



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1.

$$\begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac &: 2^{30} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

$abc - \min - ?$

Числа a, b, c можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} a &= 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \\ b &= 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2} \\ c &= 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3} \end{aligned}$$

т.к. мы хотим, чтобы $abc - \min$,
то в разложении чисел a, b, c
должны отсутствовать другие

простые делители, кроме 2, 7

Заметим, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ — целые и
неотрицательные.

Тогда $ab = 2^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2}$, аналогично состав-
ным т.о. можно составить следующие нера-
венства

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &\geq 14 \quad (1) \\ \beta_1 + \beta_2 &\geq 10 \quad (2) \\ \alpha_2 + \alpha_3 &\geq 17 \quad (3) \\ \beta_2 + \beta_3 &\geq 17 \quad (4) \\ \alpha_1 + \alpha_3 &\geq 30 \quad (5) \\ \beta_1 + \beta_3 &\geq 37 \quad (6) \end{aligned}$$

т.к. произв. делится, то
сумма степеней показате-
лей должна быть не меньше
показателя простого чис-
ла, которое делится

$$abc = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2} \cdot 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3} = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}$$

1. Сложим (1), (3), (5) нера-
венства:

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 61$$

чтобы $abc \rightarrow \min$, нужно, чтобы $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \rightarrow \min$

т.к. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ — целое, то

$$\min(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{61}{2} = 31$$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \rightarrow \min$

2. Сложим (2), (4), (6) нера-
венства:

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 64, \text{ т.к. } \min(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 32$$

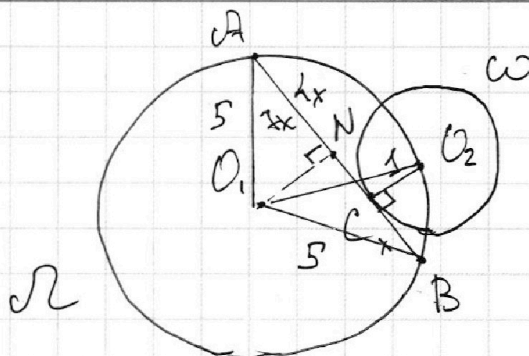
$$\text{т.о. } \min(abc) = 2^{31} \cdot 7^{32}$$

$$\text{Ответ: } 2^{31} \cdot 7^{32}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

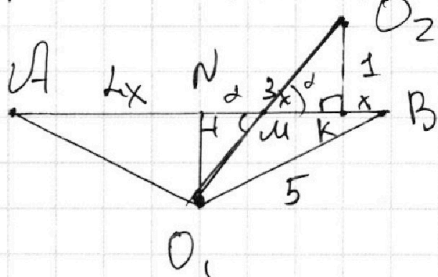
№3.
 $\omega: r=1$
 $\Omega: R=5$
 $AC:CB=7$
 $AB=?$



2 - радиус ω , R - радиус Ω

Пусть $CB=x$, тогда $AC=7x$

1. Центр окружности O_1 Ω находится на серединном $\perp$ к AB , тогда $AN=4x$, $BN=4x$. Пусть O_1 еще то же серед $\perp$ к AB , $NC=3x$, $BC=x$
2. O_1A, O_1B - радиусы R
3. Проведем O_1O_2 - радиус R



1) по т. Пифагора для

$$\Delta AO_1N: 25 = 16x^2 + O_1N^2$$

$$\sin \alpha = \frac{O_1N}{AO_1} = \frac{O_1N}{5} \Rightarrow O_1M = \frac{O_1N}{\sin \alpha} = 5$$

$$\Rightarrow O_1M + O_2M = 5 = \frac{1}{\sin \alpha} (O_1N + 1) \quad (1)$$

$$3) \begin{cases} \tan \alpha = \frac{O_1N}{NM} \\ \tan \alpha = \frac{1}{MK} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NM = \frac{O_1N}{\tan \alpha} \\ MK = \frac{1}{\tan \alpha} \end{cases} \Rightarrow NM + MK = 3x = \frac{1}{\tan \alpha} (O_1N + 1) \quad (2)$$

