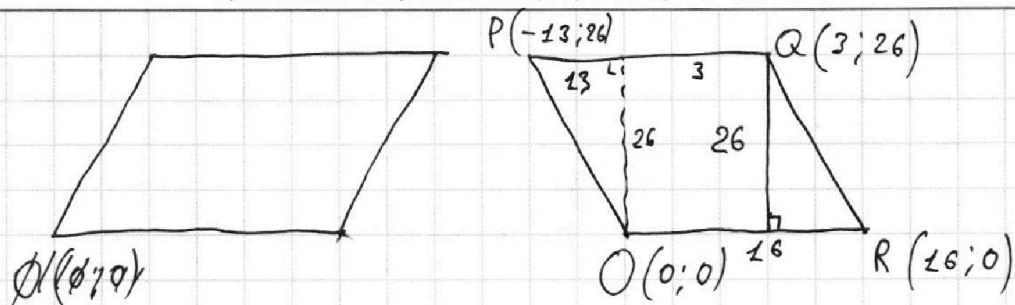
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$\vec{AB} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

$$\vec{AB} \{x_2 - x_1; 14 + 2(x_1 - x_2)\}$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$y_2 - y_1 = 14 + 2x_1 - 2x_2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 & \sim y = -ax + 8b \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 = 4^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 4^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + (y - 12)^2 = 4 \end{cases}$$

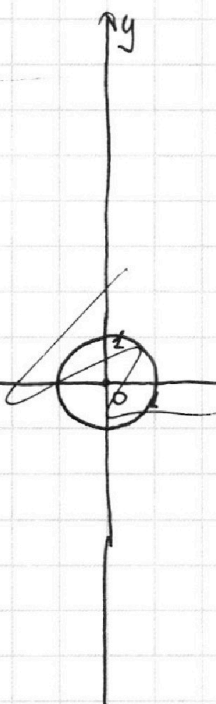
$$\begin{cases} x^2 + (-ax + 8b)^2 = 1 \\ x^2 + (-ax + 8b - 12)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &(-ax + 8b - 12 + ax - 8b) \cdot \\ &\quad \cdot (-2ax + 16b - 12) = 15 \end{aligned}$$

$$-2ax + 16b - 12 = \frac{15}{4}$$

$$\begin{cases} \sqrt{1 - x^2} + 8b = ax \\ \sqrt{1 - x^2} = ax - 8b \end{cases}$$

$$\sqrt{1 - x^2} + 8b = ax$$



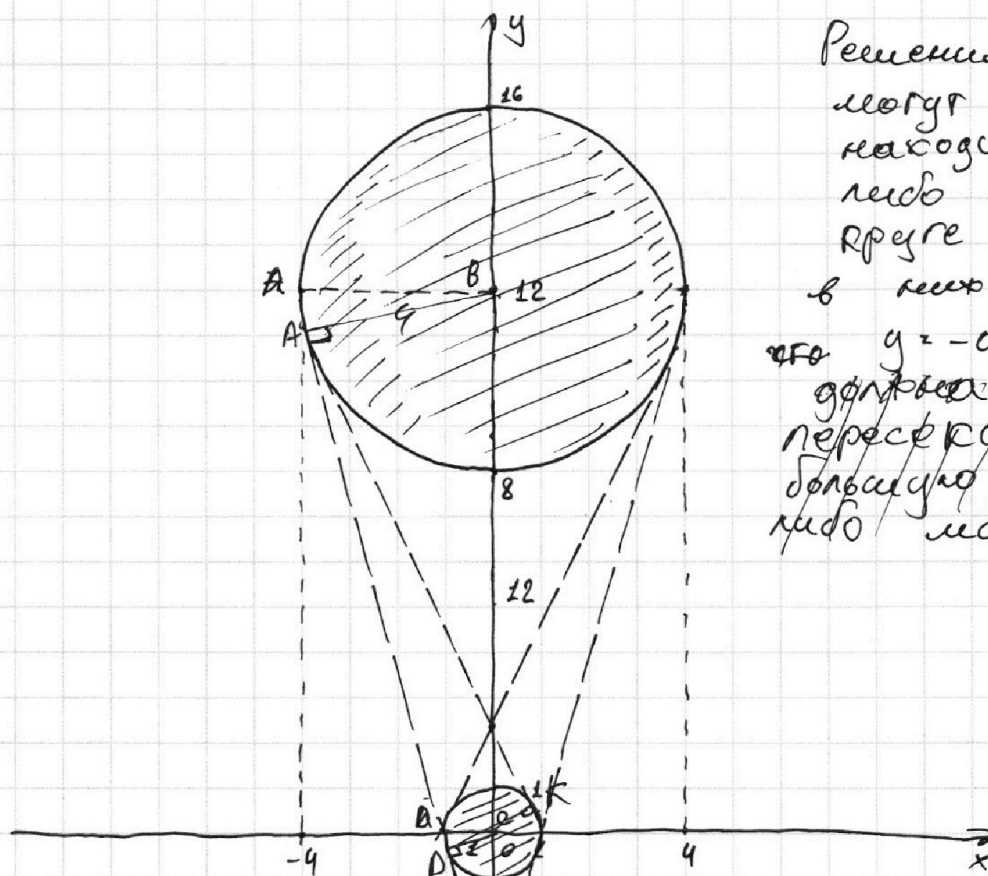
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решения
могут
находиться,
либо в верхней
части, либо
в нижней =>
тогда $y = -ax + 8b$
должна
пересекать, либо
большую окружность
либо маленькую

Значит, единственными возможными
прямыми будут, прямые
касательные к обеим окружностям,
2 реш.
Так как:

Если прямая касается одной
окружности - 1 реш.

