



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



① [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

② [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

③ [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

④ [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

* 5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

⑥ [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

* 7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N1

$$a, b, c \in \mathbb{N}, \quad ab : 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc : 2^{14} \cdot 7^{18}, \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39}.$$

$$\min(ab, c) = ?$$

Решение. Через $\nu_p(m)$ будем обозначать степень вхождения простого числа p в натуральное число m (например, $\nu_3(18) = 2$).

Заметим, что т.к. $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$, то

$$ab, c : 7^{39} \Leftrightarrow \nu_7(ab, c) \geq 39. \quad \text{Заметим,}$$

что из условия:
$$\begin{cases} \nu_2(a) + \nu_2(c) = \nu_2(ac) \geq 23 \\ \nu_2(b) + \nu_2(c) = \nu_2(bc) \geq 14 \\ \nu_2(a) + \nu_2(b) = \nu_2(ab) \geq 15 \end{cases}$$
 (даже, что $\nu_p(m) + \nu_p(n) = \nu_p(mn)$)

Сложив эти нерав-ва, получим:

$$2(\nu_2(a) + \nu_2(b) + \nu_2(c)) = 2\nu_2(ab, c) \geq 55.$$

Число слева — четное, а справа — нечетное,

откуда (абсурдно) $2\nu_2(ab, c) \geq 56 \Leftrightarrow$

$$\nu_2(ab, c) \geq 28, \text{ и раз } \nu_7(ab, c) \geq 39, \text{ получим}$$

$$ab, c : 2^{28} \cdot 7^{39}, \text{ откуда } \min(ab, c) = 2^{28} \cdot 7^{39}.$$

Покажем, что минимум достигается. Даже, что

подходят числа $a = 2^{11} \cdot 7^{21}$, $b = 2^4$ и $c = 2^{18} \cdot 7^{13}$.

Даже, что при таких a, b, c все условия задачи выпол-
няются и $ab, c = 2^{28} \cdot 7^{39}$.

Ответ. $\boxed{2^{28} \cdot 7^{39}} \rightarrow$
 $= ab, c$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2

$$a, b \in \mathbb{N}, \frac{a}{b} - \text{краток}; \quad m \in \mathbb{N}, \frac{a+b}{a^2-4ab+b^2}$$

Сокр. на m . $\max(m) = ?$

Деление. Ясно, что $\frac{a}{b} - \text{краток}$.

$\Leftrightarrow a$ и b взаимно-просты $\Leftrightarrow$

$\text{НОД}(a; b) = 1$. Заметим, что

$a+b \vdots m$ и $a^2-4ab+b^2 \vdots m$, откуда

$$a^2-4ab+b^2 = (a+b)^2 - 6ab \vdots m, \text{ и так}$$

$a+b \vdots m$, то $6ab \vdots m$. Докажем,

~~что~~ что $\text{НОД}(a; m) = \text{НОД}(b; m) = 1$.

Пусть это не так, и $\text{НОД}(b; m) =$

$= n \in \mathbb{N}, n > 1$. Так $a+b \vdots m$ и

$m \vdots n$, то $a+b \vdots n$, и так $b \vdots n$, то

$a \vdots n$, откуда $\text{НОД}(a; b) \geq n > 1$. Но

$\text{НОД}(a; b) = 1$, и мы пришли к противо-

речию. Значит, $\text{НОД}(b; m) = 1$. Аналогично

$\text{НОД}(a; m) = 1$. Следовательно тогда

$6ab \vdots m$ и $\text{НОД}(a; m) = \text{НОД}(b; m) = 1$,
(обратно) $\Rightarrow$ (тогда и только тогда)
что возможно лишь когда $6 \vdots m$. $\rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение. Отсюда, $m=1$, $m=3$ или

$m=9$. Значит, $\max(m)=9$.

Покажем, что максимум достигается.

Возьмем $a=1$ и $b=17$. Ясно, что $\frac{a}{b} = \frac{1}{17}$ —

несокр. дроби того, $a+b=18:9=m$ и

$$a^2 - 4ab + b^2 = 289 - 4 \cdot 17 + 1 = 290 - 119 =$$

$$= 171 : 9 = m. \text{ Значит, и числитель,}$$

и знаменатель ~~являются~~ дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 4ab + b^2}$$

делится на $m=9$, и

максимум $m=9$ достигается.

Ответ.

$$\boxed{m=9}$$



$$2R_{gwb} = BQ^2 - 49 = BC^2 = 49x^2 \rightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



откуда $AQ = \sqrt{49 + 289x^2}$ и
 $BQ = \sqrt{49 + 49x^2}$. По теореме
синусов в $\triangle AQB$:

$$\frac{AB}{\sin \angle AQB} = \frac{24x}{\sin \angle AQB} = 2 \cdot 13 = 26,$$

откуда $\sin \angle AQB = \frac{12}{13} x \leq 1$,
и $0 < x \leq \frac{13}{12}$. Заметим.

$QC = 4$, $QC \perp AB$ как радиус

в точку касания, откуда:

$$\begin{aligned} S_{\triangle AQB} &= \frac{QC \cdot AB}{2} = 12 \cdot 4 \cdot x = \\ &= \frac{AQ \cdot QB \cdot \sin \angle AQB}{2} = \\ &= \frac{\frac{12}{13} x \sqrt{49 + 49x^2} \sqrt{49 + 289x^2}}{2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\sqrt{49 + 49x^2} \sqrt{49 + 289x^2} = 182.$$

Очевидно, что ^{длина} хорды AB может иметь

только 1 значение, т.е. наше ~~уравнение~~

число $0 < x \leq \frac{13}{12}$ в наших условиях

~~то~~ может иметь только 1 значение.

