

$$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \geq \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$$

$$6\sqrt{3} + 2\sqrt{78 \cdot 3} \geq 69\sqrt{3} + 69$$

$$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \leq \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{6\sqrt{3} + 2\sqrt{78 \cdot 3}}{69 + 2\sqrt{78 \cdot 3}} \leq \frac{69\sqrt{3} - 69}{69 + 6\sqrt{26} + 63}$$



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 КЛАСС. Вариант 10

$$\frac{23}{69}, \quad \frac{25}{104}$$

$$529 + 104 + 4 \cdot 23 \cdot \sqrt{26} \leq 441 \cdot 3$$

$$78 = 3 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 3$$

- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- ✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь  $\frac{441}{1323}$

$$\frac{441}{1323}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

$$\frac{633 + 92\sqrt{26}}{92\sqrt{26}} \leq 1323$$

$$92\sqrt{26} \leq 690$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- ✓ 3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

$$46\sqrt{26} \leq 345$$

- ✓ 4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

$$\sqrt{3x(x-6)} + 2 - \sqrt{3x(x+1) + 1} = 1 - 9x$$

- ✓ 5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \end{cases}$$

$$ab \cdot bc \cdot ac : 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+18+39}$$

$$(abc)^2 : 2^{55} \cdot 7^{68}$$

из-за делительности.

$$abc : 2^{28} \cdot 7^{34}$$

также (поскольку  $abc = 2 \cdot 7 \cdot x$ )

$$\text{либо } (abc)^2 = 2^{2k} \cdot 7^{2t} \cdot x^2 \quad 2^{2k} \leq 2^{55}, \text{ т.е. } k \leq 27; \text{ а также } t \leq 34$$

либо  $7^{2t} < 7^{68}$ , т.е.  $2t < 68$ , т.е.  $t < 34$ .  
будет наименьшей делительности. ( $28 \cdot 2 = 56; 34 \cdot 2 = 68$ )

$$\Rightarrow abc : 2^{28} \cdot 7^{34} \quad \text{поскольку } abc = 2^{28} \cdot 7^{34} \cdot p.$$

$$m.k \ ac : 7^{39} \cdot 2^{23} \Rightarrow ac : 7^{39}, \text{ значит } abc : 7^{39} \Rightarrow$$

$$abc = 7^{39} \cdot k = 7^{34} \cdot 2^{28} \cdot p \Rightarrow p : 7^5, \text{ т.е. } p \text{ делит } abc$$

(один из  $7^{39}$  членов  $2^{28}$ , но минимальное такое число делителей)

это  $7^{39} \cdot 2^{28}$  (меньше числа, которое будет на делящем числе  $7^{39}$  или  $2^{28}$  (степеней)  $\Rightarrow$  не будет делительности).

Пример на  $abc = 7^{39} \cdot 2^{28}$ :

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$$

$$abc = 2^{5+13+10} \cdot 7^{28+11} = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$b = 2^5$$

$$ab = 7^{15} \cdot 7^{11} : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^{18} \cdot 7^{28} : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

Пример удовлетворяет условию, меньшее число.

Ответ:  $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$  (минимум  $\rightarrow 2^{28} \cdot 7^{39}$ )

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} \quad \text{если } a \text{ и } b \text{ просты с } b \quad [1-\text{безчилдроо}]$$

$(a+b)^2 : m$ , если дробь сократима, то и  $9ab : m$   
(иначе знаменатель  $\geq m$ )

$$a+b : m \quad 9ab : m$$

т.е. числу делителю числа  $9ab = 9 \cdot (ab)$  должен  
быть делитель  $a+b$ .

$$a \perp b \Rightarrow a \perp m, \text{ ведь иначе если } a = t k \\ m = z k$$

$$\text{то } t k + b : z k \Rightarrow b : k, \text{ тогда } \text{НОД}(a,b) \neq 1, \\ t \cdot k = k.$$

аналогично и  $b \perp m \Rightarrow ab \perp m$ . Это значит,  
что если  $9ab : m$ , то  $9 : m$ , ведь иначе  
 $ab$  не  $\perp$  множ.  $m$ .

$$\Rightarrow 9 : m.$$

Наибольшее такое  $m$  это  $9 \Rightarrow m=9$ .

