



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$y = \frac{3}{8}x$   
 $y = 0$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.



4. [5 баллов] Решите уравнение

$\frac{7x}{1} = \frac{CC_1}{x}$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1.

Заметим, что  $a \cdot b = 2^{14}$   $b \cdot c = 2^{17}$   $c \cdot a = 2^{20}$

Тогда  $(ab) \cdot (bc) \cdot (ca) = 2^{51}$

$$(abc)^2 = 2^{51}$$

Так, как  $(abc)^2$  - квадрат, значит степень

входящего простого множителя в него

~~равна~~ кратна 2.  $(abc)^2 = 2^{51} \Rightarrow (abc)^2 = 2^{52}$

$$\Rightarrow abc = 2^{26}$$

~~Аналогично заметим, что  $a \cdot b = 7^{10}$   $b \cdot c = 7^{17}$~~

~~Значит  $(abc)^2 = 7^{64} \Rightarrow abc = 7^{32}$~~

~~Так как 2 и 7 взаимно просты, можно сказать~~

~~что  $abc = (2^{26} \cdot 7^{32})$ , значит конкретные~~

~~значения  $abc = abc$  равно  $2^{26} \cdot 7^{32}$~~

~~Пример  $a$~~

Заметим, что  $a \cdot c = 7^{37}$ , значит  $a \cdot b \cdot c = 7^{37}$ ,

значит минимальное значение  $abc$  равно

$2^{26} \cdot 7^{37}$  (так как  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$  (2 и 7 взаимно

просты)). Пример для  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжите задание 4:

Пример:  $a = 2^8 \cdot 7^{20}$   $b = 2^6$   $c = 2^{12} \cdot 7^{17}$

Легко проверить, что  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ , и что

все условия выполняются.

Ответ:  $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$ .

$a$  и  $b$  не имеют общих делителей отличных от 1.

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 2ab}$$

Пусть сократимось на

какое-то  $m$ , т.е.  $a+b \div m \Rightarrow (a+b)^2 \div m$

$$\Rightarrow 2ab \div m$$

~~Предполагаем, что  $m$  содержит какое-то простое делительное, отличное от  $2^3$ , т.е.~~

$$a \cdot b \div p, \quad p \text{ — простое}$$

Предполагаем, что  $m$  содержит какое-то простое делительное, отличное от  $2^3$ ,  
(возможно, может делиться на  $2^1, 2^5, 3^2, \dots$

.....), т.е.  $a \cdot b \div p^k$ , ~~заметим~~ заметим  
это. ~~Если~~ Если  $a \cdot b \div p^k$ , то либо  $a \div p^k$  либо  
 $b \div p^k$ , поэтому что иначе  $a$  и  $b$  можно  
сократить на  $p$ , что противоречит условию.

Значит, если  $a \cdot b \div p^k$  без отрывающегося отрыва  
скажем  $a \div p^k \Rightarrow b \div p$ , но  $a+b \div m$ ,  $m \div p^k$

значит  $a+b \div p^k$ ,  $a \div p^k \Rightarrow b \div p^k$  — противоречие



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2 Продолжение.

Знаменатель предположительно неверно и

т не содержит иконтентов кроме

$2^3$ , значит  $m$  максимальное  $= 2^3$ .

$$m = 2^3$$

Пример.

$$\frac{3+5}{(3+5)^2 - 8(3+5)} = \frac{8}{8 \cdot 8 - 8 \cdot 15}$$

Очевидно, что  
ка 8 сокр.

Ответ:  $m = 8$ .





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 Прямые

$$\angle B = \angle A \Rightarrow \triangle BAC \text{ т.р.}$$

$$BC_1 = AC_1 \Rightarrow \text{высота} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + (7x - 2) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

1)  $D_{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}: D < 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 > 0$

2)  $2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3) \Rightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$

$$2x^2 - 5x + 3 + (7x - 2)^2 + 2 \cdot (7x - 2) \cdot \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2x^2 + 2x + 1$$

$$(7x - 2)^2 + (7x - 2) \cdot (2 \cdot \sqrt{2x^2 - 5x + 3}) = (7x - 2)$$

$$(7x - 2) \cdot ((7x - 2) + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - 1) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 3 + (7x - 2)^2 + 2 \cdot (7x - 2) \cdot \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2x^2 + 2x + 1 \\ x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty) \end{array} \right.$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (7x - 2)^2 + 2 \cdot (7x - 2) \cdot \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 7x - 2 \\ x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty) \end{array} \right.$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (7x - 2) \cdot (7x + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - 3) = 0 \\ x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty) \end{array} \right.$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МОТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи 4 (1 продолж.)

$$\left\{ \begin{array}{l} 7x - 2 = 0 \\ 7x + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{7} \\ \left[2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}\right]^2 = (3 - 7x)^2 \\ 3 - 7x \geq 0 \end{array} \right.$$
$$x \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \quad x \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{7} \\ 8x^2 - 20x + 12 = 49x^2 - 42x + 9 \end{array} \right.$$
$$x \leq \frac{3}{7}$$
$$x \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{7} \\ 41x^2 - 22x - 3 = 0 \end{array} \right.$$
$$x \leq \frac{3}{7}$$

$$3) 41x^2 - 22x - 3 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82}$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

$$x_{1,2} \leq \frac{3}{7} = \frac{18}{42}$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} > \frac{11 + 2 \cdot 7}{41} > \frac{25}{41} > \frac{18}{42}$$

$$\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < \frac{11 - 14}{41} < 0$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

$$\left(\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < 0 < 1\right)$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