Если прямая пересекает
одну окружность - интервал

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 = 16 \end{cases} \quad y = kx + b \\
 & \begin{cases} x^2 + k^2x^2 + 2kx + b^2 = 1 \\ x^2 + (-ax + 8b)^2 = 1 \\ x^2 + (-ax + 8b - 12)^2 = 16 \end{cases} \\
 & y^2 - 24y + 144 - y^2 = 15 \\
 & 24y + 129 = 0 \quad y = \frac{48}{8} = 6
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

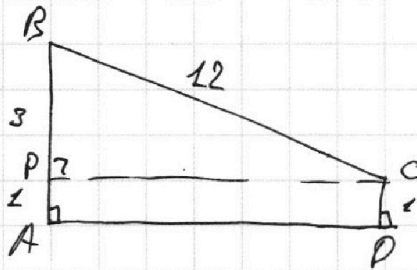
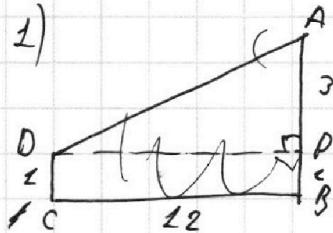
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассм.

$ABCD$:

Найти $\tan \angle BCP$ - ?

$AB = 4$
 $BC = 12$
 $CD = 1$



$$\sin \angle BCP = \frac{BP}{BC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\cos \angle BCP = \frac{PC}{BC} = \frac{\sqrt{3^2 - 1^2}}{4} = \frac{\sqrt{8}}{4}$$

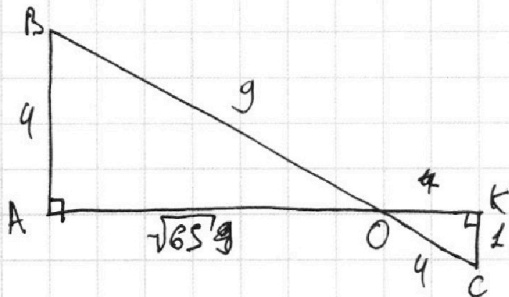
$$\tan \angle BCP = \frac{1}{\frac{\sqrt{8}}{4}} = \pm a$$

$$a = \pm \frac{1}{\frac{\sqrt{8}}{4}} = \pm \frac{4\sqrt{8}}{8} = \pm \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{25}}{\frac{5}{5}} = \pm 5$$

2) $KCAB$

Найти $\tan \angle BOA$ - ?



$\cos \angle BOA$

$$\tan \angle BOA = \frac{4}{\sqrt{65}} = \pm a$$

$$a = \pm \frac{4}{\sqrt{65}}$$

Ответ: $a \in \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{25}}; \pm \frac{4}{\sqrt{65}} \right\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})} \\ & = \frac{a+b+3\sqrt{ab}-3\sqrt{ab}}{(a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})} \end{aligned}$$