Пример:

$$\begin{aligned} a &= 2 & 2+97 & 99 \\ b &= 97 & (2+97)^2 - 9 \cdot 2 \cdot 97 & = \frac{99}{99^2 - 18 \cdot 97} & \text{сокращение} \\ a \perp b, \quad \text{т.к. } 2 \nmid 97 & \text{на } 9. & \frac{99}{99^2 - 18 \cdot 97} & = \frac{11}{99 \cdot 99 - 2 \cdot 97} & = \\ & & \frac{99}{99^2 - 18 \cdot 97} & = \frac{11}{99 \cdot 99 - 2 \cdot 97} & = \\ & & \frac{11}{1089 - 194} & = \frac{11}{895} & \end{aligned}$$

Ответ: при  $m=9$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$t_1 + t_2 = \frac{-338 \pm 2.458}{2 \cdot 289} \quad (2 \text{ часть})$$

$$\text{Т.к. } t \geq 0 \quad (t=x^2) \Rightarrow \quad t = \frac{916 - 338}{578} = \frac{578}{578} = 1.$$

$$x^2 = 1.$$

$x = -1 \rightarrow$  смысла не имеет

$$\Rightarrow x = 1. \quad \text{Значит } AC = 17 \quad ; \quad BC = 7 \Rightarrow AB = \\ = AC + BC = 24.$$

Ответ:  $AB = 24$ . (все решениям слагаемым).  
(проверка  $\rightarrow$  все верно).

\* (вычисления)

$$\begin{array}{r} 458 \\ 458 \\ \hline 3664 \\ 2290 \\ \hline 1832 \\ 209764 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ 169 \\ \hline 152 \\ + 104 \\ \hline 169 \\ 23561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 677 \\ 789 \\ \hline 5643 \\ 5016 \\ \hline 1254 \\ 181203 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 181203 \\ 28561 \\ \hline 209764 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

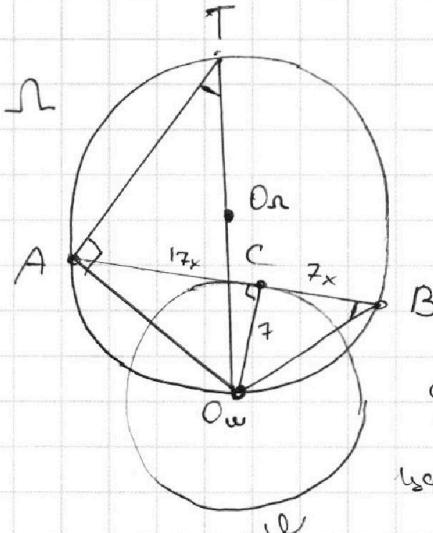
**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ:  $AB = 24$ .

(1 часть, см. 2 часть).



$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

$$R_w = 7$$

$$R_L = 13$$

$$\underline{AB - ?}$$

$O_w$ -чентр  $\omega$  ( $O_w \in \Gamma$ )

$O_L$ -чентр  $L$

$$\text{Пусть } AC = 17x$$

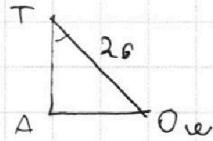
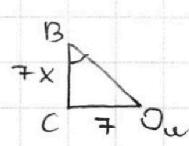
$$\text{тогда } CB = 7x$$

но усл.  $O_w \perp AB$  ( $AB \rightarrow$  касательная к  $\omega$ )  
 $C$ -точка касания.

$T = O_w O_L \cap \Gamma$  (продолжим линию  
шестерев до пересечения с  $\Gamma$ ).

$$TO_w = \text{диаметр.} \Rightarrow \angle TAO_w = 90^\circ$$

(угол на диаметре)  $\angle ATO_w = \angle OBA$ , как оба огни  
одинаковы ( $AO_w$ )  $\Rightarrow \triangle TAO_w \sim \triangle BCO_w$  по двум углам.



$$TO_w = 2 R_{\Gamma} = 2 \cdot 13 = 26$$

По т. Пифагора для  $\triangle BCO_w$ :  
 $BO_w^2 = 49x^2 + 49$ .

$$\frac{TO_w}{BO_w} = \frac{AO_w}{CO_w} \quad \frac{26}{\sqrt{49x^2 + 49}} = \frac{AO_w}{7}$$

$$AO_w = \frac{26 \cdot 7}{7 \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{26}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad AO_w = \frac{676}{x^2 + 1}$$

По т. Пифагора для  $\triangle ACO_w$ :  $AO_w^2 = AC^2 + CO_w^2 =$

$$17^2 x^2 + 49 = AO_w^2$$

решим квадратное уравнение, пусть

$$t = x^2 \quad t \geq 0$$

$$289t + 49 = \frac{676}{t+1}$$

см. 2.2.



$$\frac{578}{578} = 1.$$

//

$$289t + 49t + 49 = 676$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0.$$

$$t_1 t_2 = \frac{-338 \pm \sqrt{338^2 + 4 \cdot 627 \cdot 289}}{2 \cdot 289} = \frac{-338 \pm 2\sqrt{181203 + 28561}}{2 \cdot 289} = \frac{-338 \pm 2 \cdot 458}{2 \cdot 289}$$

