



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$, $ab: 2^{14} 7^{10}$, $bc: 2^{14} 7^{14}$, $ac: 2^{20} 7^{37}$. $(abc)_{\min} = ?$

Уточню: abc было наим., нужно, чтобы a, b, c состояли

только из степеней 2 и 7. $a = 2^{k_1} 7^{n_1}$, $b = 2^{k_2} 7^{n_2}$, $c = 2^{k_3} 7^{n_3}$, $k_1, k_2, k_3,$

$n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_0$, тогда $ab = 2^{k_1+k_2} 7^{n_1+n_2} : 2^{14} 7^{10} \Rightarrow \begin{cases} k_1+k_2 \geq 14 & (1) \\ n_1+n_2 \geq 10 & (2) \end{cases}$ аналогично

$\begin{cases} k_2+k_3 \geq 14 & (3) \\ n_2+n_3 \geq 14 & (4) \end{cases}$ $\begin{cases} k_1+k_3 \geq 20 & (5) \\ n_1+n_3 \geq 37 & (6) \end{cases}$

предположим, что наим.

уменьш $k_1+k_2+k_3$ и $n_1+n_2+n_3$ где

наим abc . $(1)+(3)+(5) \Rightarrow 2(k_1+k_2+k_3) \geq 51 \Rightarrow k_1+k_2+k_3 \geq 26$, м.к.

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$, $\min(k_1+k_2+k_3) = 26$, аналогично: $(2)+(4)+(6) : 2(n_1+n_2+n_3)$

$\geq 64 \Rightarrow (n_1+n_2+n_3)_{\min} = 32$ III-е. $(abc)_{\min} = 2^{26} 7^{32}$, но, м.к.

$ac: 2^{20} 7^{37}$, но a еще: 7^{37} , а $7^{12} / 7^{37}$, то c 7^{25}

минимальная степень 7 будет 37 . Ответ: $(abc)_{\min} = 2^{26} 7^{37}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$.

$\frac{a}{b}$ — несократима ($a, b \in \mathbb{N}$), т.е. $\text{НОД}(a, b) = 1$.

$\frac{a+b}{a^2-bab+b^2}$, $m_{\max}$ —? $\frac{a+b}{a^2-bab+b^2} = m$ и $a^2-bab+b^2 = m$

т.е. $a+b = km$, $k \in \mathbb{N}$, $a^2-bab+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = m^2$

$\Rightarrow$ предположим, что $2ab = nm$, $n \in \mathbb{N}$.

III. $k = m_{\max}$, то δ резко уменьшается после сокращения

~~и не сократится~~ (иначе можно подобрать число t на которое δ на сократится и макс. значение m будет $m_{\max}$).

$\frac{a+b}{a^2-bab+b^2} = \frac{km}{k^2m^2-nm} = \frac{k}{k^2m-n}$ $\text{НОД}(k; k^2m-n) = 1$, а значит

$\text{НОД}(k; n) = 1$. $m_{\max}$ будет при наим. $k \neq 1$: $a+b=m$

тогда $(a+b)^2 - 2ab = m^2$, $2ab = t(a+b)$, $t \in \mathbb{N}$. $t \left(\frac{a+b}{2ab} \right) = 1$

$= t \left(\frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} \right)$ ~~и значит~~ $\frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{t}$ ~~и значит~~ $\frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{t}$ ~~и значит~~ $\frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{t}$

$t \in \mathbb{N}$ предположим $t=2$ $t = \frac{2ab}{a+b}$, т.е. $\text{НОД}(a, b) = 1$,
то $\frac{ab}{a+b}$ — несократима, т.е. макс. m при $a+b=m=8$.

Ответ: $m=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



нч. $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-4x$ **ОДЗ:** $2x^2-5x+3 \geq 0$

$2x^2-5x+3 = (x-1)(2x-3)$, $2x^2+2x+1$ не раскл. на мн, тк $\Delta = 4-8 < 0$ всегда.

н.е. $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} > 0$ всегда. *множитель не мн. корня; умножим левую*

и правую часть на $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}$.

