



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\begin{cases} ab: 2^{14} 7^{10} \\ bc: 2^{17} 7^{17} \\ ac: 2^{20} 7^{37} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = x \cdot 2^{14} 7^{10} \\ bc = y \cdot 2^{17} 7^{17} \\ ac = z \cdot 2^{20} 7^{37} \end{cases}, x, y, z \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (abc)^2 = xyz \cdot 2^{14+17+20} \cdot 7^{10+17+37} = xyz \cdot 2^{51} \cdot 7^{64} =$$

$$xyz \cdot 2 \cdot (2^{25} \cdot 7^{32})^2, \text{ т.е. } (abc)^2 - \text{полный квадрат,}$$
$$(2^{25} \cdot 7^{32})^2 - \text{полный квадрат} \Rightarrow 2xyz - \text{полн. кв.},$$

как простое полн. кв. Заметим, что величина

abc минимальна, когда величина xyz мини-

мальна, а минимальный полный квадрат вида,

$$2xyz = 4 \text{ (это не 1, т.к. есть множитель 2)}$$

$$\text{при } x=y=1 \text{ и } z=2. \text{ Тогда } abc = \sqrt{2xyz \cdot (2^{25} \cdot 7^{32})^2} =$$

$$= 2 \cdot 2^{25} \cdot 7^{32} = 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{32}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2

90
37
56

Т.к. дробь $\frac{a}{b}$ - несократима, то $\text{НОД}(a; b) = 1$.

Заметим, что $m = \text{НОД}(a+b; a^2-6ab+b^2)$

$$a^2-6ab+b^2 = (a+b)^2 - 8ab. \text{ Пусть } y = a+b,$$

$a^2-6ab+b^2$ есть другая дробная д/л. Тогда

$$\begin{cases} a+b : d \\ (a+b)^2 - 8ab : d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b : d \\ 8ab : d \end{cases}$$

Т.к. $\text{НОД}(a; b) = 1$ и $a+b : d$, то $a \not\vdash d$ и $b \not\vdash d$

Иначе, например, если $a \vdash d$, то из $a+b : d$ и $b \vdash d$,
т.е. $\text{НОД}(a; b) > 1$.

$$\text{Но из } 8ab : d \Leftrightarrow \begin{cases} 8 : d \\ a : d \\ b : d \end{cases}, \text{ значит } 8 : d,$$

значит максимальное $d = 8$.

Докажем, что это подходит и $m = 8$:

$$\text{Пусть } a = 3, b = 5. \text{ Тогда } a+b = 8, a^2-6ab+b^2 =$$

$$= 9 - 6 \cdot 3 \cdot 5 + 25 = 34 - 90 = -56. \text{ Тогда}$$

$$\text{НОД}(a+b; a^2-6ab+b^2) = \text{НОД}(8; -56) = 8.$$

Ответ: $m = 8$.

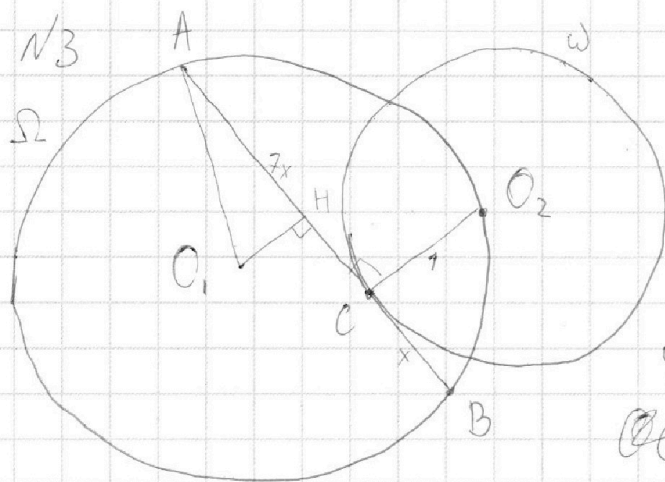
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$R_{\Omega} = R = 5$$

$$R_{\Omega'} = r = 1$$

1) Пусть $AC = 7x$, $BC = x$.

Пусть O_1, O_2 -

центры Ω и Ω' . Тогда

O_2C - радиус, провед.

