



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

Задача 1

Оценка: Пусть  $a, b, c$  - степени вхождения двойки в  $a, b, c$  соответственно ( $a: 2^a, a \times 2^{a+1}; b: 2^b, b \times 2^{b+1}; c: 2^c, c \times 2^{c+1}$ ). Так как  $ab: 2^{19} 7^{10}, a+b \geq 19$ . Аналогично  $bc: 2^{13} 7^{17} \Rightarrow b+c \geq 17, ac: 2^{20} 7^{37} \Rightarrow a+c \geq 20$ . Сложив эти три неравенства и поделив пополам, получим:  $a+b+c \geq 25,5$ . Заметим, что  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , а значит  $a+b+c \geq 26$ . Теперь отметим, что  $a+b+c$  - степень вхождения двойки в  $abc$ , откуда  $abc: 2^{26}$ , а значит  $abc \geq 2^{26}$ . Также заметим, что  $ac: 7^{37}, b \in \mathbb{N} \Rightarrow abc: 7^{37}$ . Так как  $2^{26}$  и  $7^{37}$  взаимно просты,  $abc: 2^{26} \cdot 7^{37}$ , а значит  $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$ .

Пример: Пусть  $a = 2^8 7^{17}, b = 2^6, c = 2^{12} 7^{20}$ . Тогда  $ab = 2^{14} 7^{17} \Rightarrow ab: 2^{14} 7^{10}, bc = 2^{18} 7^{20} \Rightarrow bc: 2^{17} 7^{17}, ac = 2^{20} 7^{37} \Rightarrow ac: 2^{20} 7^{37}$ , и  $abc = 2^{26} 7^{37}$ . Значит, пример удовлетворяет условию.

Таким образом,  $abc$  не меньше  $2^{26} 7^{37}$ , и таким образом может быть равно этому числу.

Ответ:  $2^{26} 7^{37}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>						



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

1, 2, 3, 9, 6, 12  
-1, -2, -3, -4, -6, -12

$$x_2 - x_1 = a$$

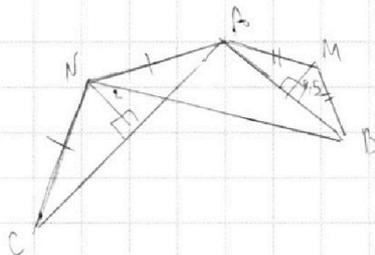
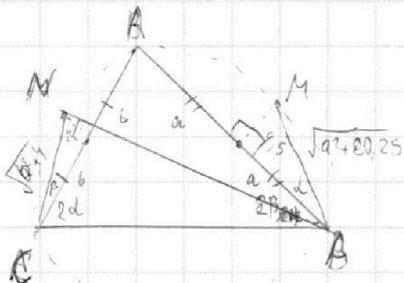
$$y_2 - y_1 = a \cdot k + a(10 - a)$$

$$x_2 - x_1 = 1 \Rightarrow k + 2 = 12 \Rightarrow k = 10$$

$$y_2 - y_1 = 10$$

80000

$$S_{\triangle 2} = \frac{9,5}{\sqrt{a^2 + 20,25}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

Задача 2

Оценка: Тем как дробь  $\frac{a}{b}$  несократима, а взаимно просто с  $b$ . Тогда заметим, что  $a+b$  взаимно просто с  $a$  (так как у них есть общий делитель  $k$ , и тогда  $a:k$  и  $a+b:k \Rightarrow b:k$ , и тогда  $k$  - общий делитель  $a$  и  $b$ , противоречие). Аналогично  $a+b$  взаимно просто с  $b$ , откуда  $a+b$  взаимно просто с  $ab$ .

$$\text{Заметим, что } \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}.$$

Тогда если дробь можно сократить на  $m$ , то  $a+b : m$  и  $(a+b)^2 - 8ab : m$ , откуда  $8ab : m$ . Но  $a+b$  и  $ab$  не имеют общих множителей, поэтому  $ab$  взаимно просто с  $m$ . Значит  $8 : m$ , откуда  $m \leq 8$ .

Пример: Пусть  $a=3, b=5$ . Тогда дробь  $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$  несократима,  
$$a \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{9-30+25} = \frac{8}{4} = \frac{8 \cdot 1}{8 \cdot 1},$$
 откуда несложно заме-

нить, что дробь сократима на 8. Значит, пример удовл. условием

Темным образом,  $m$  не больше 8, и пример может быть равно 8.