см. продолжение.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Слева учитывая, что  $(3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1) = -6x + 2 - 3x - 1 = 1 - 9x$

Заметим, что  $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$

тогда  $3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$  (иначе ОДЗ оба  $\geq 0$ )

т.е.  $1 - 9x \geq 0$

т.е. при  $x \leq \frac{1}{9}$

$$\text{Учтем } \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = a$$

$$\text{и } \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = b$$

$$\text{тогда } 1 - 9x = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned} \text{ОДЗ: } 3x^2 - 6x + 2 &= \\ &= (\sqrt{3x} - \sqrt{3})^2 - 1^2 = (\sqrt{3x} - \sqrt{3})(\sqrt{3x} + \sqrt{3}) \\ &\Rightarrow 1 - \sqrt{3} \dots \sqrt{3} \\ 3x^2 + 3x + 1 &= (\sqrt{3x} + \sqrt{\frac{3}{2}})^2 + \frac{1}{4} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } a - b = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a - b) = (a - b)(a + b) \quad (a - b)(a + b - 1) = 0.$$

либо  $a = b$

либо  $a + b = 1$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

(иначе ОДЗ обе  $\geq 0$ )

$\Rightarrow$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$-9x + 1 = 0$$

$$1 = 9x$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

(такое значение  $\geq 0$  возможно в иных случаях).

$$3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-9x = -2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0.$$

$$x_1, x_2 = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 16 \cdot 69}}{2 \cdot 69} = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} =$$

Проверка (+ проверка ОДЗ)

$$\sqrt{\frac{3}{81} - \frac{6}{9} + 2} - \sqrt{\frac{3}{81} + \frac{1}{3} + 1} = 0 \quad ? \quad = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\sqrt{\frac{3}{81} + \frac{1}{3} + 1} - \sqrt{\frac{3}{81} + 1 + \frac{1}{3}} = 0 \quad |_{x_1} = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \quad |_{x_2} = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

осталось проверить корни на ОДЗ:

Верно.

Все действия и преобразования выполнены правильно

$$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \quad \frac{6-2\sqrt{78}}{69} \quad \text{так далее идёт ОДЗ} \Rightarrow$$

$$6\sqrt{3} + 2\sqrt{78} \stackrel{?}{\leq} 69\sqrt{3} - 69$$

$$23 + 2\sqrt{26} \leq 21\sqrt{3}$$

$$9\sqrt{26} \leq 690, \text{ верно т.к. } \sqrt{26} \leq 6$$

(иначе арифм. ошибки)  
других нет, эти удаляем.

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{1}{9}, x_2, x_3 = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



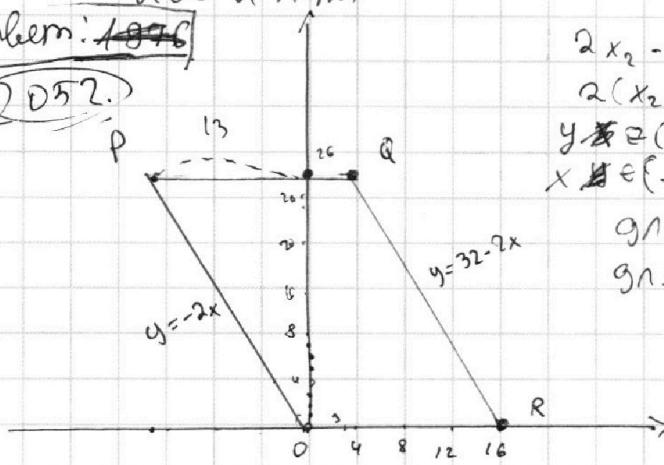
- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: 1052 пары

Q52.



Масштаб: — = 4

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$y \in [0; 26]$$

$$x \in [-13; 16]$$

Смотрим только  
целые точки.

$$\text{если } x=0 : y \in [0; 26]$$

$$\text{если } y=0 : x \in [0; 16]$$

$$y=1 : x \in \mathbb{R}$$

чт-за нос-ва  $n/2$ , го с-ва  
тако читать для  $y=0$  и  
чиша на 267 ( $0 \dots 26$ ).  
Ч разделил на 2