Ответ:  $x = \frac{2}{7}$ ,  $x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

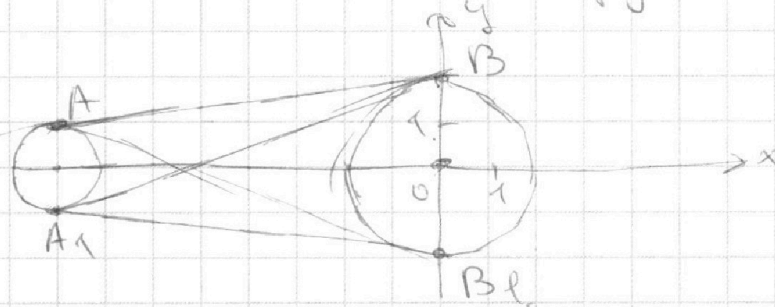
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 Продолжение.

Рассмотрим все касательные (внутр и внешние) к этим окружностям.



Пусть

$$A(-8; 1); A_1(-8; -1).$$

$$B(0; 2); B_1(0; -2).$$

Тогда легко видеть, что  $AB, AB_1, A_1B, A_1B_1$  — касательные. Рассмотрим их ~~коэффициенты~~

~~они равны~~ коэффициенты прямых содержащих

$$\text{эти касательные. } k_{AB} = \frac{1}{8}, k_{AB_1} = -\frac{1}{8},$$

$$k_{A_1B} = \frac{3}{8}, k_{A_1B_1} = -\frac{3}{8}. \text{ Если } a \text{ не совпадает}$$

ни с одним из  $k$ , тогда ур-е  $y = ax + b$

не может быть касательной. (противоречие).

$$\text{Тогда } a = \frac{1}{8}; -\frac{1}{8}; \frac{3}{8}; -\frac{3}{8}.$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{1}{8}; -\frac{1}{8}; \frac{3}{8}; -\frac{3}{8}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



✓6 Продолжение.

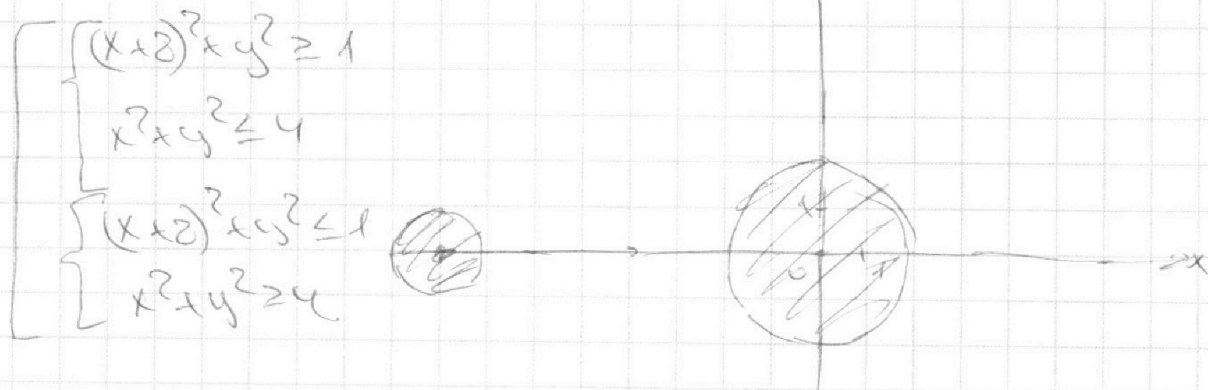
2 решается когда прямая пересекает два  
круга в некоторых точках,

✓6.

$$ax - y + 10b = 0. \quad 1 \text{ ур-е}$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0. \quad 2 \text{ ур-е}$$

Построим график 2 ур-я,



Легко видеть что  $ax - y + 10b = 0$  - график  
прямой (т.к.  $y = ax + 10b$ ). Значит  
имеет место 2 решения когда  $ax + 10b$   
- касательная к обоим окружностям.

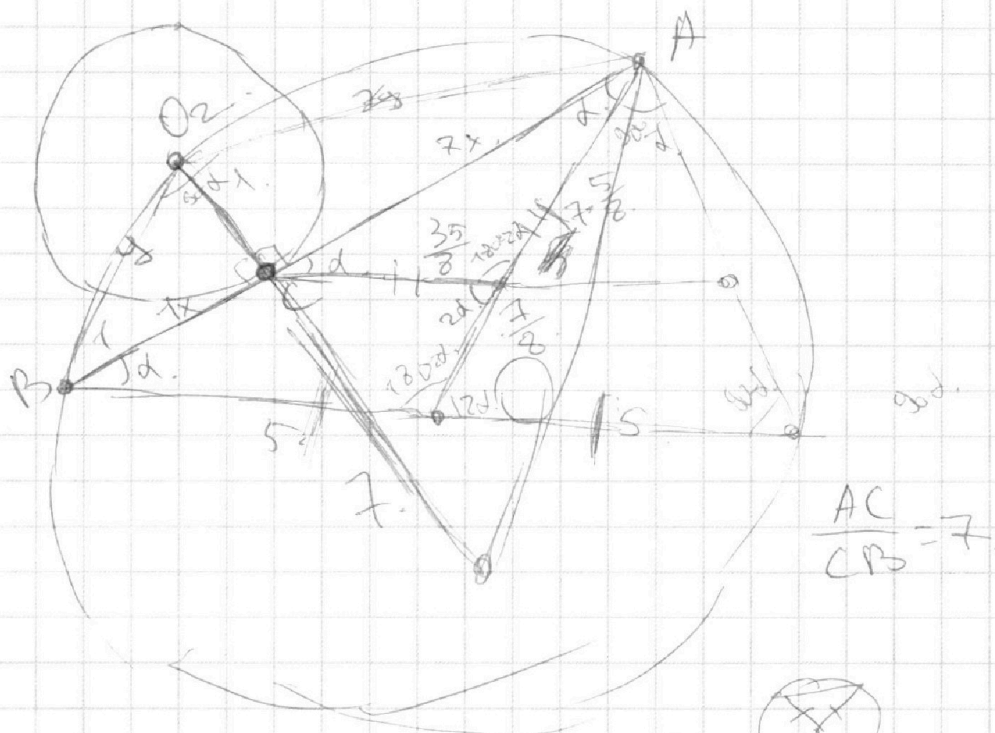
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