(1): (2):

$$\frac{5}{3x} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\tan \alpha}{1} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9x^2}{25} \quad (*)$$

$$\text{из (1): } \sin \alpha = \frac{O_1N+1}{5} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{(O_1N+1)^2}{25} \quad (**)$$

$$(*) + (**): 1 = \frac{9x^2}{25} + \frac{(O_1N+1)^2}{25} \Rightarrow 25 = 9x^2 + (O_1N+1)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 Продолжение.

$$(O, N+1)^2 = 25 - 9x^2 \Rightarrow O, N+1 = \sqrt{25 - 9x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O, N = \sqrt{25 - 9x^2} - 1; \quad O, N^2 = (\sqrt{25 - 9x^2} - 1)^2$$

при $25 \geq 9x^2$

подставл. в 1) + Пифагорс:

$$25 = 16x^2 + 25 - 9x^2 - 2\sqrt{25 - 9x^2} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{25 - 9x^2} = 7x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 - 36x^2 = 49x^4 + 14x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{99}{49} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1$$

пер-во $25 - 9x^2 \geq 0$ выполн.
все рассужд. справедливы.

$$\text{т.о. } x = 1, \text{ а } AB = 7x + x = 8x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 8$$

Ответ: $AB = 8$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b}$ - несократима

$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$
 $m \rightarrow \max$

Решение 102!!!

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

Используем

если $\frac{a}{b}$ - несократимая дробь, то
и a и b взаимно простые или a и b взаимно простые
остались простые числа, которых
нет либо вверху, либо внизу

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} ; \text{ если разделим на } ab$$

$$\frac{\frac{a+b}{ab}}{\frac{(a+b)^2 - 8ab}{ab}} ; \text{ если } a+b : ab, \text{ то и } (a+b)^2 : ab$$

в дроби $\frac{a}{b}$ находится a и b , которые
взаимно просты по отношению друг к другу
 $a+b : ab$

~~Далее $\frac{a}{b}$ не сократим, потому что так не может~~

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a(1 + \frac{b}{a})}{a(a - 6b + \frac{b^2}{a})} = \frac{ab(\frac{1}{b} + \frac{1}{a})}{ab(\frac{a}{b} - 6 + \frac{b}{a})}$$

т.о. можно сократить

Остат. b

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Замена:

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a, a \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b, b \geq 0$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 3 &= a^2 \quad (1) \\ 2x^2 + 2x + 1 &= b^2 \quad (2) \end{aligned} \quad \text{Вычтем из (1) (2), т.е.}$$

$$(1) - (2): -7x + 2 = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned} a - b &= a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) - (a - b) = 0 \Leftrightarrow \\ \Rightarrow (a - b)(a + b - 1) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{т.о.} \quad \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad (1) \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Реш (1):

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} &= \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow \\ \Rightarrow 7x &= 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

Реш (2):

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} &= 1 \Leftrightarrow \\ \Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} &= 1 \Leftrightarrow \\ \Rightarrow 4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} &= 1 \Leftrightarrow \\ \Rightarrow 4x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} &= 0 \quad (3); \end{aligned}$$

1. рассмотрим $4x^2 - 3x + 3$ - оно всегда больше 0,
т.к. $D = 9 - 3 \cdot 4 \cdot 4 < 0$, т.е. $4x^2 - 3x + 3 > 0$

2. произведение корней всегда неотрицательно, т.е.
 $2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$

Получим левую и правую части выражения (3)

Прав. 2: 0

Лев. 2: $2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \cdot \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 4x^2 - 3x + 3 > 0$

Как видно, равенство не достигается.