Составим уравнение "параллограмма", чтобы пойти,  
какие точки лежат. Вертикально лежат им  $\Rightarrow$   
можно воспользоваться уравнением угла  $kx+b$

$$Q(3; 26) \quad kx+b=y \quad 3k+b=26 \\ R(16; 0) \quad 16k+b=0 \quad \Rightarrow -2x+32=y. \quad y=32-2x$$

$$R \in O. \quad P \in Q$$

$$y=0$$

$$y=26$$

$$y \in [0, 26] \\ -\frac{y}{2} \leq x \leq 16 - \frac{y}{2}$$

$$P(-13; 26)$$

$$kx+b=y$$

$$-13k+b=26$$

$$k=-2.$$

$$y = -2x$$

$$O(0; 0)$$

$$-b=0.$$

$$\begin{cases} y \leq 26 \\ y \geq 0 \\ y \leq -2x \\ 32-2x \geq y \end{cases}$$

$$y \in [0; 26]$$

$$2x \leq 32-y$$

$$2x \geq 3y-32$$

$$-x \geq \frac{y}{2} - 16$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{y}{2} \\ x \leq 16 - \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$y \in [0, 26]$$

$$-\frac{y}{2} \leq x \leq 16 - \frac{y}{2}$$

Теперь будем считать количество точек по оси  $y$ .

При  $y=0$ : Удобно  $x \rightarrow$  от 0 до 16.

для них:

вар-6.

$$x_1=0.$$

$$2(x_2-x_1) + (y_2-y_1) = 14.$$

$$2x_2 - x_1 + y_2 = 14.$$

одна из них ( $x_1$ )

одна из них ( $y_1$ )

$$\frac{2x_2 - x_1 + y_2 = 14}{2}$$

нап.

при  $y=1 \rightarrow$  удобн:

$$x \in [0; 15]$$

$$\text{при } y=2 \rightarrow [0; 15]$$

$$\text{при } y=3 \rightarrow [0; 14]$$

$$\text{при } y=4 \rightarrow [0; 14]$$

$$\text{при } y=k. \quad [0; 14]$$

$$16 - \left[ \frac{k}{2} \right].$$

const. n/7

const. n/7

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



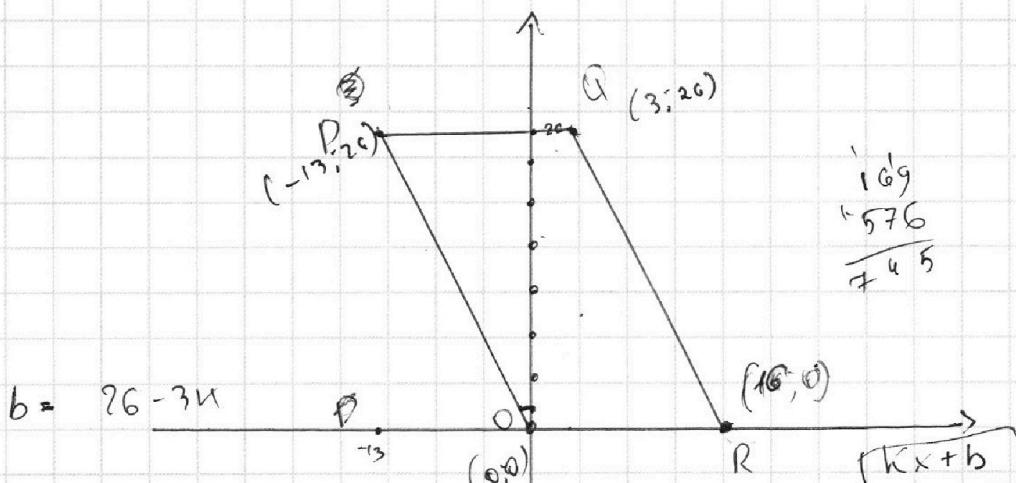
- 1    2    3    4    5    6    7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$1 \text{ кн} = 4.$$