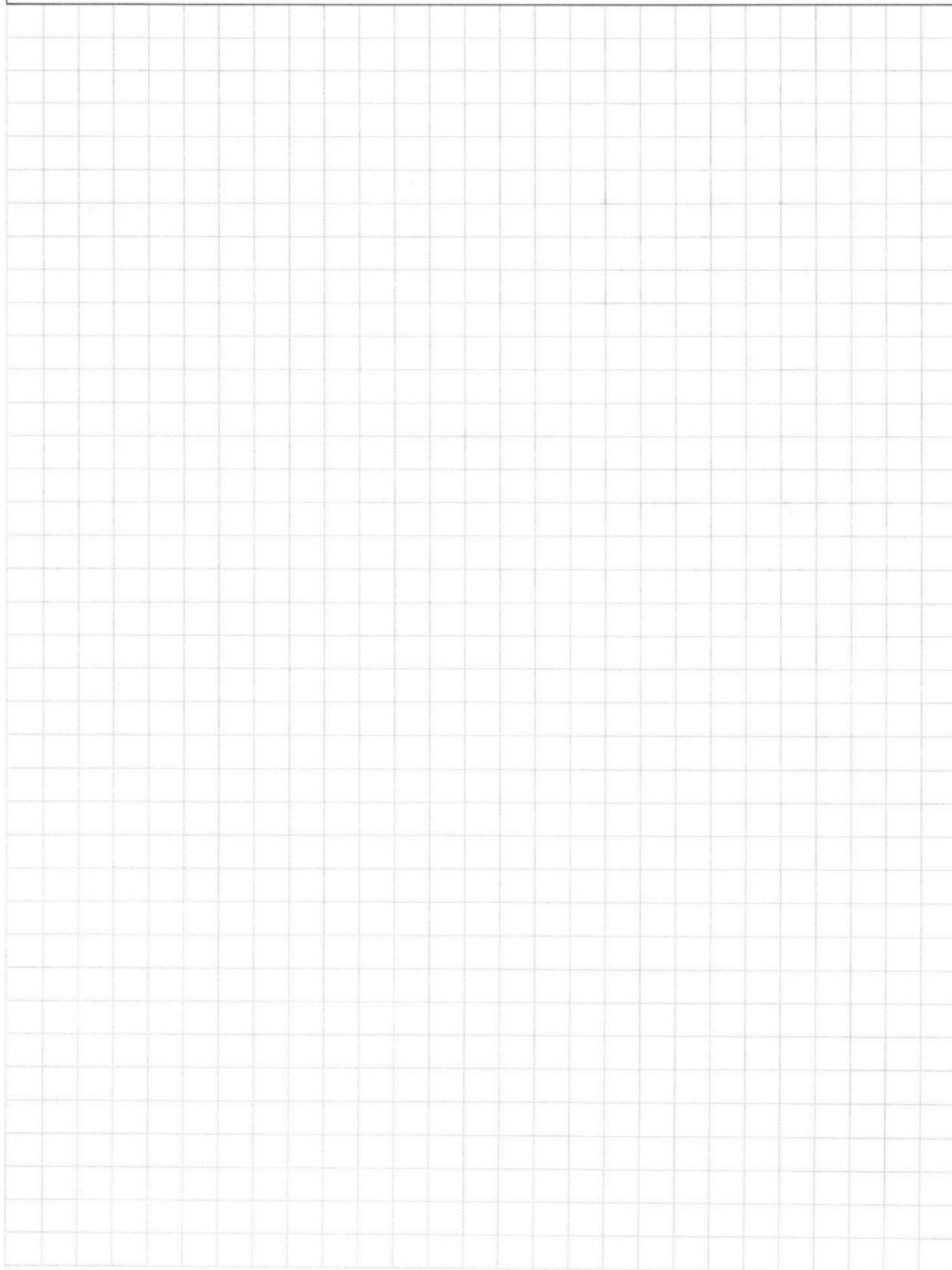
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



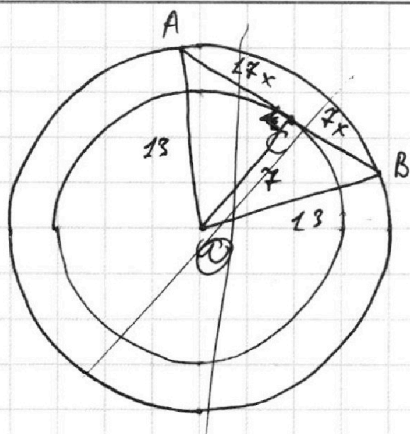
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$$

$$AB = 24x - ?$$

$$R_w = 7$$

$$R_r = 13$$

$$OC \perp AB \text{ п. п. п.}$$

$$AB \text{ — диаметр}$$

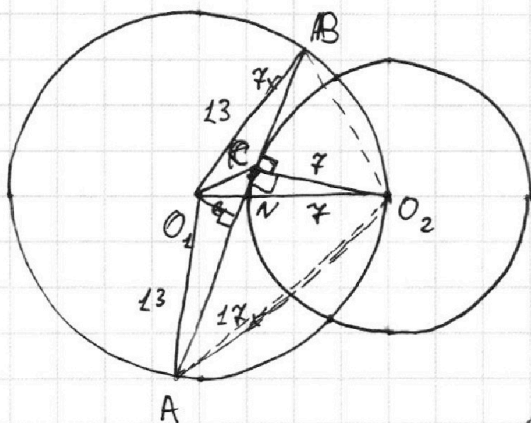
$$O_1N = R_r - R_w =$$

$$= 13 - 7 = 6$$

$$\text{Рассчит. } \triangle O_1O_2K:$$

$$O_1O_2 = 13$$

$$KO_2 = 7$$



$$\text{Проведем } KO_2 \perp AB$$

$$KO_2 \cap AB = C$$

$$\angle ACO_2 = \angle KCB = 90^\circ$$

$$= \frac{\angle ACO_2 + \angle KCB}{2} =$$

$$\Rightarrow \angle AO_2O_2 + \angle KO_2B = 180^\circ$$

$$CO_2 \cdot KC = AC \cdot BC$$

$$KC = 17x^2$$

$$\angle KAB = \angle KO_2B, \text{ (как углы вписанные)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle O_2BC \sim \triangle AKC \text{ (по острому углу)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CO_2}{AC} = \frac{BC}{KC} \quad \frac{7}{17x} = \frac{7x}{9}$$