т.о. остаётся только один корень из (1) $x = \frac{2}{7}$

Ответ: $\frac{2}{7}$.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

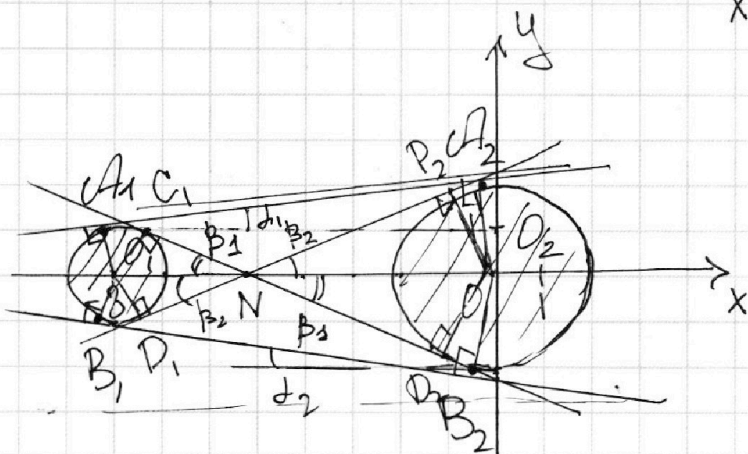


№6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Изобразим на плоскости

$$\begin{aligned} (x+8)^2 + y^2 &\leq 1, \text{ круг, радиус } 1 \\ x^2 + y^2 &\leq 4, \text{ круг, радиус } 2 \end{aligned}$$



Подставив
некоторые
значения (i, y)
в (2) кер-во,
можно показать,
что (2) кер-во
задает 2 круга,
радиусы 1 и
радиусы 2

Затем область, которую задает (2) кер-во
// - точкой и стрелочками

(1) ур-ие задает прямую $y = ax + 10b$, где
 a - задает угловой коэффициент наклона прямой a
 $10b$ - точка на оси Oy при $x=0$, т.е. значение
прямой y вдоль Oy .

Проведем 2 касательные к двум окр. радиусы 1
и радиусы 2 (к закрашенной фигуре)

2 общие касательные в т. A_1, A_2 и в т. B_1, B_2 ,
(т. A_1 и B_1 и A_2 и B_2 - симметр. отн. осей)

Проведем радиусы в точки касания
в (радиус, проведенный в т. касания $\perp$ касательной
в т. касания)

Получилось, что A_1, A_2, O_2, D_1 и B_1, D_1, O_2, B_2 -
- прямые

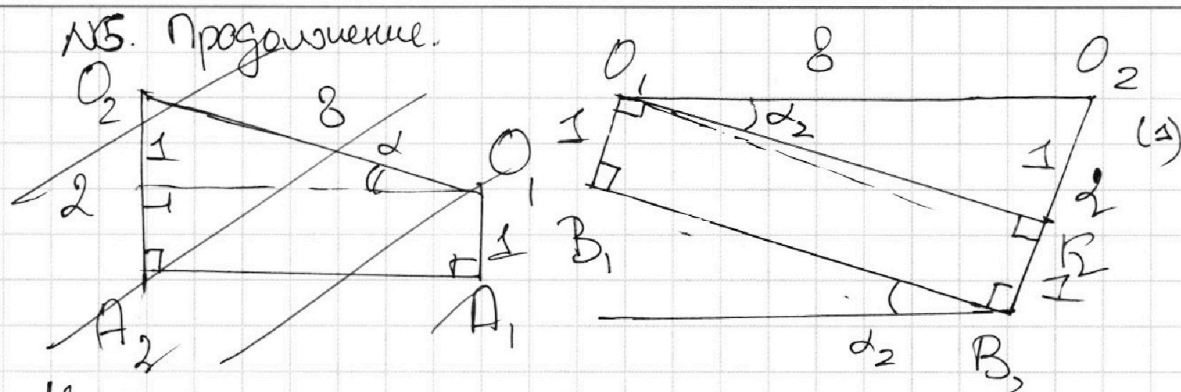
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Необходимо найти угловой наклон прямых A_1A_2 и B_1B_2 .

$\tan \alpha_1 = \frac{1}{8}$
Необходимо, чтобы наша прямая касалась двух окружностей, $r_1=1$ и $r_2=2$. Иначе, кол-во общих точек (точек пересечения) будет не 2.
Необходимо рассмотреть все общие касательные к двум окружностям на плоскости.
Общие касательные будут $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$. Необходимо найти $\tan$ угла наклона общей касательной к оси Ox α и будет искомым α .

Для случая (1):

$O_1O_2 \parallel O_1K \angle(B_1B_2; O_1O_2)$.

Проведем $O_1K \perp O_2B_2 \Rightarrow O_1B_1B_2K$ - прямоугольник (все углы по 90°), т.о. $O_1B_1=1=KB_2 \Rightarrow O_2K=1$.