$$b = 26 - 3k$$

$$16k + b = 0$$

$$16k + 26 - 3k = 0$$

$$26 + 13k = 0$$

$$k = -2$$

$$y \in (0; 26)$$

$$x \in (-13; 16).$$

$$0; 0 \rightarrow 146.$$

$$0; 1 \rightarrow 13$$

$$0; 2 \rightarrow 13$$

$$26 + 13 = 39$$

$$0; 3 \rightarrow 12$$

$$26 + 12 = 38$$

$$0; 4 \rightarrow 11$$

$$26 + 11 = 37$$

$$0; 5 \rightarrow 10$$

$$26 + 10 = 36$$

$$0; 6 \rightarrow 9$$

$$26 + 9 = 35$$

$$0; 7 \rightarrow 8$$

$$26 + 8 = 34$$

$$0; 8 \rightarrow 7$$

$$26 + 7 = 33$$

$$0; 9 \rightarrow 6$$

$$26 + 6 = 32$$

$$0; 10 \rightarrow 5$$

$$26 + 5 = 31$$

$$0; 11 \rightarrow 4$$

$$26 + 4 = 30$$

$$0; 12 \rightarrow 3$$

$$26 + 3 = 29$$

$$0; 13 \rightarrow 2$$

$$26 + 2 = 28$$

$$0; 14 \rightarrow 1$$

$$26 + 1 = 27$$

$$0; 15 \rightarrow 0$$

$$26 + 0 = 26$$

$$0; 16 \rightarrow -1$$

$$26 - 1 = 25$$

$$0; 17 \rightarrow -2$$

$$26 - 2 = 24$$

$$0; 18 \rightarrow -3$$

$$26 - 3 = 23$$

$$0; 19 \rightarrow -4$$

$$26 - 4 = 22$$

$$0; 20 \rightarrow -5$$

$$26 - 5 = 21$$

$$0; 21 \rightarrow -6$$

$$26 - 6 = 20$$

$$0; 22 \rightarrow -7$$

$$26 - 7 = 19$$

$$0; 23 \rightarrow -8$$

$$26 - 8 = 18$$

$$0; 24 \rightarrow -9$$

$$26 - 9 = 17$$

$$0; 25 \rightarrow -10$$

$$26 - 10 = 16$$

$$0; 26 \rightarrow -11$$

$$26 - 11 = 15$$

$$0; 27 \rightarrow -12$$

$$26 - 12 = 14$$

$$0; 28 \rightarrow -13$$

$$26 - 13 = 13$$

$$0; 29 \rightarrow -14$$

$$26 - 14 = 12$$

$$0; 30 \rightarrow -15$$

$$26 - 15 = 11$$

$$0; 31 \rightarrow -16$$

$$26 - 16 = 10$$

$$0; 32 \rightarrow -17$$

$$26 - 17 = 9$$

$$0; 33 \rightarrow -18$$

$$26 - 18 = 8$$

$$0; 34 \rightarrow -19$$

$$26 - 19 = 7$$

$$0; 35 \rightarrow -20$$

$$26 - 20 = 6$$

$$0; 36 \rightarrow -21$$

$$26 - 21 = 5$$

$$0; 37 \rightarrow -22$$

$$26 - 22 = 4$$

$$0; 38 \rightarrow -23$$

$$26 - 23 = 3$$

$$0; 39 \rightarrow -24$$

$$26 - 24 = 2$$

$$0; 40 \rightarrow -25$$

$$26 - 25 = 1$$

$$0; 41 \rightarrow -26$$

$$26 - 26 = 0$$

$$2x_2 + y_2 = 14$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 16 \\ -10 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$26 + \dots - 14$$