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



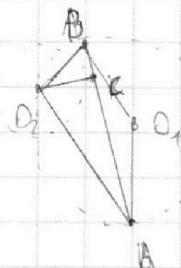
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

Задача 3



Пусть  $O_1$  и  $O_2$  - центры  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно,  $K$  - точка касания  $\omega$  и  $AB$ . Пусть  $BC = x$ . Тогда  $AC = 7x$ . Замечаем, что в треугольнике  $ABO_2$   $O_2C$  - высота ( $O_2 \in O_2C$ ,  $O_2C \perp AB$  (касательная и радиус)), а  $\Omega$  - его описанная окружность. По теореме Пифагора:

$$\Delta AO_2C: AO_2^2 = 1 + 49x^2 \Rightarrow AO_2 = \sqrt{49x^2 + 1}$$

$$\Delta BO_2C: BO_2^2 = 1 + x^2 \Rightarrow BO_2 = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\text{Тогда } \sin \angle O_2BC = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (\text{из прямоу. } \Delta O_2BC)$$
$$= \frac{\sqrt{49x^2 + 1}}{2R} = \frac{\sqrt{49x^2 + 1}}{10} \quad (\text{теор. синусов } \Delta O_2BA)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{49x^2 + 1}}{10} \Leftrightarrow \sqrt{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)} = 10 \Leftrightarrow 49x^4 + 50x^2 + 1 = 100 \Leftrightarrow$$

(x > 0)

$$\Leftrightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(49x^2 + 99) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Тем как  $x > 0$ ,  $x = 1$ . Тогда  $AB = BC + CA = 8x = 8$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение: Вызошим и разделим левую часть на Задача 4

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \quad (\text{оба корня } \geq 0, \text{ а правое подкоренное выражение всегда } > 0 \text{ (} D = 4-8 = -4 \text{)})$$
$$\frac{(\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1})(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x$$

Заменим, что в числителе разности квадратов, расписав каждую,

$$\text{получим } \frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x. \text{ Тогда либо } -7x+2 = 0 \text{ (вытаемше}$$

определяем на  $(-\infty, 1] \cup [2; +\infty)$ , значит определяем при  $x=3, 5$ )  $\Rightarrow$

$\Rightarrow x=3, 5$ , либо  $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$ . Во втором случае

$$| 9x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 0$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Заменим, что  $9x^2 - 3x + 3 > 0$  для любого  $x \in \mathbb{R}$  ( $D = 9-36 = -27$ ), и

корень  $\geq 0$ , а значит левая часть равенства  $> 0$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

Значит во втором случае решений нет, и подходят только

$$x = 3, 5.$$

Ответ:  $\{3, 5\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение. Заметим, что левая часть неравенства - Задача 6  
- две окружности, одна с центром в точке  $(-8, 0)$  и  $r=1$ , а вторая -  
с центром в точке  $(0, 0)$  и  $r=2$ . Тогда решением неравенства  
будут все точки внутри и на границах окружностей (вне обеих  
обе стороны  $> 0$ , внутри одной из них одна  $< 0$ , другая  $> 0$ , а на  
границе окружностей одна из сторон  $= 0$ ). График равенства -  
прямая  $y = ax + b$ . Тогда если прямая имеет больше, чем одну  
точку пересечения с одной из  $r$  окружностей, в решении систе-  
мы будет промежутки, в которых прямая внутри окружностей,  
и решение будет  $> 2$ . Тогда прямая должна иметь по одной  
точке пересечения с каждой из окружностей, а значит она -  
их общая касательная. Для пересекającychся окружностей  
таких 4 (две внешние и две внутренние), а значит таких  
значений  $a \leq 4$ . Уравнения  $r$  общей касательной:  $y = \frac{\sqrt{15}}{30}x + \frac{4\sqrt{15}}{75}$ ;  
 $y = -\frac{\sqrt{15}}{30}x - \frac{4\sqrt{15}}{75}$ ;  $y = \frac{\sqrt{551}}{37}x + \frac{8\sqrt{551}}{555}$ ;  $y = -\frac{\sqrt{551}}{37}x - \frac{8\sqrt{551}}{555}$ . Ответ:  
да получаем все 4 возможных значения  $a$   
Ответ:  $\left\{ \pm \frac{\sqrt{15}}{30}; \pm \frac{\sqrt{551}}{37} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