$2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1 = (2-4x)(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})$

$2-4x = (2-4x)(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})$

$(2-4x)(1 - (\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})) = 0$

1. $x = \frac{2}{4}$. 2. $\frac{4}{9} - 5 \cdot \frac{2}{4} + 3 = \frac{8}{9} - \frac{10}{4} + 3 = -\frac{62}{36} + 3 > 0$ *не подходит ОДЗ.*

2. $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 \Rightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1}$

$2x^2-5x+3 = 1 - 2\sqrt{2x^2+2x+1} + 2x^2+2x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+2x+1} = 4x-1 \Rightarrow 4x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{4}$

$4(2x^2+2x+1) = 16x^2 - 8x + 1 \Rightarrow 8x^2 + 8x + 4 = 0$

$\Rightarrow 4x^2 + 2x - 1 = 0$ $\Delta = 1 + 12 = 13 = (\sqrt{13})^2$

$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{8} < \frac{1}{4} \notin$ $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{8} \geq \frac{1}{4}$ *подходит ОДЗ.*

Ответ: $x = \left\{ \frac{2}{4}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{8} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

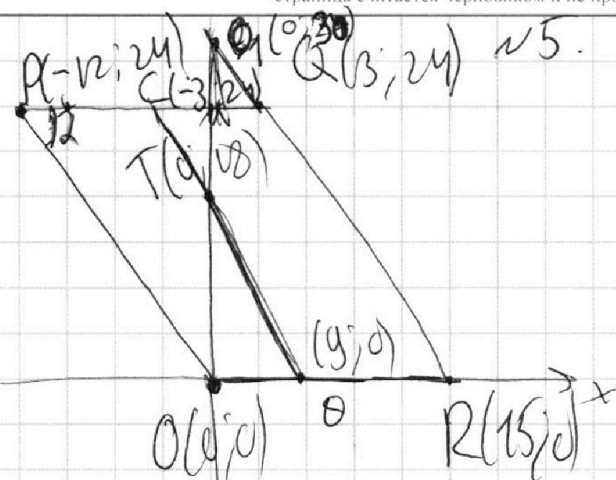
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in OPRQ$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$tg \alpha = \frac{1}{2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{тангенс угла } \alpha \\ \text{вспомогательная точка } A(x_1; y_1) \end{array} \right)$$

выразим через x_1, x_2, y_1, y_2

$$y_2 = -2x_2 + 2x_1 + y_1 + 12$$

Отсюда x_2 график этой функции — прямая // OP и QR параллельна, т.е. если x_2 — ось x .

прямой OP и QR параллельны, то с их помощью можно сразу найти (исчисленных) точек A и B в параллельных прямых OP и QR , а также, задавая эти прямые OP и QR параллельными, если $2x_1 + y_1 + 12 \leq 30$ и $2x_1 + y_1 + 12 \geq 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 \leq -2x_1 + 18 \\ y_1 \geq -2x_1 - 12 \end{array} \right. \quad \text{т.к. } (x_1, y_1) \in OPRQ, \text{ то}$$

$$y_1 \geq -2x_1 \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 \leq -2x_1 + 18 \\ y_1 \geq -2x_1 \end{array} \right. \quad \text{т.е. получаем все точки}$$

ограниченные OP и QR и проходящие через $T(9, 0)$, $C(-3, 24)$, $O(0, 0)$, PQ, PC, OD . Всего таких точек $13 \cdot 10 = 130$ и для каждой из этих точек

можно выбрать $B(x_2, y_2)$ $13 \cdot 10 = 130$ способами.

Всего $130 \cdot 16 = 2080$ способов, но, для каждой прямой OP с целыми координатами $(0, x(x \in \mathbb{Z}))$ тангенс из промежутка $x \in [0, 9]$ имеет точку с целыми координатами, что не входит в (1) . более того

$$\text{вычитаем: } 2 \cdot (2080 - 130) = 3120 \quad \text{Ответ: } 3120.$$

A, B и B, A равносильны.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 6.

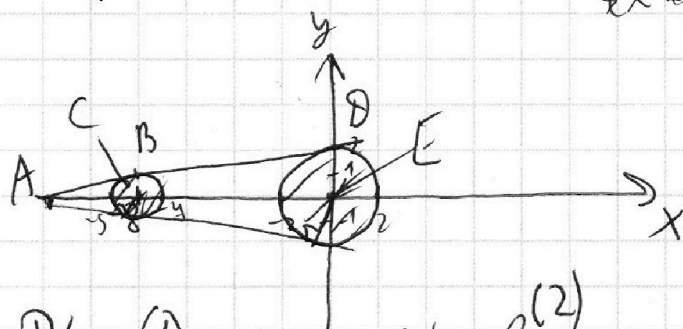
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \text{ и} \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

нарисуем графики ф-ции

$(x+8)^2 + y^2 = 1$ - окр. (центр $(-8, 0)$) радиус 1
 $x^2 + y^2 = 4$ - окр. (центр $(0, 0)$) радиус 2