$$-24 + \dots$$

$$-20 + \dots$$

$$-16 + \dots$$

$$-12 + \dots$$

$$-8 + \dots$$

$$-4 + \dots$$

$$-2 + \dots$$

$$-1 + \dots$$

$$1 + \dots$$

$$2 + \dots$$

$$3 + \dots$$

$$4 + \dots$$

$$5 + \dots$$

$$6 + \dots$$

$$7 + \dots$$

$$8 + \dots$$

$$9 + \dots$$

$$10 + \dots$$

$$11 + \dots$$

$$12 + \dots$$

$$13 + \dots$$

$$14 + \dots$$

$$15 + \dots$$

$$16 + \dots$$

$$17 + \dots$$

$$18 + \dots$$

$$19 + \dots$$

$$20 + \dots$$

$$21 + \dots$$

$$22 + \dots$$

$$23 + \dots$$

$$24 + \dots$$

$$25 + \dots$$

$$26 + \dots$$

$$27 + \dots$$

$$28 + \dots$$

$$29 + \dots$$

$$30 + \dots$$

$$31 + \dots$$

$$32 + \dots$$

$$33 + \dots$$

$$34 + \dots$$

$$35 + \dots$$

$$36 + \dots$$

$$37 + \dots$$

$$38 + \dots$$

$$39 + \dots$$

$$40 + \dots$$

$$41 + \dots$$

$$42 + \dots$$

$$43 + \dots$$

$$44 + \dots$$

$$45 + \dots$$

$$46 + \dots$$

$$47 + \dots$$

$$48 + \dots$$

$$49 + \dots$$

$$50 + \dots$$

$$51 + \dots$$

$$52 + \dots$$

$$53 + \dots$$

$$54 + \dots$$

$$55 + \dots$$

$$56 + \dots$$

$$57 + \dots$$

$$58 + \dots$$

$$59 + \dots$$

$$60 + \dots$$

$$61 + \dots$$

$$62 + \dots$$

$$63 + \dots$$

$$64 + \dots$$

$$65 + \dots$$

$$66 + \dots$$

$$67 + \dots$$

$$68 + \dots$$

$$69 + \dots$$

$$70 + \dots$$

$$71 + \dots$$

$$72 + \dots$$

$$73 + \dots$$

$$74 + \dots$$

$$75 + \dots$$

$$76 + \dots$$

$$77 + \dots$$

$$78 + \dots$$

$$79 + \dots$$

$$80 + \dots$$

$$81 + \dots$$

$$82 + \dots$$

$$83 + \dots$$

$$84 + \dots$$

$$85 + \dots$$

$$86 + \dots$$

$$87 + \dots$$

$$88 + \dots$$

$$89 + \dots$$

$$90 + \dots$$

$$91 + \dots$$

$$92 + \dots$$

$$93 + \dots$$

$$94 + \dots$$

$$95 + \dots$$

$$96 + \dots$$

$$97 + \dots$$

$$98 + \dots$$

$$99 + \dots$$

$$100 + \dots$$

$$101 + \dots$$

$$102 + \dots$$

$$103 + \dots$$

$$104 + \dots$$

$$105 + \dots$$

$$106 + \dots$$

$$107 + \dots$$

$$108 + \dots$$

$$109 + \dots$$

$$110 + \dots$$

$$111 + \dots$$

$$112 + \dots$$

$$113 + \dots$$

$$114 + \dots$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

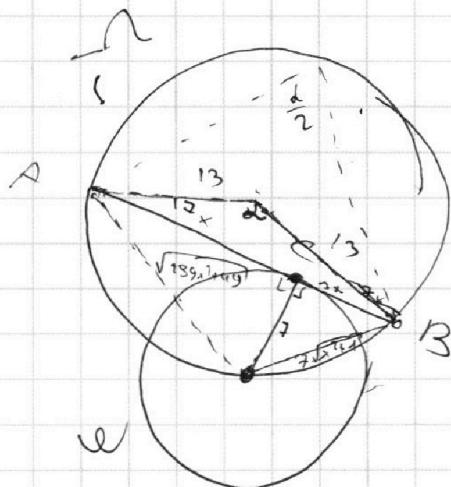


МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\sqrt{3x(x-2)} + 2 = \sqrt{3x(x+1)} + 1$$



$$R_n = 13$$

$$R_{\text{eff}} = 7$$

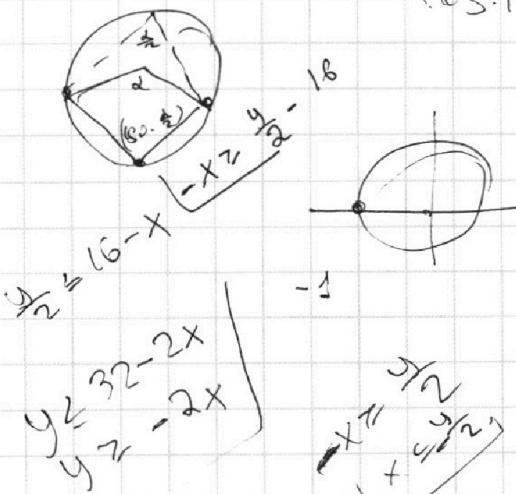
$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$$

$$2 \leq 9x^2 + 4y$$

$$\sqrt{49x^2 + 4y}$$

$$7 \sqrt{x^2 + f}$$

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos \alpha = 34x = \\
 &= 289x^2 + 49 + 249x^2 + 49 - 14\sqrt{(x^2+1)(289x^2+49)} \cdot \cos\left(180 - \frac{\alpha}{2}\right) \\
 \cos\left(180 - \frac{\alpha}{2}\right) &= \\
 &= \cos 180 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin 180
 \end{aligned}$$



$$-\cos \frac{1}{2k}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} =$$

$$\therefore [\sqrt{3}x - \sqrt{3}]^2 =$$

$$\frac{(\sqrt{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2}{3x^2 + 3x + \frac{3}{4}}$$

$$x = 2\sqrt{3} \quad 5^\circ \quad -6 \quad 26 \cdot 3$$

$$y = 37^{-2x}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{S} \quad \text{u} \quad \text{x} \\
 \text{S} \quad \text{u} \quad \text{x} \\
 + \quad \text{u} \quad \text{x} \\
 \hline
 \text{S} \quad \text{u} \quad \text{x} \\
 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Черновик

$$a, b, c \\ ab \vdots 2^{15} 7^{11}$$

$$bc \vdots 2^{17} 7^{18} \quad \text{18}$$

$$ac \vdots 2^{23} 7^{39}$$

$$a \quad a^7 b^2 c^2 \vdots 2^{55} 7^{68}$$

$$abc \vdots 2^{28} 7^{34}$$

$$abc \vdots 2^{28} 7^{34}$$

$$\min(abc) = ?$$

$$23+17+15 \\ b \quad 39+18+11=$$

$$\begin{array}{r} 0 \ 4 \ 6 \\ 2 \ 7 \\ \hline a+b \end{array} \quad \begin{array}{r} b \ 2 \ 7 \\ (a+b)^2 - 9abc \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a \\ 9ab \vdots a+b \\ (9ab)(\cancel{a+b}) \end{array}$$

