



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc . ~~2028~~ $2^{28} \cdot 7^{39}$

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно. ~~3438~~

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x. \quad 1/9, \dots$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$. ~~3481~~ 3481

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения. $\pm \sqrt{15}$; $\pm \frac{\sqrt{109}}{5}$

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №1.

Дано:

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{11} \cdot 7^{16}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

Найти ~~наим~~
наим abc .

Решение:

1) Очевидно, ~~что~~ чтобы abc было наименьшим числа a, b, c должны состоять только из 2 и/или 7, т.к. иначе у нас будут дополнительные множители, которые не входят на делимость

данную в условии, но увеличат произведение abc . Тогда, пусть $a = 2^x \cdot 7^{x'}$, $b = 2^y \cdot 7^{y'}$, $c = 2^z \cdot 7^{z'}$, тогда из условия

задач получим систему неравенств (так же $x, y, z, x', y', z' \geq 0$ и $\in \mathbb{Z}$)

$$\begin{cases} x+y \geq 15 \\ y+z \geq 17 \\ x+z \geq 23 \\ x'+y' \geq 11 \\ y'+z' \geq 18 \\ x'+z' \geq 39 \end{cases}$$

2) Из этой системы получим, что $x+y+z \geq 27,5$ и $x'+y'+z' \geq 34$. Небольшо заметить, что наименьшее значение $x+y+z$ будет при 28, т.к. меньше они быть не может (по условию $x+y+z \geq 27,5$ и то, что они целые неотрицательные) и при $x+y+z = 28$ у нас есть решение, которое удовлетворяет системе $(x, y, z) = (10; 5; 13)$ и удовлетворяют условиям на $x', y', z' \Rightarrow$ Найми $x+y+z = 28$.

3) ~~Если мы будем действовать с числами x', y', z' аналогично пункту 2), то получим, что $x'+y'+z' \geq 34$ и ~~как~~ знаем наим $x'+y'+z' = 34$, но это не так, т.к. при $x'+y'+z' = 34$ у нас как минимум одно из чисел отрицательно. Тогда взглянем на последнее неравенство ($x'+z' \geq 39$) и получим, что $x'+y'+z' \geq 39$ (т.к. $39 \leq x'+z' \leq x'+y'+z'$ для $x', z', y' \geq 0 \Rightarrow x'+y'+z' \geq 39$).~~

Теперь наим значение 39. Тогда подставим в систему значения x', y', z' удовл. неравенству $x'+y'+z' = 39$ и получим решение (К примеру: $(x', y', z') = (16; 0; 23)$). Т.к. это решение удовлетворяет условиям на x', y', z' и системе ~~то~~ и мы доказали, что значения $x'+y'+z'$ не может быть меньше 39, то значит ~~наим~~ $x'+y'+z' = 39$.

4) Теперь найдем наименьшее значение abc :

$abc = 2^x \cdot 7^{x'} \cdot 2^y \cdot 7^{y'} \cdot 2^z \cdot 7^{z'} = 2^{(x+y+z)} \cdot 7^{(x'+y'+z')}$ - чтобы это значение стало минимальным нужно, чтобы $x+y+z$ было мин. и $x'+y'+z'$ было минимальным $\Rightarrow x+y+z = 28$ и $x'+y'+z' = 39$ И тогда наименьшее значение произведения $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$ ~~Означает, что это значение удовлетворяет условиям~~

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$\frac{a}{b}$ - несократима
 $a, b \in \mathbb{N}$

$m_{\max} = ?$

Решение

Задача №2

1) П.К. Нам нужно сократить дробь $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ на мак-
симальное значение m , то это значение будет
 $\text{НОД}(a+b; a^2-7ab+b^2)$, т.к. на большее число
нас не поделится хотя бы одно из чисел $a+b$ или
 $a^2-7ab+b^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

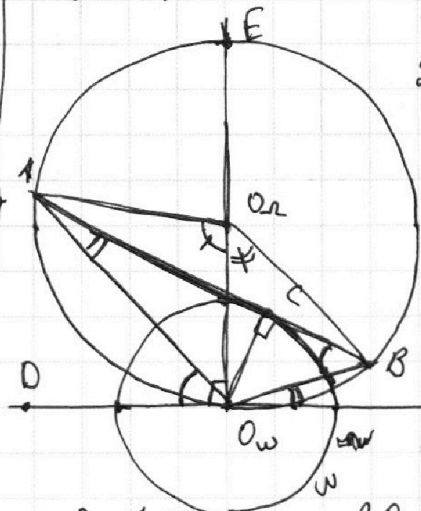


Задача №3

Дано:
 $AE:CB = 17:7$
 $O_\omega \in \Omega$
 $R_\omega = 7$
 $R_\Omega = 13$

$AB = ?$

Доказательство:



- 1) $OE \perp AB$, т.к. это радиус в точку касания к касательной.
- 2) $O_\Omega O_\omega \cap \Omega = (.) O_\omega$ и $(.) E$
- 3) $O_\Omega A = O_\Omega B = O_\Omega O_\omega = R_\Omega = 13$.
- 4) Проведем касательную DF к окружности Ω в точке O_ω .
- 5) $\angle DO_\omega A = \angle AB O_\omega$, т.к. это угол между кас и хордой и вписанный угол опирающийся на одну и ту же дугу.
- 6) Аналогично пункту 5): $\angle BO_\omega F = \angle O_\omega AB$.

7) $\angle AO_\Omega O_\omega = 2\angle AB O_\omega$ и $\angle BO_\Omega O_\omega = 2\angle O_\omega AB$, т.к. это центральный и вписанный углы опирающиеся на одну и ту же дугу.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4.

Решить уравнение $\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

Решение:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2-6x+2 \geq 0 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty) \\ x \in \text{любое} \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \quad | \text{Введем замену: } a = 1-9x$$

$$\sqrt{3x^2+3x+1+1-9x} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{b} = a \quad | \text{Возведем обе части в квадрат:}$$

$$a+b+b-2\sqrt{b(a+b)} = a^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{b(a+b)} = 2b+a-a^2 \quad \text{Опять возведем в квадрат.}$$

$$a^2+4b^2+a^4+4ab-2a^3-4a^2b = 4b^2+4ab \Leftrightarrow a^2(a^2-4b-2a+4) = 0 \Leftrightarrow a^2(a-1)^2-4b = 0$$

$$\begin{cases} a^2 = 0 \\ (a-1)^2-4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ (a-1)^2-4b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1-9x = 0 \\ (-9x)^2-4(3x^2+3x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 81x^2-12x-4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 69x^2-12x-4 = 0 \end{cases} \quad \frac{D}{4} = \left(\frac{12}{2}\right)^2 - (-4) \cdot 69 = 312 = 4 \cdot 78 \quad \begin{cases} x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69} \\ x = \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \end{cases}$$

Мы получили три корня и остается проверить их на ОДЗ:

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{1}{9}} \quad \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} \quad \frac{6-2\sqrt{78}}{69} \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$

$$3(3+\sqrt{3}) \sqrt{1} \quad 2\sqrt{78} \sqrt{63+23\sqrt{3}} \quad 6-2\sqrt{78} \sqrt{63-23\sqrt{3}}$$

$$9-3\sqrt{3} \sqrt{1} \quad 312 < 63^2+23^2 \cdot 3+2 \cdot 23 \cdot 63 \cdot \sqrt{3} \quad -2\sqrt{26} \sqrt{21\sqrt{3}-23}$$

$$8 \sqrt{3\sqrt{3}} \uparrow^2 \quad \text{П.К. } 312 < 63^2 \quad 23 \sqrt{21\sqrt{3}+2\sqrt{26}}$$

$$64 \sqrt{27} \quad \frac{6+2\sqrt{78}}{69} < \frac{3+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{6-2\sqrt{78}}{69} < \frac{3+\sqrt{3}}{3} \quad \frac{23}{23} < 21\sqrt{3}+2\sqrt{26}$$

$$\frac{3-\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{9} \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \Rightarrow \frac{1}{9} \in \text{ОДЗ.}$$

$$\text{П.К. } \frac{6-2\sqrt{78}}{69} < \frac{3-\sqrt{3}}{3}, \text{ то } \frac{6-2\sqrt{78}}{69} \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \Rightarrow \frac{6-2\sqrt{78}}{69} \in \text{ОДЗ.}$$

$$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} \quad \text{П.К. } \frac{6+2\sqrt{78}}{69} < \frac{3+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \in (-\infty; \frac{3+\sqrt{3}}{3}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \in \text{ОДЗ.}$$

$$\Rightarrow \text{Все три ответа подходят.}$$

Ответ: $\frac{1}{9}; \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}.$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №5.

$P(-13; 26)$ $O(0; 0)$
 $Q(3; 26)$ $R(16; 0)$

Решение:

1) Пусть y_1 как зафиксирована точка A , тогда найдем какие координаты может иметь точка B :

$$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 - 2x_2$, как мы видим это прямая с таким же коэффициентом наклона, как и стороны параллелограмма (QR и OP). Значит эта прямая параллельна сторонам QR и OP .