в точку кас. $\Rightarrow O_2C \perp AB$. По

2) По т. Пиф для $\triangle ACO_2$ и $\triangle BCO_2$: $AO_2^2 = 49x^2 + 1$,

$BO_2^2 = x^2 + 1$. По т. кос для $\triangle AO_2B$:

$$AB^2 = AO_2^2 + BO_2^2 - 2 \cos \angle AO_2B \cdot AO_2 \cdot BO_2 \quad (\text{Угол } \angle AO_2B = \alpha)$$

$$64x^2 = 50x^2 + 2 - 2 \cos \alpha \cdot \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{49x^2 + 1}$$

$$2 \cos \alpha \sqrt{x^2 + 1} \sqrt{49x^2 + 1} = 2 - 14x^2;$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - 7x^2}{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{49x^2 + 1}}$$

3) $\widehat{AO_2B} = 360^\circ - \widehat{AB} = 360^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle AO_1B = \widehat{AO_2B} = 360^\circ - 2\alpha$

Спускаем высоту O_1H на AB . $\angle AO_1B$ - р/д, т.к.

$AO_1 = O_1B = R \Rightarrow AH = \frac{1}{2}AB = 4x$. Также O_1H - с-с

$$\angle AO_1B \Rightarrow \angle AO_1H = \frac{\angle AO_1B}{2} = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \cos \angle AO_1H =$$

$$= \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{7x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{49x^2 + 1}} \Rightarrow$$

$$O_1H = 5 \cdot \frac{7x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{49x^2 + 1}} \quad (= AO_1 \cdot (-\cos(\alpha)))$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача Т. Пир для $a \neq 0, 1$:

$$25 = 16x^2 + 25 \frac{(7x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)(49x^2 + 1)} \cdot (x^2 + 1)(49x^2 + 1)$$

$$25(x^2 + 1)(49x^2 + 1) = 16x^2(x^2 + 1)^2(49x^2 + 1) + 25(7x^2 - 1)^2;$$

$$25(49x^4 + 50x^2 + 1) = 16x^2(49x^4 + 50x^2 + 1) + 25(49x^4 - 14x^2 + 1)$$

$$25 \cdot 49x^4 + 25 \cdot 50x^2 + 25 = 16 \cdot 49x^6 + 16 \cdot 50x^4 + 16x^2 +$$

$$+ 25 \cdot 49x^4 - 25 \cdot 14x^2 + 25;$$

$$25 \cdot 50x^2 = 16 \cdot 49x^6 + 16 \cdot 50x^4 + 16x^2 - 25 \cdot 14x^2$$

$$16 \cdot 49x^6 + 16 \cdot 50x^4 + 16x^2 - 25 \cdot 64x^2 \quad | :16x^2$$

$$49x^4 + 50x^2 + 1 - 25 \cdot 4 = 0;$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 = 1; & x = 1, \text{ т.к. } x > 0 \text{ в силу усл. задачи} \\ x^2 = -\frac{99}{49} & \text{нет. реш.} \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow AB = 8x = 8.$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N4

$\frac{25}{228}$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad \sqrt{\sqrt{2}}$$

~~$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} =$$
$$= 49x^2 - 28x + 4;$$~~

~~$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = -45x^2 + 25x^2 \quad \sqrt{2}$$~~

~~$$\left\{ 4(2x^2 - 5x + 3) / (2x^2 + 2x + 1) = (5x(-9x^2 + 5))^2 \right.$$~~

~~$$\left. \left\{ 5x / (5 - 9x) \geq 0, \quad (*) \right. \right.$$~~

~~$$\left\{ 4(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3) = \right.$$
$$\left. = 25x^2 / (9x - 5)^2 \right.$$~~

~~$$4(4x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 6x + 3) = 25x^2(81x^2 - 90x + 25)$$~~

~~$$16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12 = 2025x^4 - 2250x^3 + 625x^2;$$~~

~~$$\text{Заметим, что } 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = 2 - 7x \Rightarrow$$~~

~~$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2x^2 - 5x + 3 - (2x^2 + 2x + 1);$$~~

~~$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) \cdot$$~~

~~$$(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1});$$~~

~~$$\left\{ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \right.$$~~

~~$$\left. \left\{ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right. \right.$$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 - \sqrt{2x^2-5x+3} \quad | \sqrt{}^2 \\ 2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1 \\ 2x^2+2x+1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 244 \ 2 \\ 122 \ 2 \\ \hline 61 \end{array}$$