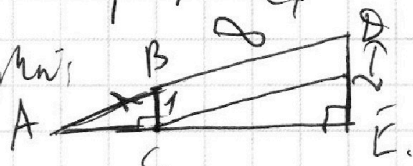


Заметим, что эта совокупность равносильна

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

Р/с (1): $y = ax + 10b$ - прямая, т.к. система должна иметь ровно 2 решения, то подходит только 2 прямые, изобр. на графике, они касаются окружностей

Т.к. конструкция



приведем через C прямую $l \perp AD$ и перес. DE в

м. Т, $\triangle CTD$ - прямоугольный $\Rightarrow CT = 8, DT = 1 \Rightarrow TE = 1 \Rightarrow CE = \sqrt{63}$

$$\tan \angle ABC = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{DE}{AC + CE} = \frac{1}{AC + \sqrt{63}} \Rightarrow 2AC = AC + \sqrt{63} \Rightarrow AC = \sqrt{63} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \tan \angle ABC = \frac{1}{\sqrt{63}}$. В ур-ии (2) $y = ax + 10b$ так $a = \tan \angle ABC$ или $a = -\tan \angle ABC = -\frac{1}{\sqrt{63}}$.

Для каждого из этих случаев подбирается единственная b (взависимости от этой прямой). Ответ: $a = \frac{1}{\sqrt{63}}$ или $a = -\frac{1}{\sqrt{63}}$.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Условие $a, b, c \in \mathbb{N}$, $ab: 2^{14} 7^{10}$, $bc: 2^{17} 7^{14}$, $ac: 2^{20} 7^{37}$
 $\frac{abc}{abc} \quad a = 2^{k_1} 7^{n_1}$, $b = 2^{k_2} 7^{n_2}$, $c = 2^{k_3} 7^{n_3}$
 $ab = 2^{k_1+k_2} 7^{n_1+n_2}$, $bc = 2^{k_2+k_3} 7^{n_2+n_3}$, $ac = 2^{k_1+k_3} 7^{n_1+n_3}$

$\begin{cases} k_1+k_2 \geq 14 \\ k_2+k_3 \geq 17 \\ k_1+k_3 \geq 20 \end{cases} + 2(k_1+k_2+k_3) \geq 51 \Rightarrow k_1+k_2+k_3 \geq 25,5, \text{ т.е.}$
 Нам $k_1+k_2+k_3 = 26$, аналогично с

$n_1+n_2+n_3: 2(n_1+n_2+n_3) \geq 67 \Rightarrow n_1+n_2+n_3 \geq 33,5, \text{ т.е. } \min = 32$

Ответ $abc_{\min} = 2^{26} 7^{32}$

$\frac{a}{b}$ - несократимая, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ (т.е. $\text{НОСР}(a, b) = 1$)

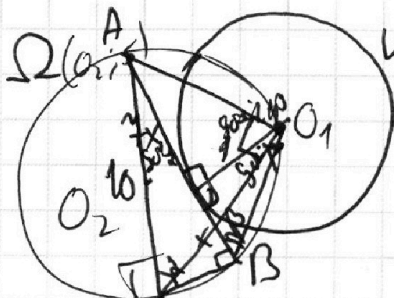
$\frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 2ab}$. $\frac{a+b}{m} \in \mathbb{Q}$ и $\frac{2ab}{m} \in \mathbb{Q}$. $a+b = km$, $2ab = nm$. $ka+kb = 2ab$. $ka+kb = 2ab$.

$\frac{a+b}{m} \in \mathbb{Q}$ и $\frac{2ab}{m} \in \mathbb{Q}$. $a+b = km$, $2ab = nm$, $k, n \in \mathbb{N}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = k^2 m^2 + nm = m^2 \left(k^2 + \frac{n}{m} \right)$

$a^2 + b^2 = k^2 m^2 - \frac{nm}{4} = m \left(k^2 m - \frac{n}{4} \right)$

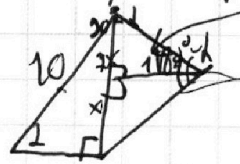
$\frac{km}{k^2 m^2 - \frac{nm}{4}} = \frac{km}{k^2 m^2 - nm} = \left(\frac{k}{k^2 m - n} \right) \frac{km}{m}$



$w(a, 1)$

$A O_1 B T$ — осн. в. осн.

$180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$



$\lg x = \lg y, \lg y = \lg z$

$\lg(p+q) = \frac{\lg p + \lg q}{1 + \lg p \lg q} = \frac{\lg x}{1 - x^2}$

$\lg x = \frac{8x}{100 - 6x^2}$

$\lg(x) = \frac{8x}{x^2 - 1}$