2) Продлим сторону QR до пересечения с осью OY и получим точку $E(0; 32)$.

Найти:
Кол-во пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ таких, что они удовлетворяют уравнению $2x_1^2 - 2x_1 + y_1 - y_2 = 14$

3) Т.к. точка B должна лежать вне параллелограмма, то крайние для нее случаи это стороны PO и QR и значит вот значения для свободного члена:
 $0 \leq 14 + 2x_1 + y_1 \leq 32 \Leftrightarrow -14 - 2x_1 \leq y_1 \leq 18 - 2x_1$ Значит теперь мы получили ограничение на координаты точки $A \Rightarrow$ Точка A может лежать только между прямыми a и b (высота их), где прямая a имеет уравнение $y = -14 - 2x$, а прямая b : $y = 18 - 2x$. (Заштрихованная область это то, где может лежать точка A).

4) Для каждой точки A может быть либо 13 точек B , либо 14. Если координаты y_1 пересечение прямой $y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 - 2x_2$ и оси OY нечетное, то вариантов 13, а если четное, то 14 (пример прямой b и c , черные точки - точки в которых может быть точка B). Чтобы это пересечение было четным, сумма $2x_1 + y_1$ должна быть четной, значит y_1 - четный.

5) Кол-во точек A с четным y_1 - это $n_1 = 13 \cdot 9$ (принимать рядов по 9 точек) А кол-во точек с четным y_1 - это $n_2 = 14 \cdot 10$ (14 рядов по 10 точек) А значит кол-во пар точек A и B это $N = 14n_2 + 13n_1 = 14^2 \cdot 10 + 13^2 \cdot 9 = 1521 + 1960 = 3481$

Ответ: 3481 пара.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

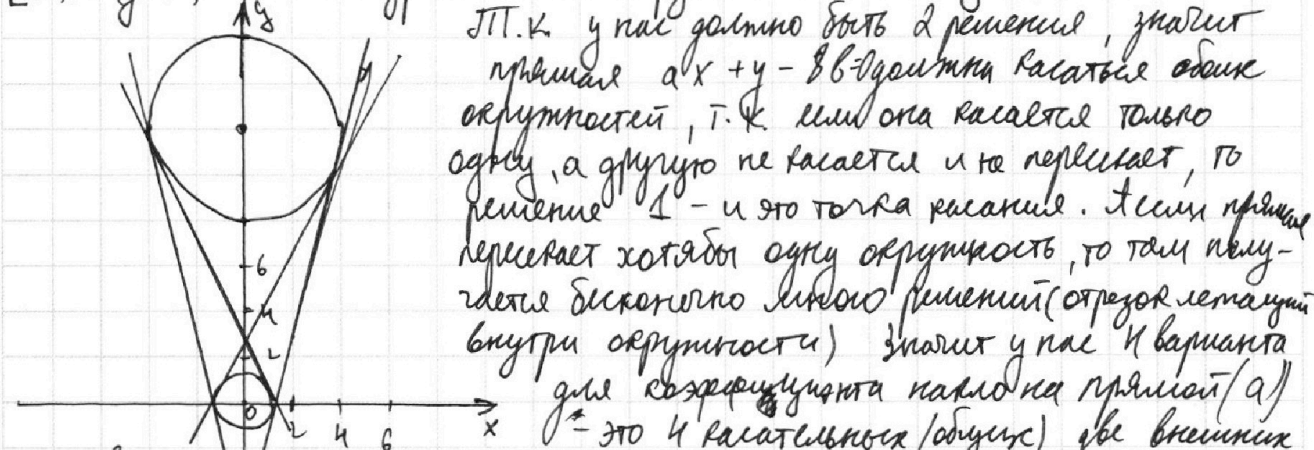


Задача №6.

Найти все значения параметра a , при которых найдется b и будет 2 решения системы

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0. \end{cases}$$

Первое уравнение в системе это прямая, а второе неравенство равносильно:
 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 16 \end{cases}$
 Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ — уравнение окружности с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 1, а неравенство $x^2 + y^2 \leq 1$ — это окружность и круг внутри нее. Аналогично с уравнением окружности $x^2 + (y - 12)^2 = 16$



Т.к. у нас должно быть 2 решения, значит прямая $ax + y - 8b = 0$ должна касаться обеих окружностей, т.к. если она касается только одной, а другую не касается и не пересекает, то решение 1 — и это точка касания. Если прямая пересекает хотя бы одну окружность, то там получится бесконечно много решений (отрезок лежащий внутри окружности). Значит у нас 2 варианта для коэффициента наклона прямой (a) — это 4 касательных (общих) две внешние и две внутренние.