$$\begin{cases} 7x = 2 \\ 2x^2+2x+1 = 1 - 2\sqrt{2x^2-5x+3} + 2x^2-5x+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7x+3 = 2\sqrt{2x^2-5x+3} \quad | \sqrt{}^2 \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7x+3 > 0 \\ 49x^2 - 42x + 9 = 4(2x^2 - 5x + 3) \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 41x^2 - 22x - 3 = 0 \\ x \leq \frac{3}{7} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{22+2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{22-2\sqrt{61}}{41} \\ x \leq \frac{3}{7} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ x = \frac{22-2\sqrt{61}}{41} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2/4 &= 121 + 3 \cdot 41 = 121 + 123 = \\ &= 244 = 4 \cdot 61 \end{aligned}$$

$$\frac{22-2\sqrt{61}}{41} \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\frac{154 - 14\sqrt{61}}{31} \sqrt{123}$$

$$\frac{31}{14} \sqrt{\sqrt{61}}$$

$$\frac{31}{14} < 7 < \sqrt{61}$$

$$22 - 14\sqrt{61} \sqrt{123 - 154}$$

Ответ: $\frac{2}{7}, \frac{22-2\sqrt{61}}{41}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

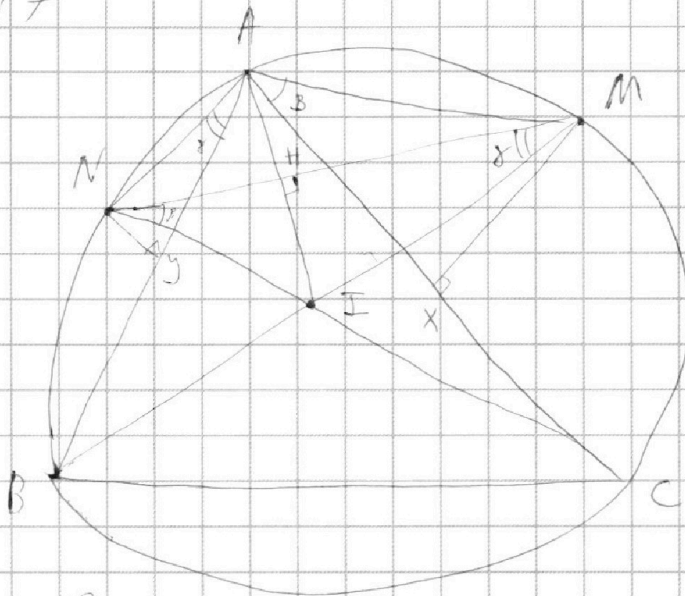
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N7



x, y - остроты углов.

$$\angle CMB = \angle B = 2\beta$$

$$\angle C = 2\delta$$

$$1) \text{ Тогда } \angle MNC =$$

$$\angle MAC = \frac{\angle B}{2} = \beta$$

(\angle и m - сеп углы)

$$\text{Аналогично } \angle NMB =$$

$$= \angle NAB = \gamma$$

$$2) \text{ По длине медиан } AM = MI \text{ и } AN = NI \Rightarrow$$

$$AMIN - \text{ ромб и } AI \perp MN \text{ и } HI = \frac{AI}{2}$$

$$3) AN \cdot \sin \beta = \frac{m_x}{AM} ; AM \cdot \sin \beta = \frac{9}{2} \text{ Аналогично}$$

$$AN \cdot \sin \gamma = 2 \quad HI = \sin \gamma \cdot MI, \text{ но } MI = AM \Rightarrow$$

$$HI = \sin \gamma \cdot AM \text{ Аналогично } HI = \sin \beta \cdot AN \Rightarrow$$

$$HI^2 = \sin \gamma \cdot AM \cdot \sin \beta \cdot AN = \sin \beta \cdot AM \cdot \sin \gamma \cdot AN =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot 2 = 9 \Rightarrow HI = 3 \Rightarrow AI = 186$$