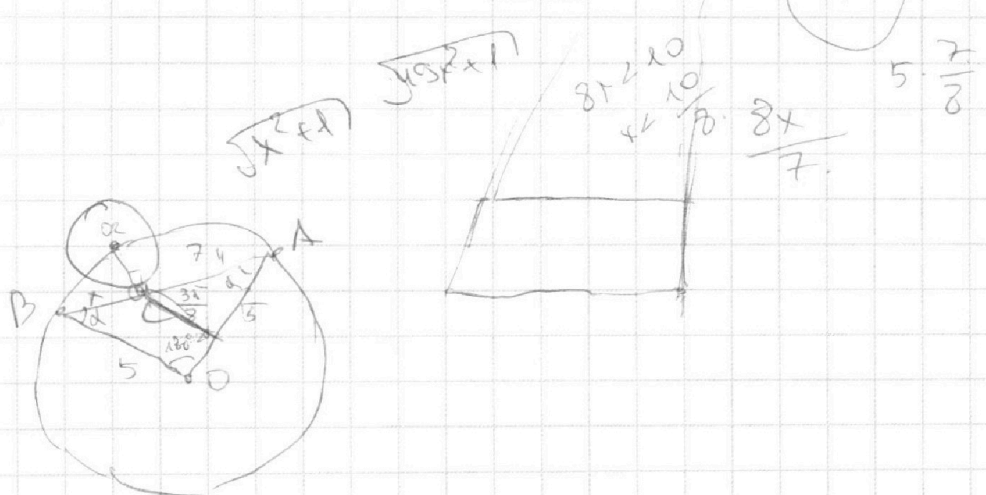
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{CB} = 7.$$





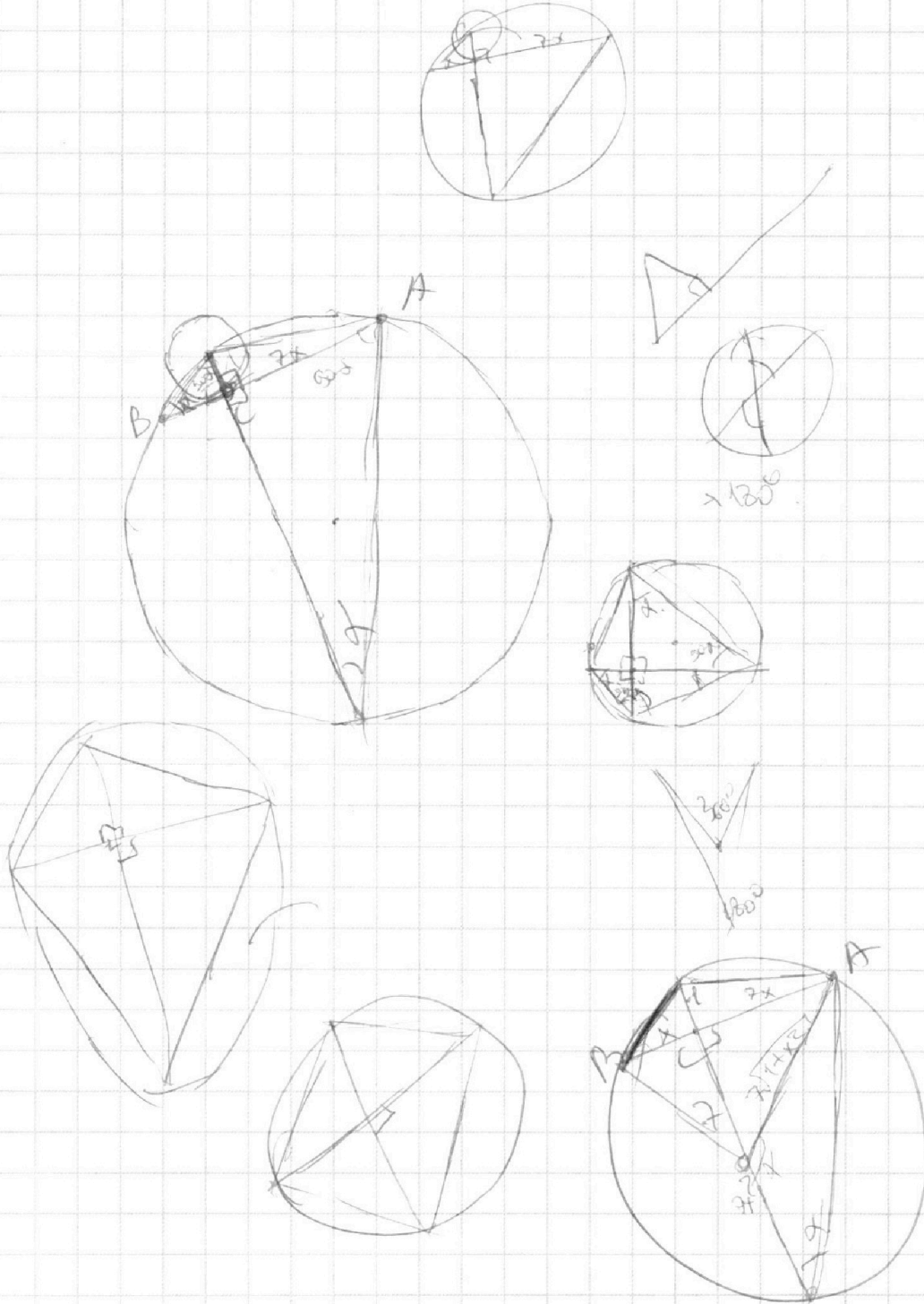
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