т.о. $\sin \alpha_2 = \frac{1}{8}$, O_1K по т. Пиф. для $\triangle O_1O_2K$:

$$O_1K = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}, \text{ т.о. } \tan \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{\sqrt{9 \cdot 7}} = \frac{1}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$$

Мы получили один из возможных а для случая с касательной B_1B_2 , такое же α мы можем получить для аналогичной касательной A_1A_2 , но со знаком "-" (график увидите)

$$\text{т.е. } \alpha_1 = \frac{\sqrt{7}}{21} \\ \alpha_2 = -\frac{\sqrt{7}}{21}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№. Продолжение.
Рассмотрим теперь окружности O_1C_1N , O_2D_2N ,
 O_1D_1N , O_2D_2N

Возьмем, к примеру, $\triangle O_1D_1N$ и $\triangle O_2D_2N$
(они подобны), по 2^м катету ($\angle O_1D_1N = \angle O_2D_2N = 90^\circ$
(радиусы в т. касания)) и $\angle O_1ND_1 = \angle O_2ND_2 = \beta_2$

т.о. $\frac{O_1D_1}{O_2D_2} = \frac{O_1N}{O_2N} \Rightarrow \frac{O_1N}{O_2N} = \frac{1}{2} \rightarrow 2O_1N = O_2N$

$O_1N + O_2N = O_1O_2 = 8 \Rightarrow 3O_1N = 8 \Rightarrow O_1N = \frac{8}{3}$

Найдем $\tan \beta_2$ (или a_3)

по т. Пифагора для

$\triangle O_1C_1N$:

$C_1N = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \sqrt{\frac{64-9}{9}} = \sqrt{\frac{55}{9}} = \frac{\sqrt{55}}{3}$

т.о. $\tan \beta_2 = a_3 = \frac{1}{\sqrt{55}} \cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{55}}$

$\tan \beta_1 = \tan \beta_2$, $\beta_1 = \beta_2$ по дуге β , график убывает,

поэтому $a_4 = -\frac{3}{\sqrt{55}}$

т.о.

$a_3 = \frac{3}{\sqrt{55}} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$

$a_4 = -\frac{3}{\sqrt{55}} = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$

При других a кроме

a_1, a_2, a_3, a_4 не будет
2 точек пересечения прямой
и двух кругов

Ответ: $\pm \frac{3}{\sqrt{55}}$, $\pm \frac{\sqrt{7}}{21}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

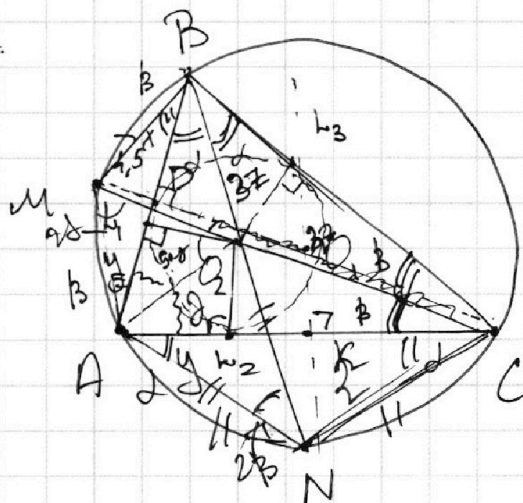
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7



$$\begin{aligned} MD &= 4,5 \\ MK &= 2 \\ S(A; O_2) &= ? \end{aligned}$$

- 1) Середины перпендикуляр к AC и AB проходят соответственно через точки N и M.
- 2) Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис. O_2 - центр вписанной окружности. BO_2 - биссектриса $\angle B$, но еще BO_2 - касательная (на равные дуги отрезок равен углы).
- 3) O_1 - центр описанной окружности.
- 4) Аналогично CM - биссектриса $\angle C$.
- 5) Пусть $BH_1 = x$, то $BH_3 = x$, а $AH_1 = y$, то $AH_2 = y$.
- 6) $\angle CAN = \angle CBN = \angle ABN = \alpha$ (вписанные).
- 7) $\triangle ANC$ - р/с, то $AN = NC$ (отсекает равные дуги).
- 8) по th. sin: $\frac{AN}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow AN = 2R \sin \alpha$.
- 9) $\angle MA = \angle MB$ (отсекает равные дуги).
- 10) $\angle MAB = \angle ABM = \angle ACM = \angle MCB = \beta$.
- 11) по th. sin: $\frac{MA}{\sin \beta} = 2R \Rightarrow MA = 2R \sin \beta$.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7. Продолжение.