Ответ: 186

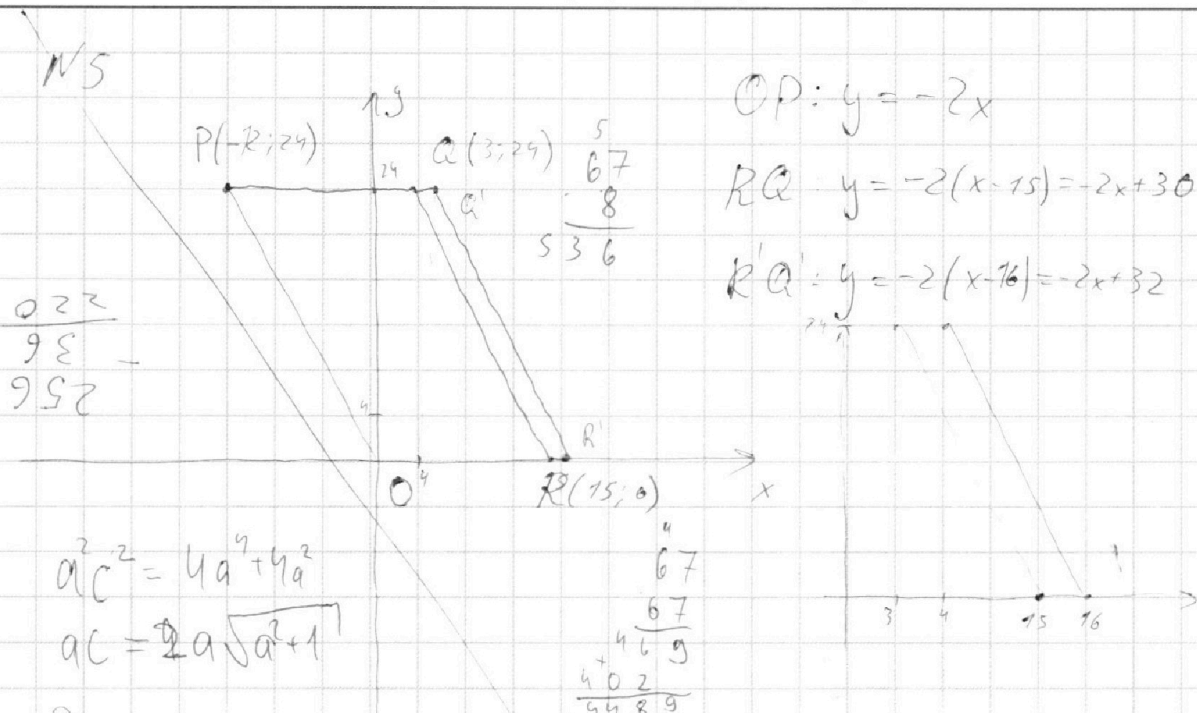
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Запишем условие $\forall A(x,y) \in PQR \cup P'Q'R'$

1) $y \in [0, 24]$; Пусть $R'(16; 0)$ и $A'(4, 24)$.

2) Заметим, что PQR и $P'Q'R'$ — это \triangle с танг углами 45° и 45° .
 Заметим, что RA и $R'A'$ — это \triangle с танг углами 45° и 45° .

1) Рассмотрим \triangle между RA и $R'A'$

Пусть точка $F(x_0, y_0) \in \triangle$ между RA и $R'A'$. Тогда

$$\begin{cases} y_0 + 2x_0 - 30 > 0 \\ y_0 + 2x_0 - 32 \leq 0 \\ y_0 \in [0, 24] \\ x_0 \in [3, 16] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 + 2x_0 = 31 \\ y_0 + 2x_0 = 32 \\ y_0 \in [0, 24] \\ x_0 \in [3, 16] \end{cases}$$

Для $\forall y_0$ одно из уравнений выполняется \Rightarrow равенство
 в \triangle между RA и $R'A'$
 24 целые точки

в этом \triangle между RA и $R'A'$ 24 целые точки



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

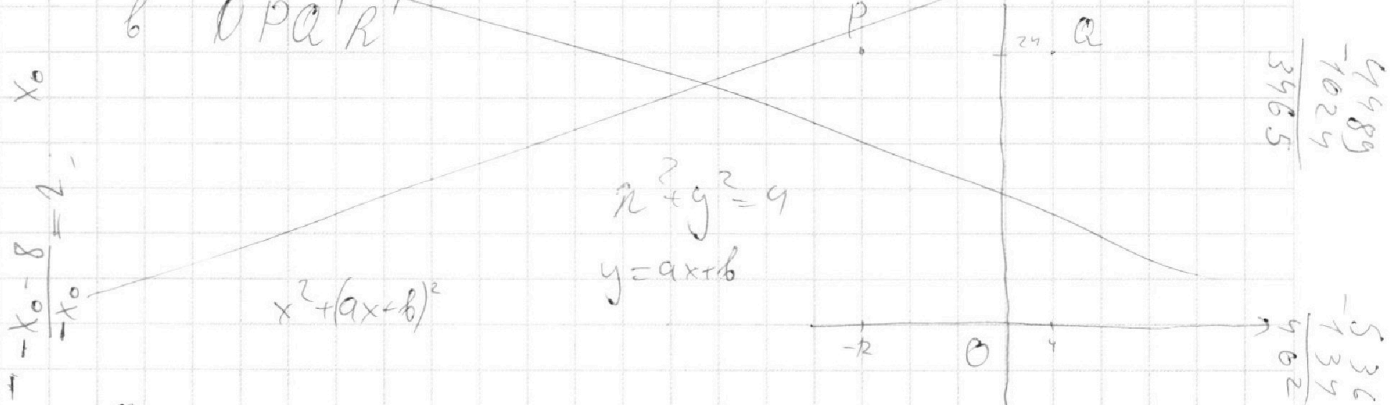
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2) Осталось посчитать, сколько целых точек в $OPQR'$



Посмотрим, сколько точек соответствует усл.