Значит, при наших ~~данных~~ x наше уравнение $\rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Предложение.

имеет

~~только одно~~ равно 1 решение.

Заметим, что подходит

$0 < x = 1 \leq \frac{13}{12}$. Действительно, при

$$x=1: \sqrt{49+49x^2} \sqrt{49+289x^2} = \sqrt{98} \sqrt{338} = \\ = \sqrt{33124} = 182, \text{ т.е. } x=1 - \text{корень.}$$

Значит, единственное решение

нашего уравнения это $x=1$.

Когда, $AB = 24x = 24$.

Ответ.

$$\boxed{AB = 24}$$

→



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 2x.$$

Решение. ~~итерация~~

Заметим. $1 - 2x = (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1 + 1).$

Замена: $a := 3x^2 - 6x + 2$, $b := 3x^2 + 3x + 1$.
Тогда $1 - 2x = a - b$.

Отсюда: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$, $a, b \geq 0$.

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) = 0.$$

2 случая:

① $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$. $\Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$.

$$\Leftrightarrow a = b, a, b \geq 0. \quad \Leftrightarrow$$

$$a = b, a \geq 0. \quad \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1,$$
$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0. \quad \text{Раскроем}$$

уравнение $3x^2 + 3x + 1 = 0$.

Его дискриминант D равен

$$D = 9 - 3 \cdot 4 = -3 < 0, \quad \text{значит,}$$

$$3x^2 + 3x + 1 > 0 \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}. \quad \rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.

отсюда $3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 - 6x + 2$,

и отсюда $9x$ не равно 0, ибо $\forall x \in \mathbb{R}$

$3x^2 + 3x + 1 > 0$. Значит, $9x = 1$,

откуда $\boxed{x = \frac{1}{9}}$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 = 0$, т.е.

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1, a, b \geq 0. \Leftrightarrow$

$a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = 1, a, b \geq 0. \Leftrightarrow$

$3x^2 - 6x + 2 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}\sqrt{3x^2 + 3x + 1} +$

$+ 3x^2 + 3x + 1 = 6x^2 - 3x + 3 +$

$+ 2\sqrt{a}\sqrt{b} = 1, a, b \geq 0.$

отсюда $2\sqrt{a}\sqrt{b} = 1 - 6x^2 + 3x - 3 \geq 0.$

Таким образом уравнение $6x^2 - 3x + 3 = 1.$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 3x + 2 = 0.$ Его дискриминант

равен $D = 9 - 6 \cdot 2 \cdot 4 = 9 - 48 = -39 < 0,$

значит, $6x^2 - 3x + 3 > 1$ при всех

$x \in \mathbb{R}.$ Это значит (ваше решение) $\rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

что $1 - 6x^2 + 3x - 3 = 2\sqrt{a} \sqrt{b} \geq 0,$

откуда $1 - 6x^2 + 3x + 3 > 1.$ Но

это невозможно $\Leftrightarrow x \in \emptyset.$

Значит, в этом случае

нет решений.

Положим $x = \frac{1}{9}.$

ответ.