$$a \perp b$$

$$(a+b)^2 = 9ab$$

$$\begin{array}{r} a+b \quad 9 \\ 9ab \end{array} \quad \begin{array}{r} a+b \quad 9 \\ \cancel{9ab} \end{array}$$

$$a, b \leq 9.$$

$$\begin{array}{r} a+b \quad 9 \\ \cancel{9ab} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1089 \\ 195 \\ \hline 39 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a, b \\ b, c \\ a, c \end{array} \quad \begin{array}{r} 2^{15} 4 7^{11} \\ 2^{17} 4 7^{18} \\ 2^{23} 4 7^{39} \end{array}$$

$$\frac{11+7}{18^2 - 9 \cdot 11 \cdot 7} = \frac{18}{18^2 - 9 \cdot 11 \cdot 7} \quad 2$$

$$\begin{array}{r} 10 \quad 8 \\ a = 2 \cdot 7 \\ b = 2^8 \cdot 7^3 \\ c = 2^13 \cdot 7^31 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} 28 \ 39 \\ 2 \ 7 \end{array}}$$

$$\begin{array}{r} a = 2^{10} \cdot 7^8 \\ b = 2^5 \cdot 7^3 \end{array}$$

$$c = 2^{13} \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} 900-9 \\ 891 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2^{10} \cdot 7^{11} \\ 2^5 \cdot 7^8 \\ 2^{13} \cdot 7^{28} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \quad 7^11 \\ 2^5 \quad 7^0 \\ 2^{13} \quad 7^{28} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2^{10} \cdot 7^{11} \\ 2^5 \cdot 7^8 \\ 2^{13} \cdot 7^{28} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 = \\ 36 - 11 \cdot 7 \end{array}$$

$$a+b=99$$

$$91+8 \quad x+y+z=39$$

$$x+y \geq 11$$

$$y+z \geq 18$$

$$x+y+z \geq 39$$

$$99-9 \cdot 91 \cdot 8$$

$$x+z \geq 39$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 100 \end{array}$$

$$-8 \quad 1$$

$$41$$

$$\begin{array}{r} 11+2 \\ \hline 18 - 9 \cdot 11 \cdot 7 \end{array}$$

$$1800-11=\boxed{1089}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \hline 95 \cdot 11 - 91 \cdot 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4+5 \\ (4+5)^2 - 9 \cdot 4 \cdot 5 \end{array}$$

$$90$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



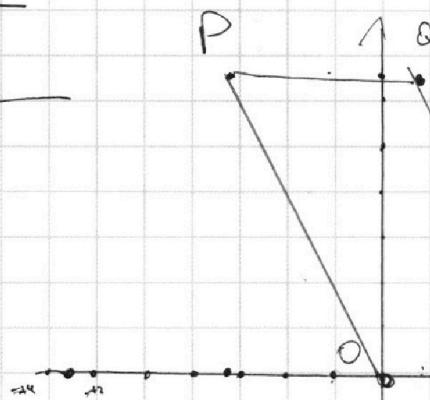
- 1    2    3    4    5    6    7

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 7 \ 6 \\ 4 \ 8 \ 8 \\ 1 \ 4 \ 8 \ 8 \\ \hline 3 \ 9 \ 0 \ 4 \\ 3 \ 9 \ 0 \ 4 \\ \hline \end{array}$$

Черновик.



$$\begin{array}{r} 6 \ 8 \\ 1 \ 6 \ 9 \\ 1 \ 6 \ 9 \\ \hline 1 \ 5 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \ 4 \\ 1 \ 6 \ 9 \\ \hline 1 \ 9 \ 5 \ 2 \\ 2 \ 8 \ 5 \ 6 \\ \hline 2 \ 3 \ 8 \ 1 \ 4 \ 4 \\ 28561 \end{array}$$

$$+ 211.203$$

$$28561$$

$$\hline 239.764$$

$$\begin{array}{r} 2x \\ -2x \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} R \\ 22 \ 6 \ 5 \\ 6 \ 2 \ 7 \\ 2 \ 8 \ 9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \ 6 \ 4 \ 3 \\ 4 \ 5 \ 6 \ 1 \ 6 \\ 1 \ 2 \ 5 \ 4 \\ \hline 21 \ 1 \ 2 \ 0 \ 9 \end{array}$$

$$A(x_1; y_1)$$

$$B(x_2; y_2)$$

$$33^{\circ}$$

$$\begin{array}{r} 16^{\circ} \\ 170^{\circ} \\ 140^{\circ} \\ 32^{\circ} \end{array}$$