12) по т. Пифагора для $\triangle ARN$ и $\triangle AO_1K$:

$$\begin{aligned} AK^2 + KN^2 &= AN^2 \\ AK^2 + O_1K^2 &= AO_1^2 \end{aligned} \Rightarrow O_1K^2 - 4 = AO_1^2 - AN^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R-2)^2 - 4 = R^2 - 4R^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 - 2R + 4 - 4 = R^2 - 4R^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \quad (1)$$

13) по т. Пифагора для $\triangle AMP$ и $\triangle AO_1D$

$$AD^2 + 4.5^2 = AM^2$$

$$AD^2 + (4.5R - 4.5)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 - 9R + 4.5^2 - 4.5^2 = R^2 - 4R^2 \sin^2 \beta \Rightarrow$$

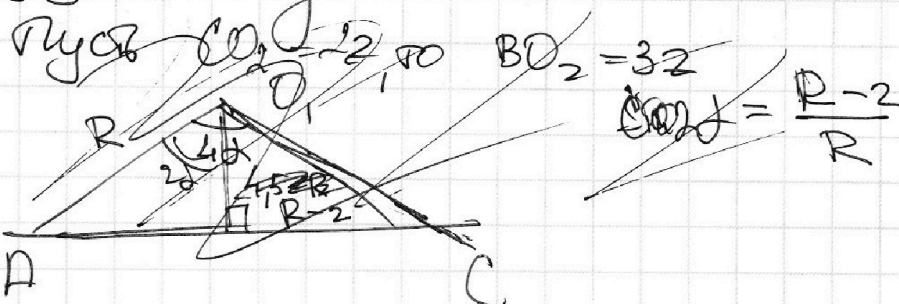
$$\Rightarrow 9 = 4R \sin^2 \beta \quad (2)$$

Делим (1) на (2): $\frac{1}{9} = \frac{R \sin^2 \alpha}{4R \sin^2 \beta} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{4}{9}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2}{3}$$

14) по т. синусов для $\triangle MO_2B$ и $\triangle MO_2C$:

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{MO_2}{\sin \beta} &= \frac{CO_2}{\sin \angle MO_2C} = \frac{CO_2}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{CO_2}{BO_2} = \frac{2}{3} \\ 2. \quad \frac{MO_2}{\sin \gamma} &= \frac{BO_2}{\sin \gamma} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Н7. Продолжение.

$$\left. \begin{aligned} 13) BL_3 &= 32 \cdot \cos \beta = BL_1 \\ 14) CL_3 &= 22 \cdot \cos \beta = CL_2 \end{aligned} \right\} \text{т.к. вышена окружность}$$

$$14) 2R = \frac{Z(3\cos \alpha + 2\cos \beta)}{\sin 2\gamma}$$

$$18) \sin \gamma = \frac{Z}{AO_2}$$

$$AL = 2AN \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 2R \sin \gamma \cdot \cos \alpha = 2R \sin 2\gamma$$

$$AL_2 = 2R \sin 2\gamma - 22 \cos \beta$$

$$\text{из 14.1. } \sin \gamma = \frac{BO_2}{AO_2} \cdot \sin \alpha = \frac{32}{AO_2} \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{\sin \gamma}{AO_2} = \frac{32}{AO_2} \cdot \sin \alpha \Rightarrow Z = 32 \sin \alpha$$

$$Z = \frac{2}{3 \sin \alpha}$$

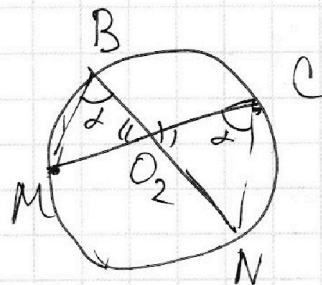
$$\cos \gamma = \frac{AL_2}{AO_2}$$

$$4R \sin \gamma \cdot \cos \gamma = Z(3\cos \alpha + 2\cos \beta)$$

$$4R \cdot \frac{2}{AO_2} \cdot \frac{AL_2}{AO_2}$$

$$\frac{MO_2}{NO_2} = \frac{BO_2}{CO_2} =$$

$$= \frac{3}{2} = \frac{MB}{CN}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ Продолжение.