$$\boxed{x = \frac{1}{9}}$$





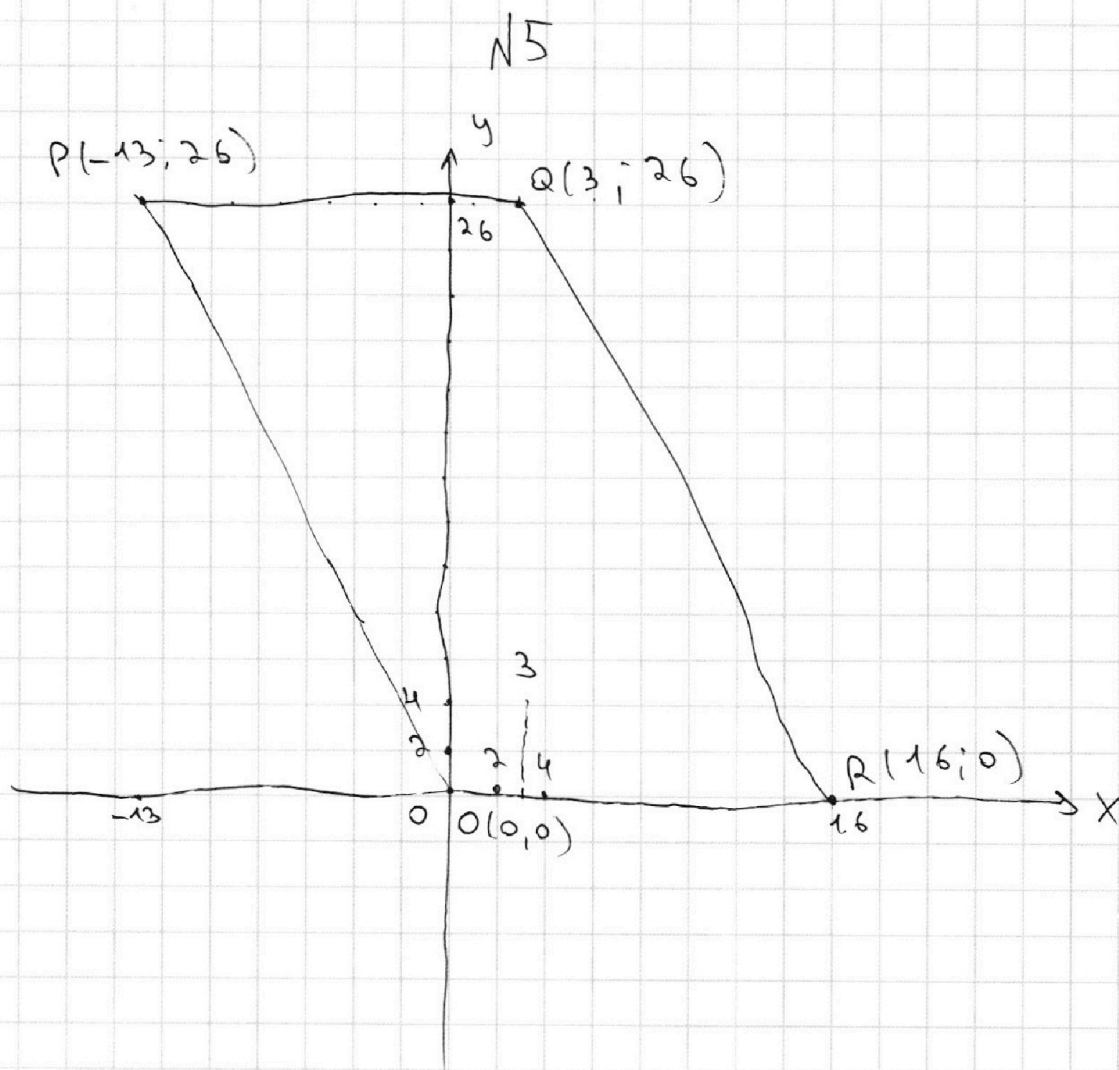
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение. ОР задается ур-нем

~~или~~ $y=0$; PQ — ур-нем $y=26$,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 6

Найти все a , при котор. $\exists b$: сист. имеет

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

ровно 2 р-ш.

Решение. Первое уравнение: $y = -ax + 8b$

~~прямая~~ - прямая вида $y = kx + c$.

Второе нер-во:

$x^2 + y^2 = 1$ - окр-ть w_1 (центром $O_1(0; 0)$)

радиуса $R_1 = 1$; $x^2 + (y - 12)^2 = 16$ - окр-ть

w_2 (центром $O_2(0; 12)$ радиуса $R_2 = 4$.

Изно, что w_1 и w_2 не имеют общих

точек. Очевидно, что второе неравенство

~~выполняется~~ выполняется:

- На границах окр-тей ~~выполняется~~ w_1 и w_2 .
- Внутрь окр-тей w_1 и w_2 .

Нарисуем графики:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

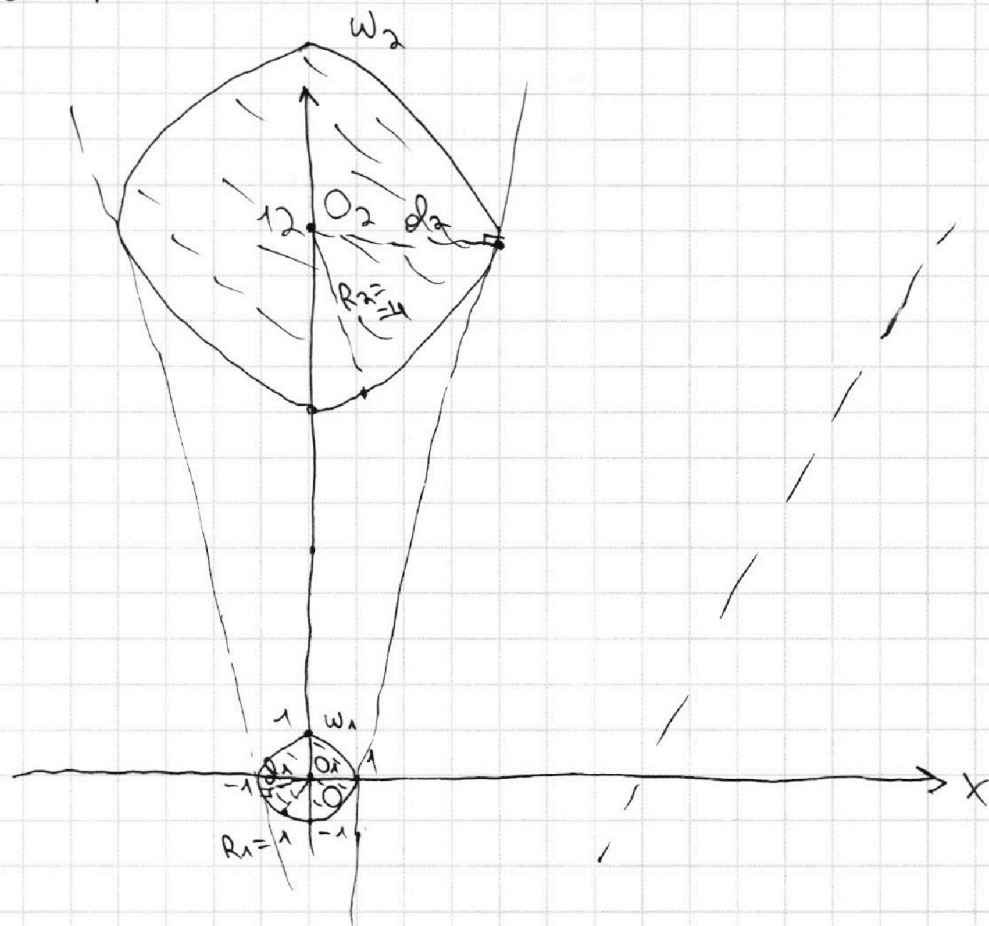
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.