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$\text{1 кв.) } y_0 + 2x_0 = 31,32 \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 2x_1 = 31,32 \\ y_2 + 2x_2 = 31,32 \end{cases}$$

~~Очевидно, что $y_2 + 2x_2 - y_1 - 2x_1 = 0; 1 \neq 12 \Rightarrow$~~

~~в этом лн-ве таких точек нет \Rightarrow~~

~~можно проверить для $OPQR'$~~

$$\begin{aligned} x \cdot a &= t(b+c) \\ AI &= x - t = \frac{t(b+c)}{a} - t = \end{aligned}$$

$$NB_0 = ON - OB_0 = \frac{t(b+c-a)}{a}$$

$$= R - R \cdot \cos(90^\circ - B) =$$

$$= R(1 - \sin B)$$

$$\frac{AZ}{2} = AM$$

$$AM \cdot \sin B = \frac{9}{2}$$

$$AM \cdot \sin \gamma = 2$$

$$= \frac{AZ}{2} = MI \cdot \sin \gamma = AM \cdot \sin$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \cos(90^\circ - \frac{B}{2} - \frac{\gamma}{2}) = \sin(\frac{B+\gamma}{2}) = \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} =$$

65536

96721
-31185
65536

3465
31185

311
311
311
+311
833
96721

4489
-1024
3465

536
-134
402

1004
-462
542

89
26
57
1292

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$\begin{cases} ax + y + 10b = 0 \\ \frac{((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4)}{(x+8)^2 + y^2 - 1} \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4)}{(x+8)^2 + y^2 - 1} \leq 0$$

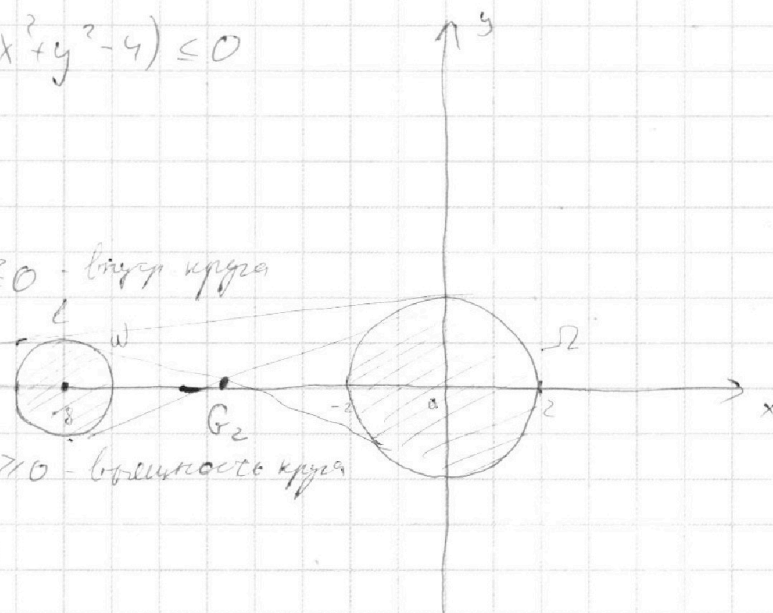
$$y = ax + 10b$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 - \text{внутри круга} \\ G_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ G_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 - \text{вне круга} \\ G_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ G_4 \end{cases}$$



Заметим, что любая прямая l , которая пересекает

W или Ω имеет на себе бесконечно много решений.

Если прямая не пересекает W и Ω или касается одной из них, то система имеет 0 или 1 решение.

И только если в касании обеих окружностей, то у системы будет два решения.

Из условия задачи получаем, что $y = ax + 10b$ произвольная прямая, задаваемая параметрами a .