Теперь найдем параметр a при котором это так. Сделаем это через расстояние от точки до прямой:

$$\begin{cases} 4 = \frac{|a \cdot 0 + 12 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ 1 = \frac{|a \cdot 0 + 0 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\sqrt{a^2 + 1} = |12 - 8b| \\ \sqrt{a^2 + 1} = |-8b| \end{cases}$$

При $b \in (-\infty; 0]$ $\begin{cases} 4\sqrt{a^2 + 1} = 12 - 8b \\ \sqrt{a^2 + 1} = -8b \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 1} = 4 \Rightarrow a^2 + 1 = 16 \Rightarrow a = \pm\sqrt{15}$

При $b \in (0; \frac{3}{4}]$ $\begin{cases} 4\sqrt{a^2 + 1} = 12 - 8b \\ \sqrt{a^2 + 1} = 8b \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 1} = \frac{12}{5} \Rightarrow a^2 + 1 = \frac{144}{25} \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{119}{25}}$

При $b \in (\frac{3}{4}; +\infty)$ $\begin{cases} 4\sqrt{a^2 + 1} = 8b - 12 \\ \sqrt{a^2 + 1} = 8b \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 1} = -4 \Rightarrow \text{решений нет, т.к. } \sqrt{a^2 + 1} > 0.$

Вот мы и получили 4 различных варианта для параметра a , что соответствует 4 различным касательным (с различными коэффициентами наклона).

Ответ: ~~$\pm\sqrt{15}$~~ Ответ: $\pm\sqrt{15}; \pm\frac{\sqrt{119}}{5}$



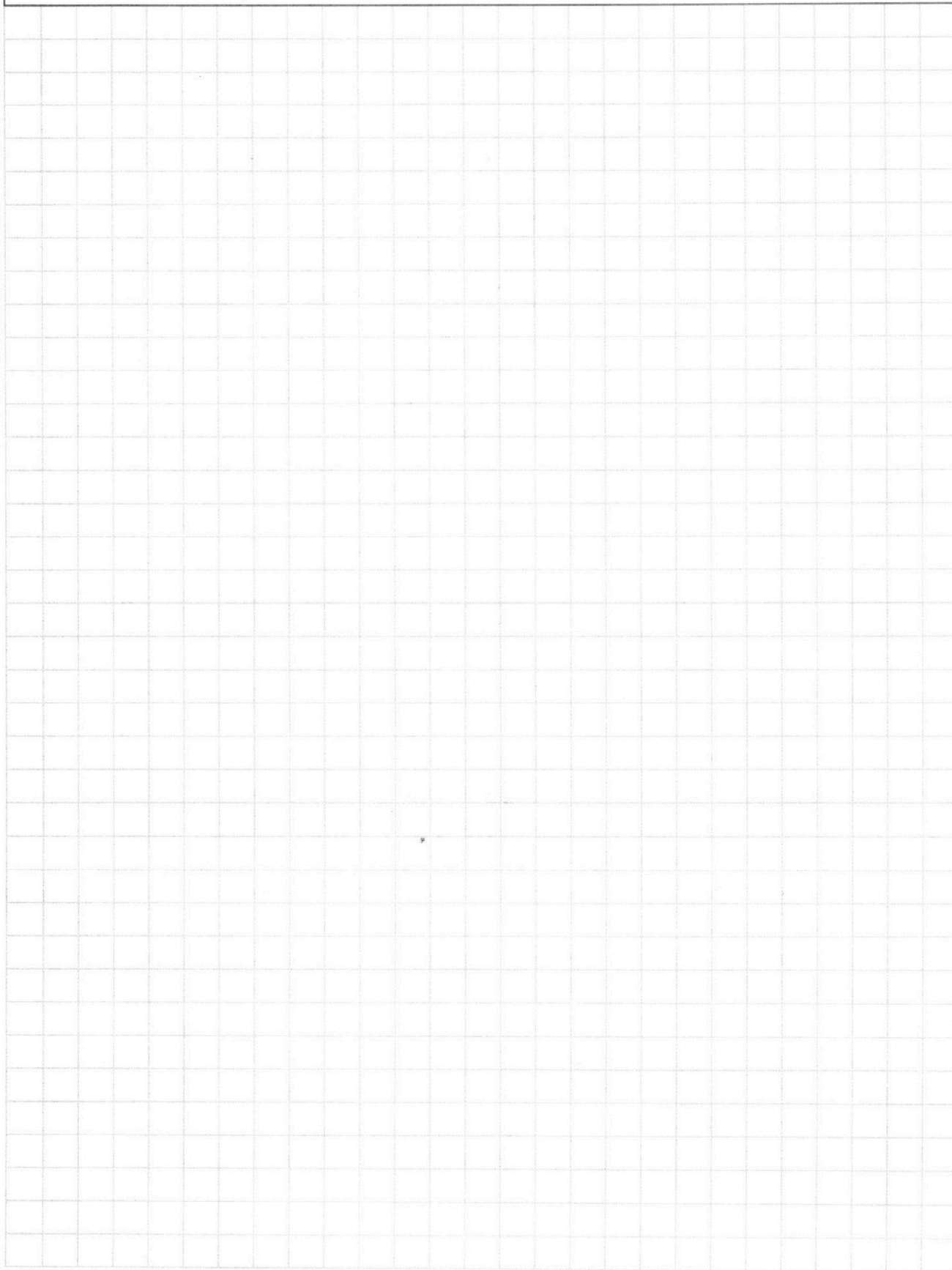
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порука QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+3x+1+(1-9x)} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$a = 3x^2+3x+1 \quad \sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \quad 2\sqrt{a(a+b)} = (2a+b-b^2)$$