Очевидно, что ~~на~~ равно два решения
будет $\Leftrightarrow$ P касается W_1 и W_2 .

Почему? Если P внутренн пересек. одну из
окр-тей W_1 и W_2 , то ясно, что будет ∞
реш., значит, она может либо касаться,
либо не иметь общих точек (касаясь
из окр-тей W_1 и W_2 . По т.к. окр-ти
две и решения два, то ясно, что $\rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

прямая ℓ касается именно касательных
двух окружностей. Знаю, что w_1 и w_2
имеют 4 ^{общие} касательных $\Rightarrow y$ ^(соеб.) как

и значения a . Значит 4 эк.

Решение. Расстояние d от точки (x_0, y_0)

до прямой $ax+by+c=0$ равно

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

т.к. ℓ касается

w_1 и w_2 , то для d_1 и d_2 - расстояния

- от O_1 и O_2 до ℓ соответственно,

то $d_1 = R_1$ и $d_2 = R_2$. Знаю:

$$\begin{cases} d_1 = \frac{18b}{\sqrt{a^2+1}} = R_1 = 1 \\ d_2 = \frac{18b+12}{\sqrt{a^2+1}} = R_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18b = \sqrt{a^2+1} \\ 18b+12 = 4\sqrt{a^2+1} \end{cases}$$

~~Решение~~ Реш. 3 случая:

① $b \geq 0$. Тогда $8b = \sqrt{a^2+1}$ и $12+8b = 4\sqrt{a^2+1}$, откуда $12+8b = 12+\sqrt{a^2+1} = 4\sqrt{a^2+1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+1} = 4 \Leftrightarrow a^2+1=16 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{15}$$

$$\text{и тогда } b = \frac{1}{8}\sqrt{a^2+1} \quad (b = \frac{1}{8} \geq 0) \rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.

$$(2) \quad -\frac{3}{2} \leq b \leq 0. \quad \text{и тогда}$$

$$-8b = \sqrt{a^2 + 1} \quad \text{и} \quad 12 + 8b = 4\sqrt{a^2 + 1}, \quad \text{откуда}$$

$$8b = -\sqrt{a^2 + 1} \quad \text{и} \quad 12 = 5\sqrt{a^2 + 1}, \quad \text{а значит}$$

$$a^2 + 1 = \frac{144}{25} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = \frac{119}{25} \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}.$$

$$(\text{и тогда} \quad -\frac{3}{2} \leq b = -\frac{3}{10} \leq 0)$$

$$(3) \quad b \leq -\frac{3}{2}. \quad \text{и тогда} \quad -8b = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\text{и} \quad -12 - 8b = 4\sqrt{a^2 + 1}, \quad \text{откуда}$$

$$12 = -3\sqrt{a^2 + 1} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2 + 1} = -4.$$

$$\sqrt{a^2 + 1} \geq 0, \quad \text{но} \quad -4 \leq 0. \quad \text{и следовательно,}$$

$$0 \leq \sqrt{a^2 + 1} = -4 < 0, \quad \text{что невозможно}$$

$$\Leftrightarrow a \in \emptyset. \quad \text{Значит,} \quad a = \pm \sqrt{15}$$

$$\text{и} \quad a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}.$$

Ответ.

$$\text{при} \quad a = \sqrt{15}; -\sqrt{15}; \frac{\sqrt{119}}{5}; -\frac{\sqrt{119}}{5}.$$