Пусть $10b = c$. Тогда уравнение системы:
 $y = ax + c$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+y+c \neq x^2+y^2=4 \\ ax-y+c = \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (ax+c)^2 = 4 \\ (x+8)^2 + (ax+c)^2 = 1 \end{cases}, \text{ где оба уравнения имеют одно решение.}$$

$$\begin{cases} (a^2+1)x^2 + 2acx + c^2 - 4 = 0 \\ (a^2+1)x^2 + (2ac+16)x + c^2 + 63 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{1/2} = a^2c^2 - (a^2+1)(c^2-4) = 0 \\ D_{2/2} = (ac+8)^2 - (a^2+1)(c^2+63) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2c^2 - (a^2c^2 - 4a^2 + c^2 - 4) = 0 \\ a^2c^2 + 16ac + 64 - (a^2c^2 + 63a^2 + c^2 + 63) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2 - c^2 + 4 = 0 \quad (1) \\ -63a^2 - c^2 + 16ac + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c^2 = 4a^2 + 4 \\ c^2 = -63a^2 + 16ac + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2 + 4 = -63a^2 + 16ac + 1; \\ 4a^2 - c^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 67a^2 - 16ac + 3 = 0; \\ 4a^2 - c^2 + 4 = 0; \end{cases} | \cdot 1$$

$$\begin{cases} 4a^2 + 4 = -63a^2 + 16ac + 1; \\ 4a^2 - c^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

Из второй системы можем получить следующие:

$$8(2x+8) = -3; 16x = -67; x = -\frac{67}{16}$$

$$\text{Из 1: } a^2c^2 = 4a^4 + 4a^2 \text{ и } c^2 = 4a^2 + 4$$

$$\text{Из 2: } 16ac = 63a^2 + c^2 - 1,$$

$$256a^2c^2 = (63a^2 + c^2)^2 - 2(63a^2 + c^2) + 1$$

$$\text{Подставим из 1, получим: } 4 \cdot 256(a^4 + a^2) = (67a^2 + 4)^2 -$$

$$- 2(67a^2 + 4) + 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 (продолжение) Пусть $10b = c$

$$1024a^4 + 1024a^2 = 4488a^2 + 536a^2 + 16 - 134a^2 - 84$$
$$965a^4 - 622a^2 + 9 = 0,$$

2) окружностей ω и Ω есть два центра гомологии
сим (внеш. и внутр.) Видно из сим-ии,
что эти центры лежат на Ox . Пусть

$G_1(x_1; 0)$ и $G_2(x_2; 0)$. Т.к. отношение радиусов
окружностей равно 2, то центр ω - середина

отрезка G_1O . Тогда $x_1 = -16$ и мы имеем касательные

из G_1 к Ω . $y = ax + c$ проходит через

$$(-16; 0) \Rightarrow -16a + c = 0; 16a = c$$

и ур-ие $x^2 + (ax + c)^2 = 4$ имеет один корень \Rightarrow

$$(a^2 + 1)x^2 + 2acx + c^2 - 4 = 0, D/4 = a^2c^2 - (a^2 + 1)(c^2 - 4) = 0;$$

$$4a^2 - c^2 + 4 = 0 \Rightarrow 4a^2 - 256a^2 + 4 = 0, -252a^2 + 4 = 0;$$

$$a^2 = \frac{4}{252} \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{1}{63}} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{7}}$$

Если G_2 - центр внутр. гомологии, то G_2 делит
отрезок $(O; \text{центр } \omega)$ в отношении $2:1$; тогда от O

$$\Rightarrow x_2 = -8 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{16}{3}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 (продолжение)

Мы ищем касательные к Γ_2 к Ω

$y = ax + c$ проходит через $(-\frac{16}{3}, 0) \Rightarrow$

$$0 = -\frac{16}{3}a + c; \quad 16a = 3c. \quad \text{и}$$

$x^2 + (ax^2 + c)^2 = 4$ имеет один корень, т.е.

$$4a^2 - c^2 + 4 = 0; \quad \text{и} \quad 36a^2 - (16a)^2 + 36 = 0,$$

$$36 = 220a^2; \quad a^2 = \frac{36}{220} = \frac{9}{55}; \quad a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\text{При } a = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{7}} \quad 16a = \pm \frac{16}{3} \sqrt{\frac{1}{7}} = 106, \text{ т.е.}$$

$$b = \pm \frac{8}{15} \sqrt{\frac{1}{7}}$$

$$\text{При } a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}} \quad 16a = \pm \frac{16 \cdot 3}{\sqrt{55}} = 308, \text{ т.е.}$$

$$b = \pm \frac{8}{5\sqrt{55}}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{7}}, \quad \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