$$\angle ANO_2 = 2\beta \text{ (вписанный угол)}$$

$$\angle AO_2N = 180 - 90 + \alpha - 90 + \beta = \alpha + \beta =$$

$$\angle ANB = 2\beta \text{ (вписанный).}$$

$$\Rightarrow \triangle AO_2N - \text{р/б}$$

$$AO_2 = 2AN \cdot \sin \beta \Rightarrow AO_2 = 4 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

аналогично

$$AO_2 = 2AM \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow AO_2 = \frac{9 \sin \alpha}{\sin \beta} \Rightarrow$$

$$AM = \frac{4.5}{\sin \beta}$$

$$\Rightarrow AO_2^2 = 36 \Rightarrow$$

$$AN = \frac{2}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{AO_2 = 6}$$

$$\text{Ответ: } AO_2 = 6.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\text{или } 2x^2 + 2x + 1 = y$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2}$$

$$4x^2 - 3x + 4 \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{8}$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} =$$

$$= 1 \quad \underbrace{4x^2 - 3x + 3}_{>0} + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$$



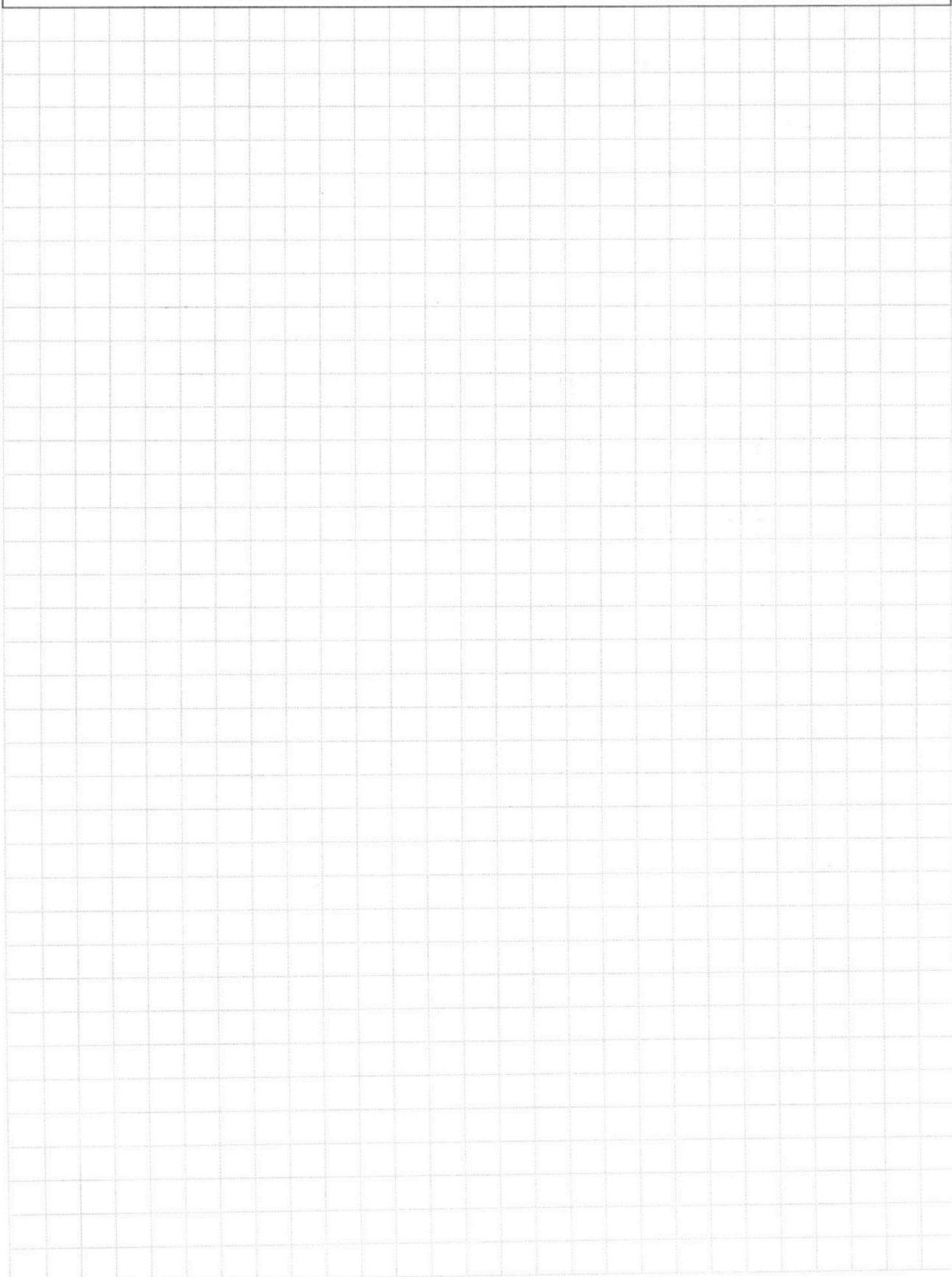
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновики

N1

$$\begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &: 2^{11} \cdot 7^{12} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \\ b &= 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \\ c &= 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2} \end{aligned}$$

$abc \rightarrow \min$?

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 20 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 37 \end{cases}$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \rightarrow \min$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \rightarrow \min$$

$$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 + 2\alpha_2 + 2\beta_2 + 2\gamma_2 \geq 31$$

$$\alpha_1 + \gamma_1 + \alpha_1 + \beta_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 + 17 + 20$$

$$2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 51 \Rightarrow 2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = 52, \text{ т.е.}$$

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N}$$

N2 $\frac{a}{b} \quad a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$

$m_{\max}$?

$$= \frac{a+b}{\frac{a^2 - 6ab + b^2}{a+b}} = \frac{a+b}{\frac{(a+b)^2 - 8ab}{b(1 + \frac{a}{b})}} = \frac{a+b}{\frac{(a+b)^2 - 8ab}{b(1 + \frac{a}{b})}}$$

$$= \frac{\frac{a+b}{m}}{\frac{(a+b)^2 - 8ab}{m}} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} = \frac{a+b}{b^2(\frac{a^2}{b^2} - 6\frac{a}{b} + 1)}$$

можно сократить на b

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{18}{30} + \frac{15}{30} = \frac{33}{30}$$

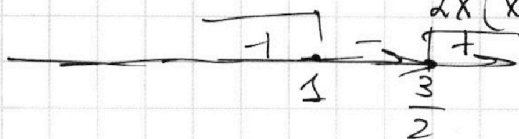
$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

при каких $x \geq 1$:

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 1$$

$$2x(x+1) \geq 0$$

$$\frac{+}{-} \quad \frac{+}{0} \quad x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4. Черновик

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2(x-1)(x-\frac{3}{2})} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Замечаю:

$$2 - 7x = 1$$

Замечаю: $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a, a \geq 0$
 $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b, b \geq 0$

$$\begin{cases} a^2 = 2x^2 - 5x + 3 \\ b^2 = 2x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = 2 - 7x$$

$$a - b = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a - b) - (a - b)(a + b) = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(1 + a + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

т.к. $a \geq 0, b \geq 0$, то $a + b + 1 \geq 1$, т.о. не подходит (2)

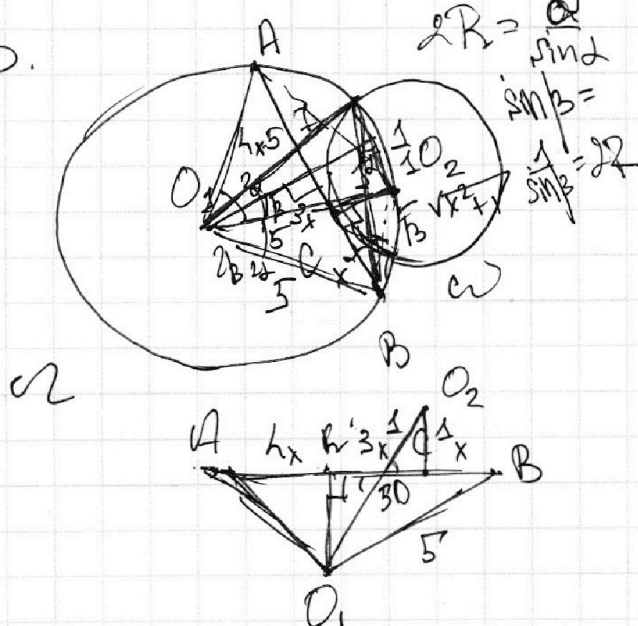
$$a = b$$

т.о. $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \Rightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 2 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{7}$$

$$\sqrt{\frac{4}{49} + 1} + \sqrt{1 + \frac{4}{49}} = 5$$

N3.