→

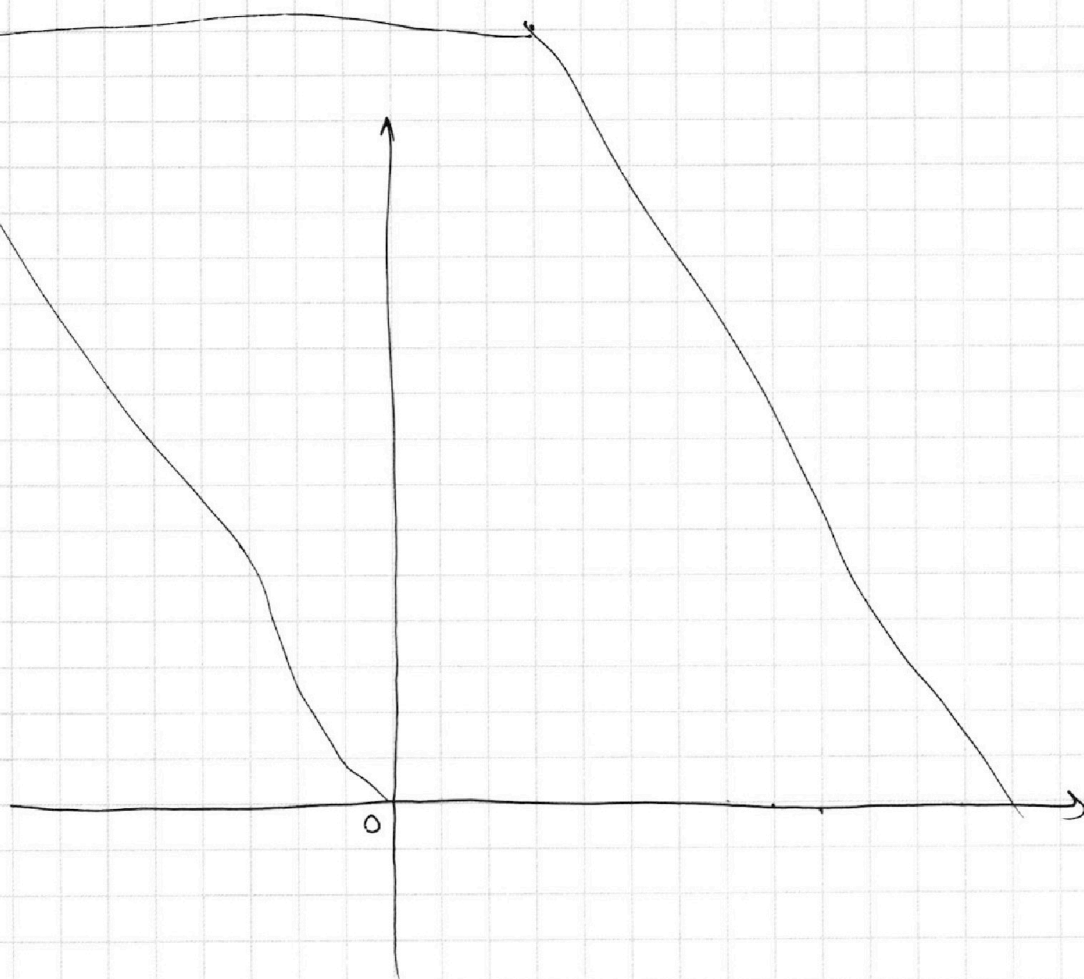


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



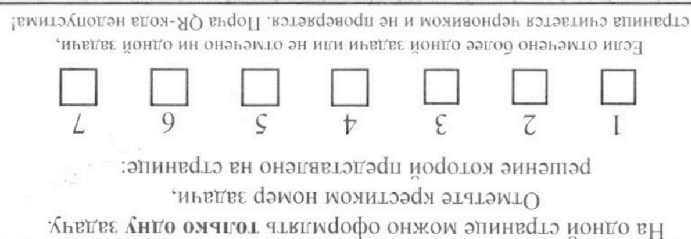
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



αKX .

$$K \cdot -13 = 26$$

$$K = -2.$$



ИГФИ

□ □ □ □ □ □ □
7 6 5 4 3 2 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 2x$$

$$-w_r \cdot w - r + 68^\circ$$

$\begin{array}{r} 8x \\ 6w \end{array}$
 $\begin{array}{r} 6xy \\ \hline 6xy \\ 6xy \end{array}$

$$x_N = 2$$

$$(d, m) = (e, m) = 1$$

46:6

$$x = 5$$

$$= 9r + n \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} - 5e$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1 - r^2} = -\frac{1}{2} \ln(1 - r^2)$$

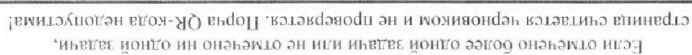
66 - 1000 - 1000 -

$$0 \leq v_{\max} = g \quad \text{and} \quad v_{\min} = 0$$

$$08 - 044 = 4 \cdot 07 - 044 = 07 \cdot 4 \cdot 7 - 04 + 007$$

$\begin{array}{r} 9 \\ 11 \\ 2 \\ + \\ 2 \\ \times \\ - \\ 2 \\ \times \\ 6 \end{array}$

$$6 \times 2 \times 3 \times 3 =$$



ИТФИ

решение которой представлено на странице:

На одной странице можно оформить только одну задачу.