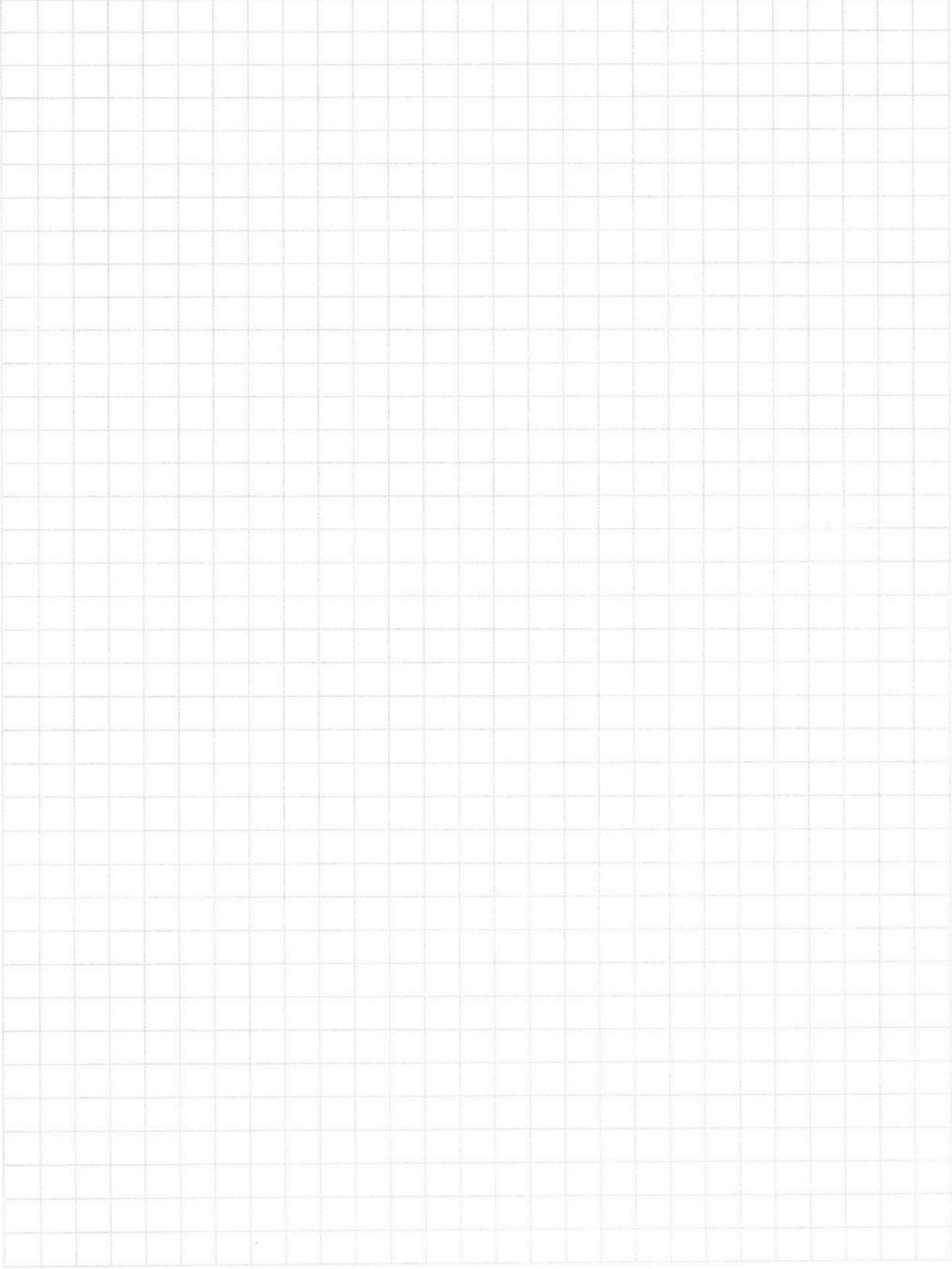
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$\frac{100}{100^2-8ab}$$

$$(a-b)^2 = 4ab$$

$$(a-5b)(a$$

$$(a+b)^2 - 8ab$$

$$(a+b) \equiv m$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$(a+b)^2 \equiv 100 \pmod{m}$$