$$32^{\circ}$$

$$16^{\circ}$$

$$164 \cdot 164$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$$

$$338 =$$

$$740^{\circ} 0^{\circ}$$

$$\begin{array}{r} 627 \ 3 \\ -5 \ 27 \\ \hline 99 \ 19 \end{array}$$

$$499$$

$$498$$

$$3$$

$$33^{\circ}$$

$$169$$

$$13^{\circ} 2$$

$$\begin{array}{r} 50^{\circ} \\ 250^{\circ} 0^{\circ} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \ 1 \\ 492 \\ 492 \\ \hline 984 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 \ 5 \ 7 \\ 498 \\ 498 \\ \hline 391 \ 8 \ 4 \\ 144 \ 8 \ 2 \\ 139 \ 2 \\ \hline 248.0 \ 0 \ 4 \end{array}$$

$$13^{\circ} 2 + 4 \cdot (627 + 289)$$

$$4 \left( 13^{\circ} 4 + 627 \cdot 289 \right)$$

$$13^{\circ} 4 + 11 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 12$$

$$\begin{array}{r} 160 \\ -33 \\ \hline 127 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 280 \\ -109 \\ \hline 181 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

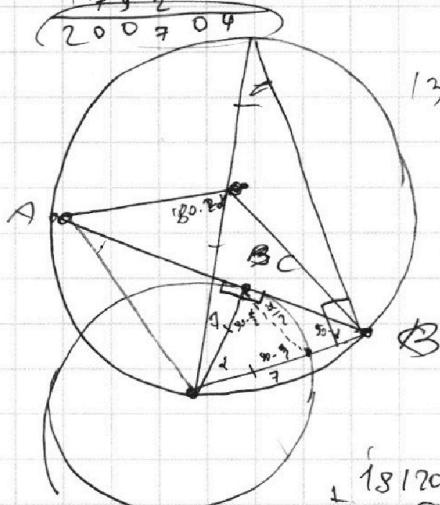


- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

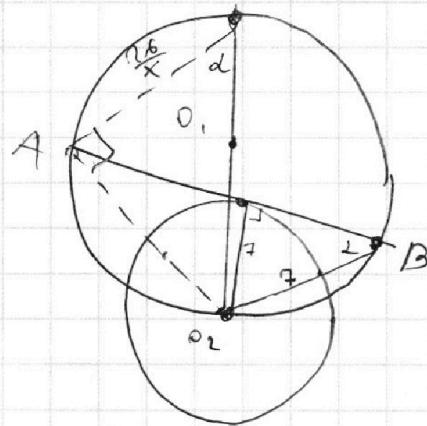
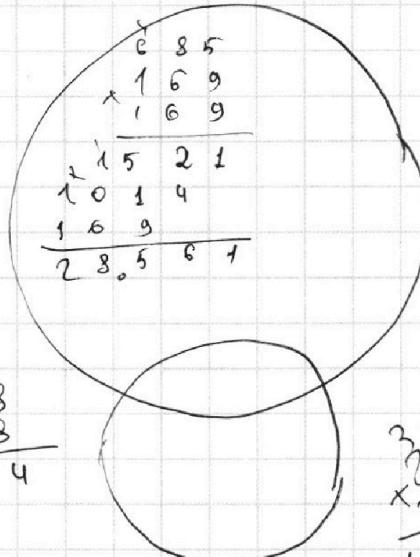
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 448 \\ \times 448 \\ \hline 1792 \\ 1792 \\ \hline 200904 \end{array}$$

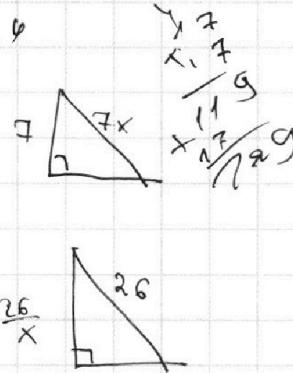


Черновик

$$\begin{array}{r} 420 \\ \times 420 \\ \hline 16800 \end{array}$$



209764



$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2265 \\ 1627 \\ 289 \\ \hline 26 \\ \times 156 \\ \hline 1254 \\ 181203 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 156 \\ \hline 52 \\ 676 \end{array}$$

$$676 - \frac{676}{x^2} = (12x)^2 + 49$$

$$676 - \frac{676}{x^2} = 289x^2 + 49$$

$$x^2 = t \quad t \geq 0$$

$$676t - 676 - 49t = 289t^2$$

$$627t - 676 - 289t^2$$

$$789t^2 - 627t + 676 = 0$$

$$\begin{array}{r} 458 \\ \times 458 \\ \hline 2290 \\ 1832 \\ \hline 209764 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 49 \\ \hline 8 \end{array}$$