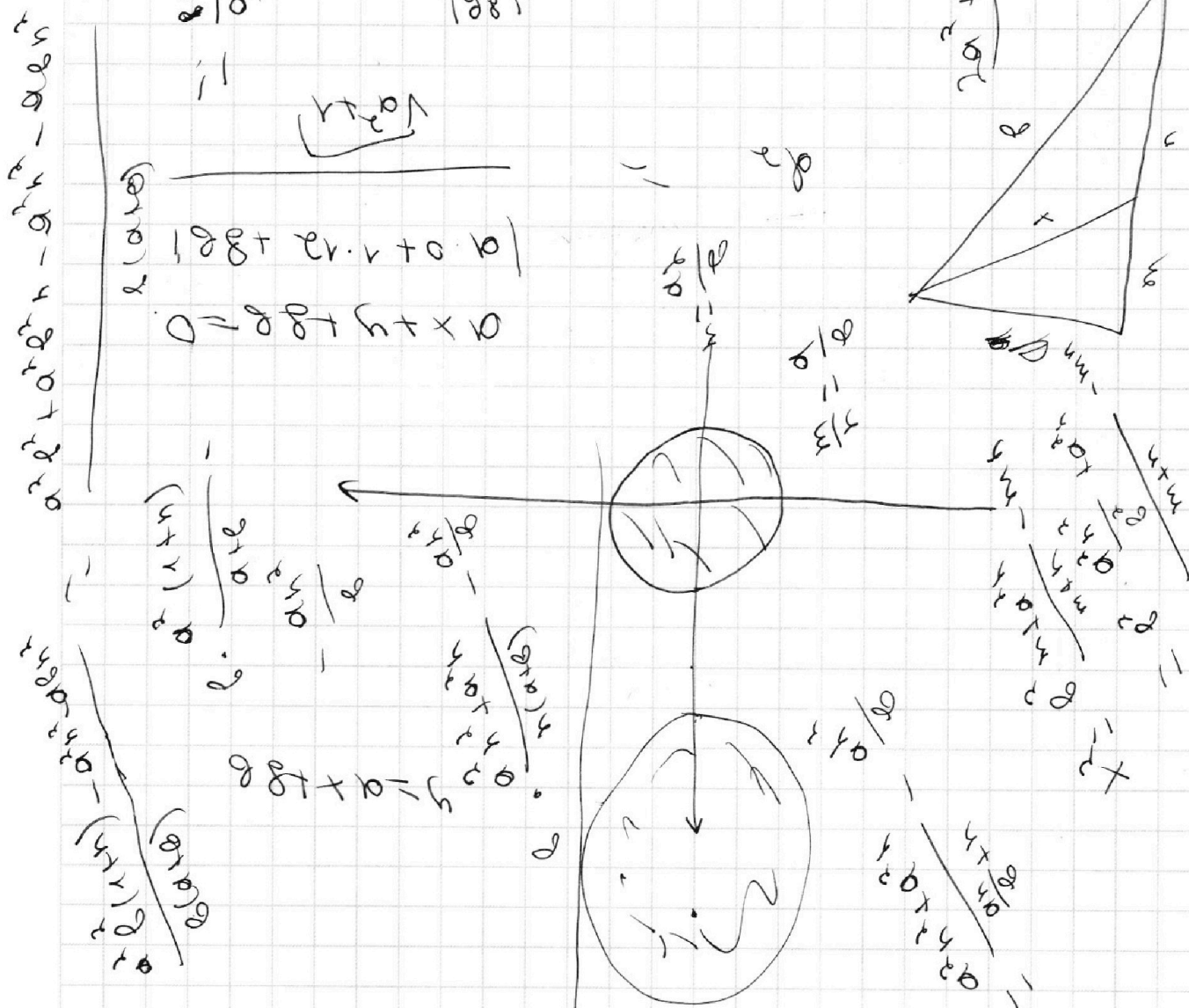
На одной странице можно оформить **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

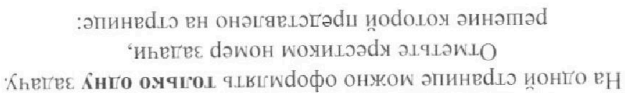
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Лояла QR-кода недопустима!

МФТИ

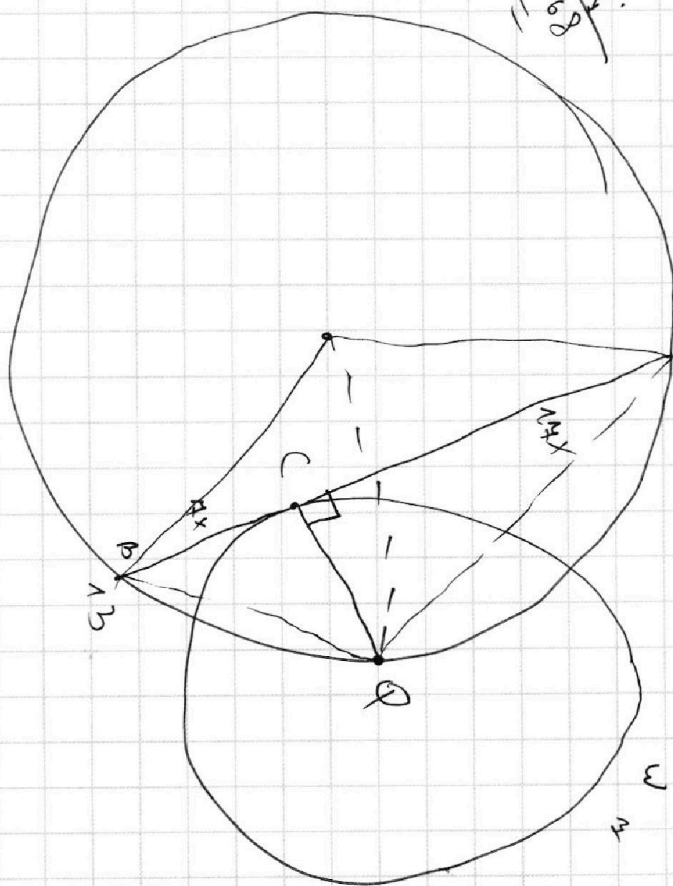
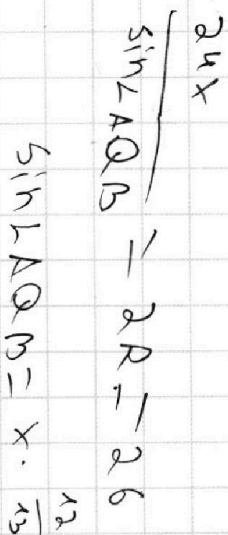