$$8ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$8ab \equiv m$$

$$a+b \equiv m$$

$$8ab \equiv m$$

$$a+b \equiv m$$

$$(a+b)^2 \equiv m$$

$$a+2ab+b \equiv m$$

$$2a+2b \equiv m$$

$$4a^2+4b^2+8ab \equiv m$$

$$4a^2+4b^2 \equiv m$$

$$4(a^2+b^2) \equiv m$$

$$(a+b)^2 \equiv m$$

$$(a+b) \equiv m$$

$$1000$$

$$a=5^4$$

$$b=1000-5^4$$

$$\frac{10}{100-8ab}$$

$$8ab$$

$$a=5^4$$

$$a+b=1000$$

$$2 \cdot 5^4$$

$$2 \cdot 5^4$$

$$\frac{100}{100^2-8ab}$$

$$a+b$$

$$a^2+b^2$$

$$2ab$$

$$2a^2$$

$$a \rightarrow b$$

$$8ab$$

$$a+b$$

$$4(a^2+b^2)$$

$$2a+2b$$

$$8ab$$

$$4(a+b)^2$$

$$4a^2+4b^2+8ab$$

$$4(a^2+b^2)$$

$$(a+b)^2$$

$$(a+b)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2 \begin{matrix} 14 \\ 10 \end{matrix}$$

$$a+b=10$$

$$bc: 2 \begin{matrix} 17 \\ 17 \end{matrix}$$

$$b+c=17$$

$$ac: 2 \begin{matrix} 20 \\ 37 \end{matrix}$$

$$c+a=37$$

$$(abc)^2: 7 \begin{matrix} 64 \\ 32 \end{matrix}$$

$$c-b=27$$

$$bc: 7 \begin{matrix} 17 \\ 37 \end{matrix}$$

$$a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}$$

$$a_1 + b_1 \geq 14$$

$$b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$$

$$a_2 + b_2 = 10$$

$$c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$$

$$b_1 + c_1$$

$$ac: 7 \begin{matrix} 37 \\ 37 \end{matrix}$$

$$a+b: 2 \begin{matrix} 14 \\ 14 \end{matrix}$$

$$(abc)(bc)(ca) = 2^{14+17+20} = 2^{51}$$

$$bc: 2 \begin{matrix} 17 \\ 17 \end{matrix}$$

$$abc \geq 2$$

$$ca: 2 \begin{matrix} 20 \\ 20 \end{matrix}$$

$$(abc)^2: 2^{51}$$

$$a = 2^8$$

$$b = 2^6$$

$$c = 2^{12}$$

$$14+17+20 = 51$$

$$31 \quad 51$$

$$(abc)^2: 2^{52}$$

$$abc: 2^{26}$$



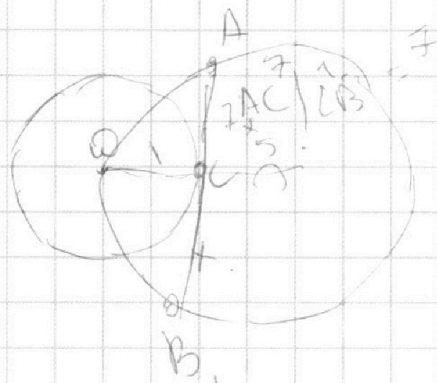
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

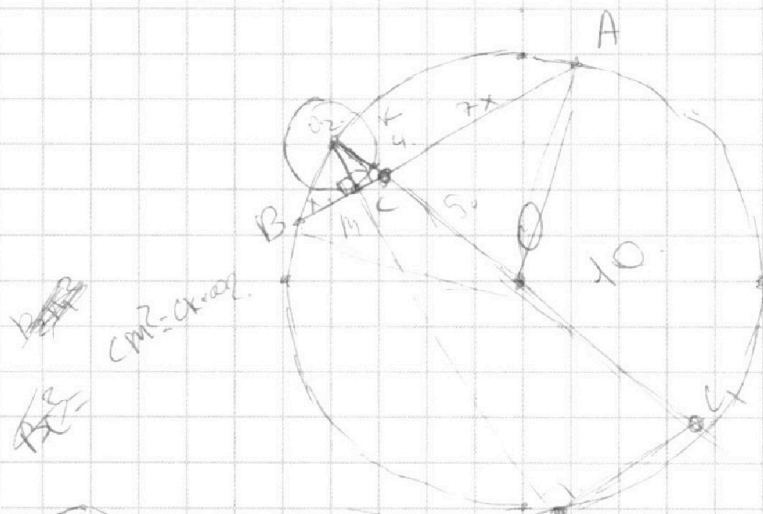
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