$$b = 1-9x \quad a+b+a-2\sqrt{a(a+b)} = b^2 \quad 4a(a+b) = 4a^2+b^2+b^4+2ab-2ab^2-2b^3$$

$$4ab^2-2b^3 \Leftrightarrow 0 = b^2(1+b^2+4a-2b)$$

Если $b = 0$, то a -любое $\Rightarrow b=0 \Rightarrow 1-9x=0 \Rightarrow x=1/9$

$$1+b^2+4a-2b=0 \Leftrightarrow 4a+(b-1)^2=0 \Leftrightarrow 12x^2+12x+4+81x^2=0$$

$$93x^2+12x+4=0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 93 < 0 \Rightarrow \text{решений нет}$$

$$\text{OD3: } 3x^2+3x+1 \geq 0 - \text{всегда}$$

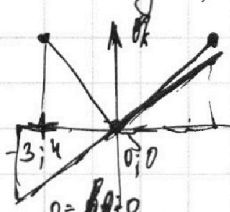
Ответ: $1/9$.

$$3x^2-6x+2 \geq 0 \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{9} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{1}{3} > 0$$

$$\sqrt{6}. x^2+y^2=1 - \text{окружность центр } (0,0) \quad R=1$$

$$x^2+(y-12)^2=16 - \text{окружность центр } (0,12) \quad R=4$$

$$D = ax+by-bb - \text{геторы касательных к окружности (вн. и внут.)}$$



$$0 = 12 \cdot 0 - 12 \cdot 0 = 0$$

$$3 = 4K \Rightarrow K = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{3}{4}x$$

$$y - \frac{3}{4}x = 0$$

$$\rho = \frac{4 + \frac{3}{4} \cdot 0}{\sqrt{\frac{16}{16} + \frac{9}{16}}} = 5$$

$$\rho = \frac{16+9}{\sqrt{25+16}} = 5$$

$$4 = \frac{|a \cdot 0 + 0 - 86|}{\sqrt{a^2+1}} \Leftrightarrow 4\sqrt{a^2+1} = |12-86|$$

$$1 = \frac{|a \cdot 0 + 0 - 86|}{\sqrt{a^2+1}} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+1} = |12-86|$$

$$16(a^2+1) = 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 86 + 86^2$$

$$a^2+1 = 64b^2 \Rightarrow 15a^2+15 = 144-64 \cdot 36$$

$$4c = |12-86| = 8(12-86) \Rightarrow 3c = 12 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow \sqrt{a^2+1} = 4 \Rightarrow a^2+1=16$$

$$c = |1-86|$$

$$4c = 12-86 \Rightarrow 3c = 12 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow \sqrt{a^2+1} = 4 \Rightarrow a^2+1=16$$

$$c = -86$$

$$4c = 12-86 \Rightarrow 5c = 12 \Rightarrow c = \frac{12}{5} \Rightarrow a^2+1 = \frac{12^2}{5^2} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{115}}{5}$$

$$c = 86$$

$$4c = 86-12 \Rightarrow 3c = -12 - \text{невозможно}$$

$$c = 66$$

Ответ: $\pm \sqrt{15}, \pm \frac{\sqrt{115}}{5}$

$$\text{НОД}(a+b; a^2-7ab+b^2)$$

$$\text{НОД}(a+b; -9ab)$$

$$(a-b)^2 = 5ab$$