Handwritten calculations and notes at the top of the page, including:
 $x^2 + y^2 = 1$
 $x^2 + y^2 = 4$
 $x^2 + y^2 = 9$
 $x^2 + y^2 = 16$
 $x^2 + y^2 = 25$
 $x^2 + y^2 = 36$
 $x^2 + y^2 = 49$
 $x^2 + y^2 = 64$
 $x^2 + y^2 = 81$
 $x^2 + y^2 = 100$
 $x^2 + y^2 = 121$
 $x^2 + y^2 = 144$
 $x^2 + y^2 = 169$
 $x^2 + y^2 = 196$
 $x^2 + y^2 = 225$
 $x^2 + y^2 = 256$
 $x^2 + y^2 = 289$
 $x^2 + y^2 = 324$
 $x^2 + y^2 = 361$
 $x^2 + y^2 = 400$
 $x^2 + y^2 = 441$
 $x^2 + y^2 = 484$
 $x^2 + y^2 = 529$
 $x^2 + y^2 = 576$
 $x^2 + y^2 = 625$
 $x^2 + y^2 = 676$
 $x^2 + y^2 = 729$
 $x^2 + y^2 = 784$
 $x^2 + y^2 = 841$
 $x^2 + y^2 = 900$
 $x^2 + y^2 = 961$
 $x^2 + y^2 = 1024$
 $x^2 + y^2 = 1089$
 $x^2 + y^2 = 1156$
 $x^2 + y^2 = 1225$
 $x^2 + y^2 = 1296$
 $x^2 + y^2 = 1369$
 $x^2 + y^2 = 1444$
 $x^2 + y^2 = 1521$
 $x^2 + y^2 = 1600$
 $x^2 + y^2 = 1681$
 $x^2 + y^2 = 1764$
 $x^2 + y^2 = 1849$
 $x^2 + y^2 = 1936$
 $x^2 + y^2 = 2025$
 $x^2 + y^2 = 2116$
 $x^2 + y^2 = 2209$
 $x^2 + y^2 = 2304$
 $x^2 + y^2 = 2401$
 $x^2 + y^2 = 2500$
 $x^2 + y^2 = 2601$
 $x^2 + y^2 = 2704$
 $x^2 + y^2 = 2809$
 $x^2 + y^2 = 2916$
 $x^2 + y^2 = 3025$
 $x^2 + y^2 = 3136$
 $x^2 + y^2 = 3249$
 $x^2 + y^2 = 3364$
 $x^2 + y^2 = 3481$
 $x^2 + y^2 = 3600$
 $x^2 + y^2 = 3721$
 $x^2 + y^2 = 3844$
 $x^2 + y^2 = 3969$
 $x^2 + y^2 = 4096$
 $x^2 + y^2 = 4225$
 $x^2 + y^2 = 4356$
 $x^2 + y^2 = 4489$
 $x^2 + y^2 = 4624$
 $x^2 + y^2 = 4761$
 $x^2 + y^2 = 4900$
 $x^2 + y^2 = 5041$
 $x^2 + y^2 = 5184$
 $x^2 + y^2 = 5329$
 $x^2 + y^2 = 5476$
 $x^2 + y^2 = 5625$
 $x^2 + y^2 = 5776$
 $x^2 + y^2 = 5929$
 $x^2 + y^2 = 6084$
 $x^2 + y^2 = 6241$
 $x^2 + y^2 = 6400$
 $x^2 + y^2 = 6561$
 $x^2 + y^2 = 6724$
 $x^2 + y^2 = 6889$
 $x^2 + y^2 = 7056$
 $x^2 + y^2 = 7225$
 $x^2 + y^2 = 7396$
 $x^2 + y^2 = 7569$
 $x^2 + y^2 = 7744$
 $x^2 + y^2 = 7921$
 $x^2 + y^2 = 8100$
 $x^2 + y^2 = 8281$
 $x^2 + y^2 = 8464$
 $x^2 + y^2 = 8649$
 $x^2 + y^2 = 8836$
 $x^2 + y^2 = 9025$
 $x^2 + y^2 = 9216$
 $x^2 + y^2 = 9409$
 $x^2 + y^2 = 9604$
 $x^2 + y^2 = 9801$
 $x^2 + y^2 = 10000$



□ □ □ □ □ □ □
7 6 5 4 3 2 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода недопустима!



$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$$\sqrt{29+289x^2} \quad \sqrt{49+49x^2}$$

2. 24.13
14.13
10

11/27

$\sqrt{20}$
 $\sqrt{20}$

25.3

51
7
X

Handwritten notes on grid paper:

Top right: $\frac{1}{3}$

Bottom right: $\frac{1}{3}$

Bottom left: $\frac{1}{3}$

Center: $\frac{1}{3}$

Left side: $\frac{1}{3}$

Bottom left (circled): $\frac{1}{3}$

117/24.

$$-6x^2 + 68x - 11$$

2000

$$\begin{array}{r} 222 \\ 222 \\ \hline 666 \\ 800 \\ 800 \\ 800 \\ \hline 2400 \end{array}$$

cos LAGB =

11
14
217
x

$$\begin{array}{r} 593 \\ 2 \overline{) 1186} \\ \underline{10} \\ 18 \\ \underline{16} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

[illegible]

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



№1
 $a, b, c \in \mathbb{N}$, $ab: 2^{15} 7^{11}$, $bc: 2^{14} 7^{18}$, $ac: 2^{23} 7^{39}$.