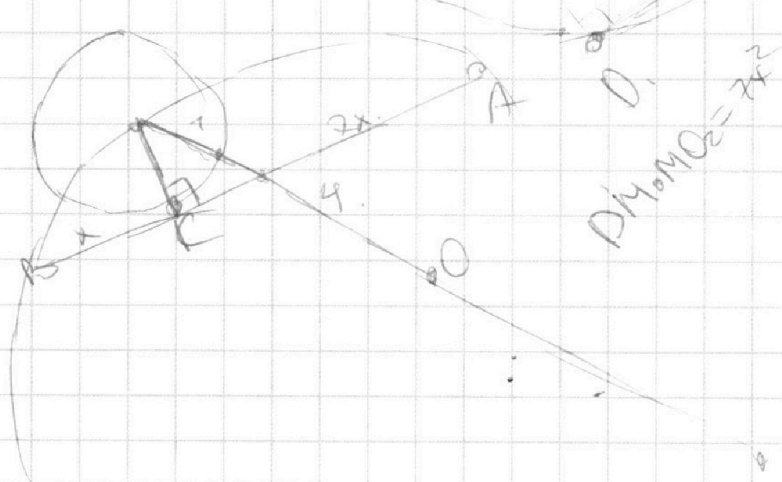
$$CM^2 = CK \cdot CO_2$$



$$\frac{10}{10} = \frac{10}{O_2B}$$

$$CM^2 = CK \cdot CO_2$$

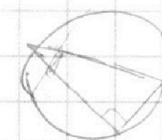
$$CO_2 = \frac{10}{O_2D}$$



$$DM \cdot MO_2 = 7 \cdot 2$$

$$O_2D = \sqrt{10^2 - DC^2}$$

MC



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



24.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (2 - 7x) + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$(x-1)(2x-3)$   
 $x=1$   
 $2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 3 = -2$   
 $2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 5$   
 $2 - 7 \cdot 1 = -5$   
 $\sqrt{a} = x + \sqrt{b}$   
 $a = x^2 + 2$

$4 - 4 \cdot 2 < 0$   
 $2x^2 - 2x + 1 > 0$

$x = \frac{2}{7}$      $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$

$x \leq \frac{2}{7}$      $x \in (-\infty, \frac{2}{7}]$

$4 - 3 = 7x + 1$   
 $2 = 7x$

$$(x-1)(2x-3) - 49x^2 - 28x + 4 + (2x^2 + 2x + 1) + 2(2-7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 49x^2 + 28x - 4 - 2x^2 - 2x - 1 = 2(2-7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

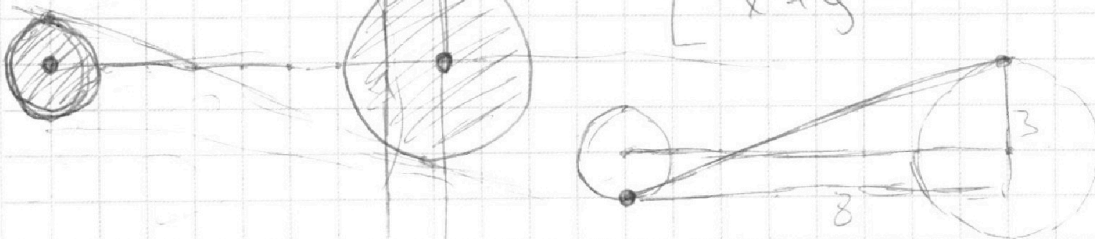
$$\frac{-49x^2 + 21x - 2}{2(2-7x)} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

-6.

$(x+8)^2 + y^2 \geq 1$   
 $x^2 + y^2 \leq 4$

$ax - y + 10b = 0$   
 $y = ax + 10b$

$(x+8)^2 + y^2 \geq 1$   
 $x^2 + y^2 \leq 4$



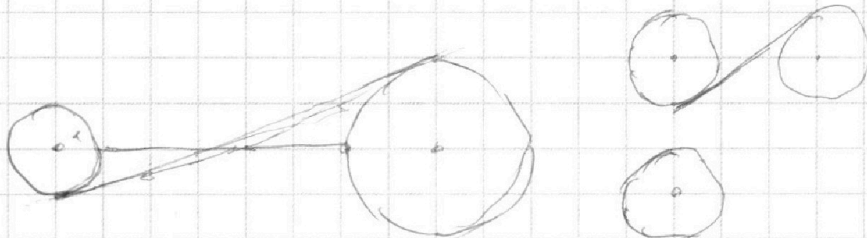
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