AC, CB = 7

$$\begin{aligned} \angle \omega &= 1 \\ \angle \omega &= 5 \end{aligned} \quad 3x = \frac{O_1 K_1}{\tan \frac{\omega}{2}}$$

$$AB = ? \quad \tan \frac{\omega}{2} = \frac{O_1 K_1}{y_1}; \tan \frac{\omega}{2} = \frac{1}{y_2}$$

$$x = ? \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{O_1 K_1}{O_1 D}; \sin \frac{\omega}{2} = \frac{1}{O_2 D}$$

$$5 = \frac{O_1 K_1}{\sin \frac{\omega}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

$$O_1 K_1^2 + O_2 K_1^2 = 25$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

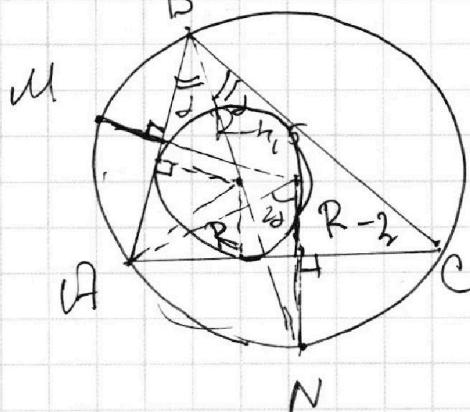


$$\begin{aligned} 3x &= \frac{1}{\cos \alpha} \cdot (0,1K+1) \\ 5 &= \frac{1}{\sin \alpha} \cdot (0,1K+1) \\ \frac{5}{3x} &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \\ \frac{5}{(0,1K+1)} &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{(0,1K+1)^2}{25} + \frac{9x^2}{25} &= 1 \\ 49x^4 + 50x^2 - 99 &= 0 \end{aligned}$$

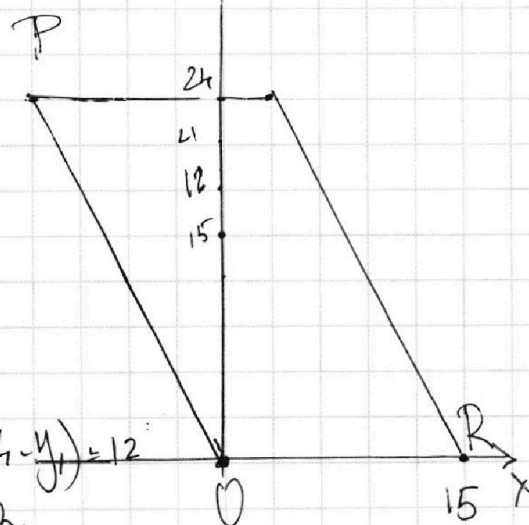
$$\begin{aligned} (0,1K+1)^2 &= 25 - 9x^2 \\ 0,1K+1 &= \sqrt{25 - 9x^2} \\ 25 - 9x^2 - 2\sqrt{25 - 9x^2} + 1 + 16x^2 &= 25 \\ 7x^2 - 2\sqrt{25 - 9x^2} + 1 &= 0 \\ 7x^2 + 1 &= 2\sqrt{25 - 9x^2} \\ \Rightarrow 49x^4 + 14x^2 + 1 &= 100 - 36x^2 \\ 49x^4 + 50x^2 - 99 &= 0 \end{aligned}$$

N2. $x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1}$, $AB = 8x \Rightarrow \boxed{AB = 8}$

$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$ состоит из
 $\frac{a}{b}$ - несократимого, т.о. a - простое число
 b - состоит из простых чисел



$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= -\frac{99}{49} \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 &= 12 \\ 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) &= 12 \\ (-15, 24), 2(-12 - x_1) + (24 - y_1) &= 12 \\ -2x_1 - y_1 &= 12 \end{aligned}$$