$\min(ab, bc, ac) = ?$

Решение. Пусть $t := \min(ab, bc, ac)$. Перенесем

числа ab, bc и ac . Получим

$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = (abc)^2 = t^2$. Из

условия, $ab: 2^{15} 7^{11}$, $bc: 2^{14} 7^{18}$, $ac: 2^{23} 7^{39}$,

откуда $t: 2^{45} 7^{68}$. Заметим,

что раз t^2 — квадрат натур. числа $t \in \mathbb{N}$,

$t^2: 2^{45}$ и 45 — нечетное, то $t^2: 2^{46}$, так

как простые числа могут входить в

квадраты натур. чисел только в четных

степенях. Значит, $t^2: 2^{46} 7^{68}$.

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 1}}{2}$

$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 2x)\sqrt{3x^2 + 5x + 1}$

$12 = -3\sqrt{3x^2 + 5x + 1} + 1 + 81x^2 - 18x$

$12 + 8 = -4\sqrt{3x^2 + 5x + 1}$

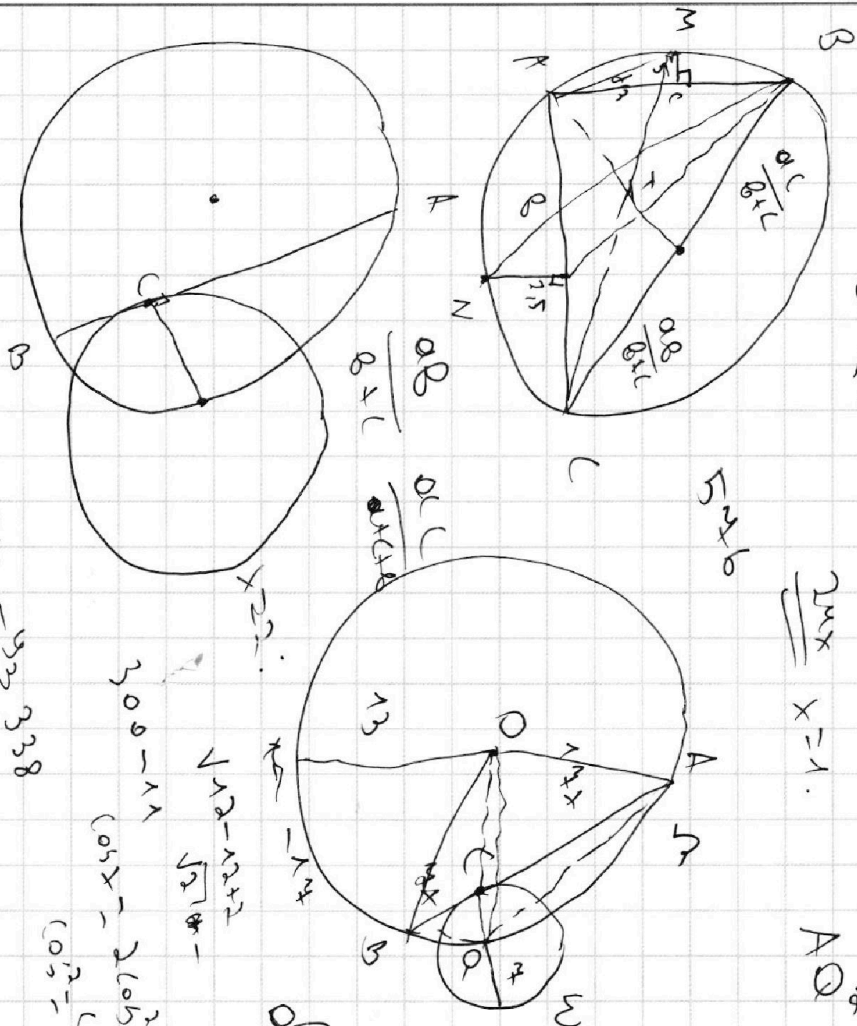
$\frac{3}{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5(49)

10(49)

5(49)

-1

$$\frac{2x}{x} = 1.$$

AO

$$13 + 6 + 2$$

$$- \sqrt{3-3}$$

$$49x^2 - 2 \cdot 169 - 2 \cdot 169 \cdot \cos \angle BOA$$

$$\cos \angle BOA = \frac{49 + 169x^2}{169 + 49x^2}$$

$$49x^2 = BO^2 - 49$$

$$BO^2 = 49 + 49x^2$$

$$BO = 7\sqrt{1+x^2}$$

$$AO^2 = 49 + 289x^2$$

$$\angle BOA = -14x \cdot 14x =$$

$$OC^2 = R^2 - 15^2 =$$

$$\cos x = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \frac{1}{4}}$$

$$OC^2 = 169 - 149x^2$$

$$2x^2 - 2x - 1 = -2x - 33.338$$

$$\cos \angle BOA = \cos \angle BOA$$

$$\cos \angle BOA = 1 - \frac{49 + 49x^2}{2 \cdot 169}$$

$$\frac{\cos \angle BOA}{\cos \angle BOA} = \frac{3x^2 - 14x - 1}{338}$$

$$\sqrt{12 + 12x^2}$$