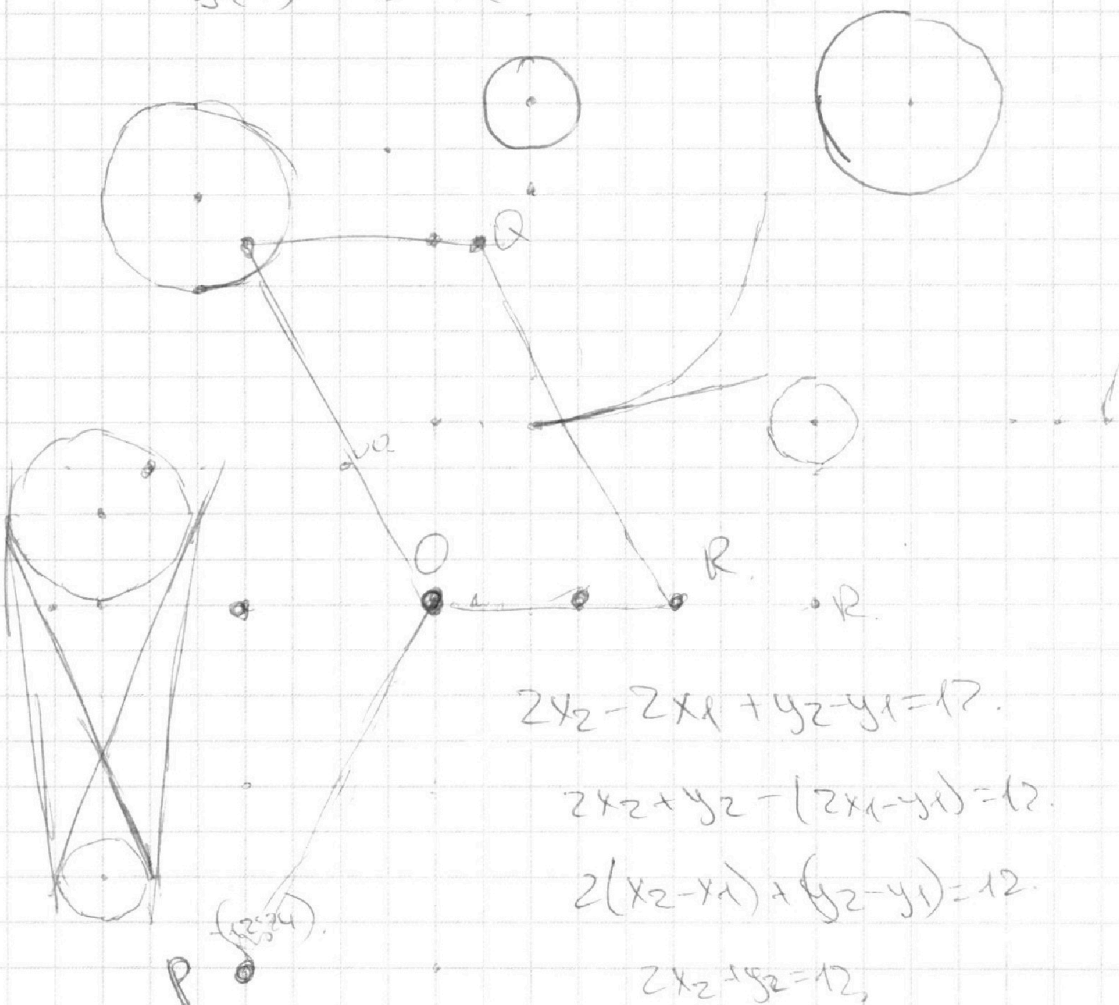
- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S(x) = 15(x) \cdot (x + 0) + 5(x + 0)$$



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_2 + y_2 - (2x_1 - y_1) = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 12$$

$$y_2 = 12 - 2x_2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

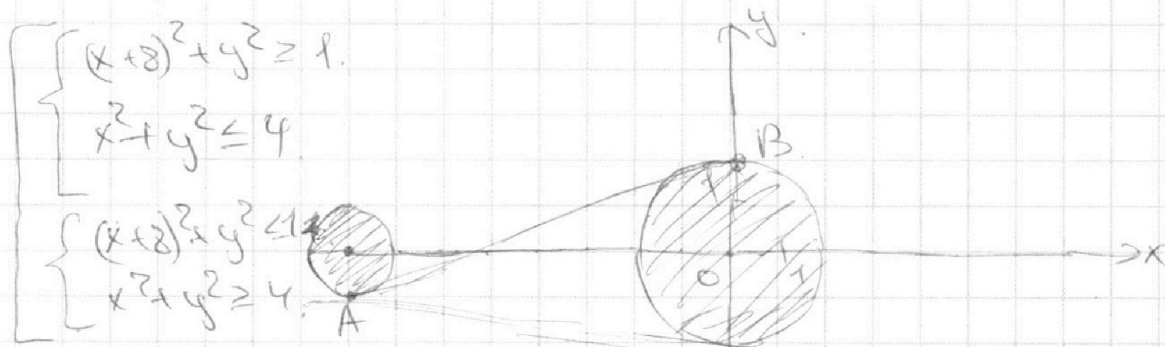
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0. \end{cases}$$

Построим график  $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$ .



Заметим, что  $ax - y + 10b = 0$  — уравнение прямой.

т.к.  $y = ax + 10b$ . Обозначим  $A(-8; -1)$

$B(0; 2)$ . Пусть коэффициент прямой содержит

отрезок  $AB$  равен  $k$ , ~~т.е.  $y = kx$~~ , ~~значит~~

что  $AB$  перпендикулярна  $Ox$  в точке  $k$ . Тогда

прямая  $y$  совп.  $AB$ :  $y = \frac{3}{8}x + 2$ .

~~Заметим, что если  $|a| \geq \frac{3}{8}$ , то есть~~

легко видеть, что система имеет ровно

2 решения когда прямая  $y = ax + 10b$



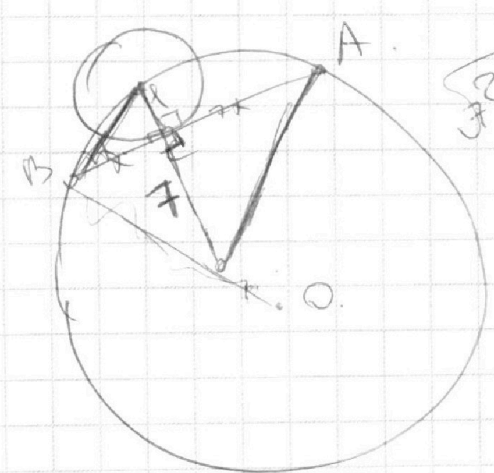
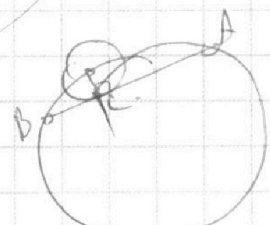
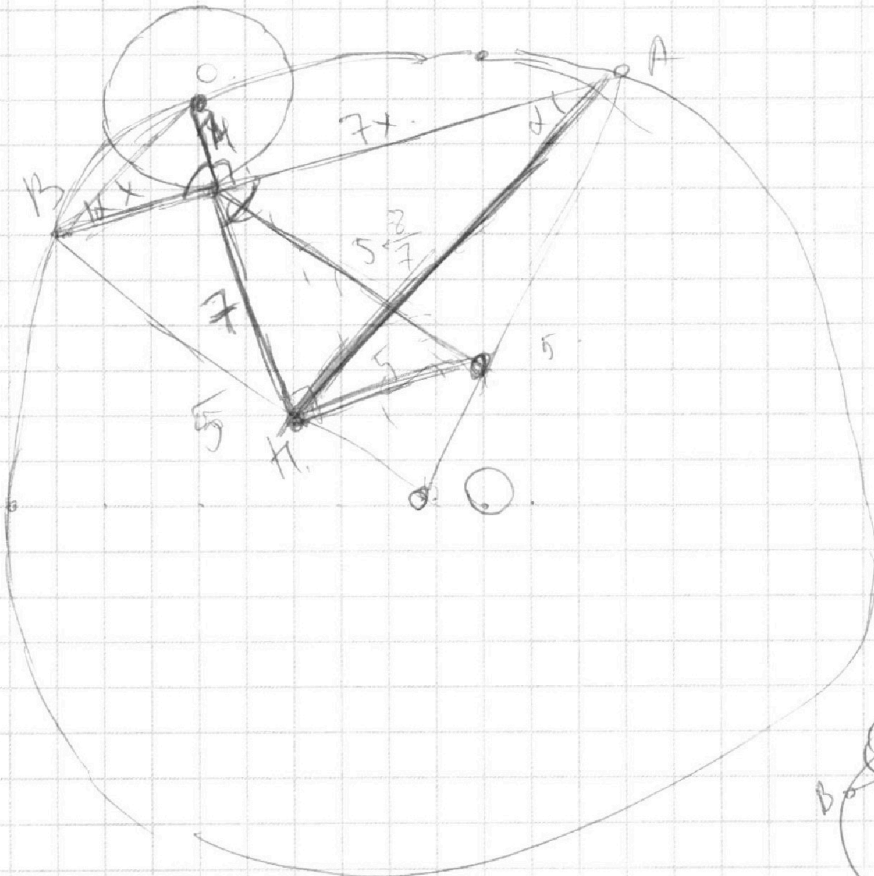
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} & \sqrt{2+2+2} \\ & \sqrt{7+7+7} \\ & \sqrt{1+4+2} = 5 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + (7x - 2) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2$$

$$2x^2 - 5x + 3 + (7x - 2)^2 + 2\sqrt{7x - 2} \cdot 2(7x - 2)\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2x^2 + 2x + 1 + 4$$

$$(x-1)(2x-3)$$

$$x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

D

4

$$D = b^2 - 4ac$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cup 7x - 2$$

5

$$\sqrt{4} + 2(3x - 2) = 8$$

$$2x^2 - 5x + 3 \cup 2 - 7x$$

$$6 \quad 8x(3x - 2) = 7(7x - 2)$$

$$(7x - 2)^2 + 2(7x - 2)\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (7x - 2)$$

$$(7x - 2) \left( (7x - 2) + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - 1 \right) = 0$$

$$8 + (-1) = 7$$

$$64 + 2 \cdot 28(-1) + 1 = 7^2 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - 7x$$

$$4(2x^2 - 5x + 3) = (3 - 7x)^2$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 49x^2 - 42x + 9$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 22^2 + 4 \cdot 41 \cdot 3$$

$$4091^2 + 4 = 123$$

$$4(122 \pm 123) \sqrt{244}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$a+b:m$$

$$8ab:m$$

ва-уровень сложности

$$(a+b)^2 = m$$

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$$

$$\frac{2^2 + 5}{8} + 3$$

$$\frac{1}{8} \times \frac{2}{8} = 1$$

$$3 \cdot 2$$

$$\frac{1}{8} \times \frac{6}{8} = 3$$

$$\frac{3}{8} \times 1$$

$$2^2 \cdot p_1 \cdot p_2$$

$$m = a \cdot b \cdot p_1 \cdot p_2$$

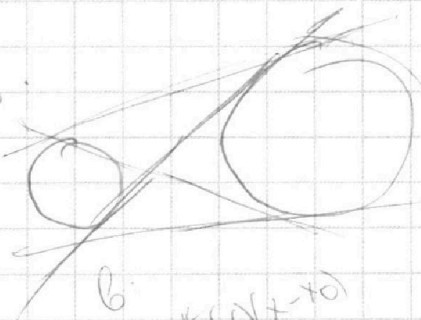
$$11 - 2 = 8$$

$$\frac{-5}{8}$$

$$r = 2$$

$$\frac{D}{4} = 11^2 + 4 \cdot 1 \cdot 3$$

$$3 \cdot 5$$



$$41$$

$$121 + 123 = 244 = 4 \cdot 61$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+10)$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{4 \cdot 61}}{82}$$

$$\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

$$2\sqrt{61} > 2 \cdot 7 = 14$$

$$11 + 4 = 25 > 18$$

$$\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$$

$$y = ax + 10b - \text{ур прямой}$$