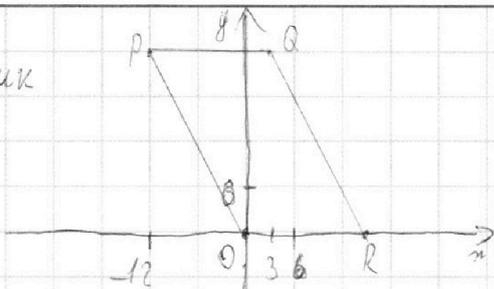
- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик



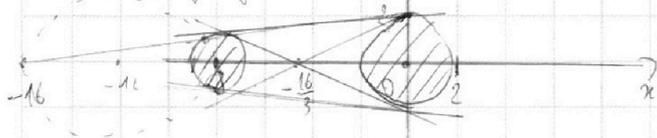
$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

$$y_1 = kx_1 + b$$

$$y_2 = kx_2 + b$$

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = b + 2(x_2 - x_1)$$



$$y = ax + 10b$$

$$(-16, 0), (-8, 5, \sqrt{37,75})$$

$$-16a + 10b = 0$$

$$-8,5a + 10b = \sqrt{37,75} / 4$$

$$7,5a = \sqrt{37,75} / 4$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{37,75}}{30}$$

$$y = ax + 10b$$

$$(-\frac{16}{3}, 0)$$

$$(-\frac{10}{12}, \frac{\sqrt{551}}{12})$$

$$\frac{37}{12} a = \frac{\sqrt{551}}{12}$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{551}}{37}$$

$$\frac{10\sqrt{15}}{30} = 10b$$

$$b = \frac{9\sqrt{15}}{75}$$

$$y = ax + 10b$$

$$(x+12)^2 + y^2 = 16$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 4$$

$$(x+12)^2 - (x+8)^2 = 12$$

$$4(2x+20) = 12$$

$$x = -8,5$$

$$y^2 + 0,25 = 4$$

$$y = \pm \sqrt{3,75}$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 4$$

$$(x + \frac{16}{3})^2 + y^2 = \frac{64}{9}$$

$$(x-12)^2 - (x + \frac{16}{3})^2 = \frac{64}{9} - \frac{28}{3}$$

$$20(2x + \frac{52}{3}) = \frac{30}{3}$$

$$\frac{20}{3}(2x + \frac{52}{3}) = -\frac{28}{3} - \frac{7}{2}$$

$$12x + 80 = -21 \quad x = -\frac{101}{12}$$

~~2x+12~~

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 12$$

~~0 ≤ x\_1, x\_2 ≤ 24~~

~~0 ≤ y\_1, y\_2 ≤ 24~~

~~0 ≤ y\_1 + 2x\_1 ≤ 15~~

~~0 ≤ y\_2 + 2x\_2 ≤ 15~~

~~0 ≤ y\_1, y\_2 ≤ 24~~

~~0 ≤ y\_1 + 2x\_1 ≤ 15~~

~~0 ≤ y\_2 + 2x\_2 ≤ 15~~

~~0 ≤ y\_1, y\_2 ≤ 24~~

~~0 ≤ y\_1 + 2x\_1 ≤ 15~~

~~0 ≤ y\_2 + 2x\_2 ≤ 15~~

~~0 ≤ y\_1, y\_2 ≤ 24~~

~~0 ≤ y\_1 + 2x\_1 ≤ 15~~

~~0 ≤ y\_2 + 2x\_2 ≤ 15~~

~~0 ≤ y\_1, y\_2 ≤ 24~~

~~0 ≤ y\_1 + 2x\_1 ≤ 15~~

~~0 ≤ y\_2 + 2x\_2 ≤ 15~~

~~0 ≤ y\_1, y\_2 ≤ 24~~

~~0 ≤ y\_1 + 2x\_1 ≤ 15~~

~~0 ≤ y\_2 + 2x\_2 ≤ 15~~

~~0 ≤ y\_1, y\_2 ≤ 24~~

~~0 ≤ y\_1 + 2x\_1 ≤ 15~~

~~0 ≤ y\_2 + 2x\_2 ≤ 15~~

~~0 ≤ y\_1, y\_2 ≤ 24~~

~~0 ≤ y\_1 + 2x\_1 ≤ 15~~

~~0 ≤ y\_2 + 2x\_2 ≤ 15~~

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 24$$

$$-15 \leq x_1, x_2 \leq 15$$

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 24$$

$$0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 15$$

$$0 \leq y_2 + 2x_2 \leq 15$$

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 24$$

$$-15 \leq x_1, x_2 \leq 15$$

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 24$$

$$y = kx + b$$

$$y_1 = kx_1 + b$$

$$y_2 = kx_2 + b$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1 =$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$



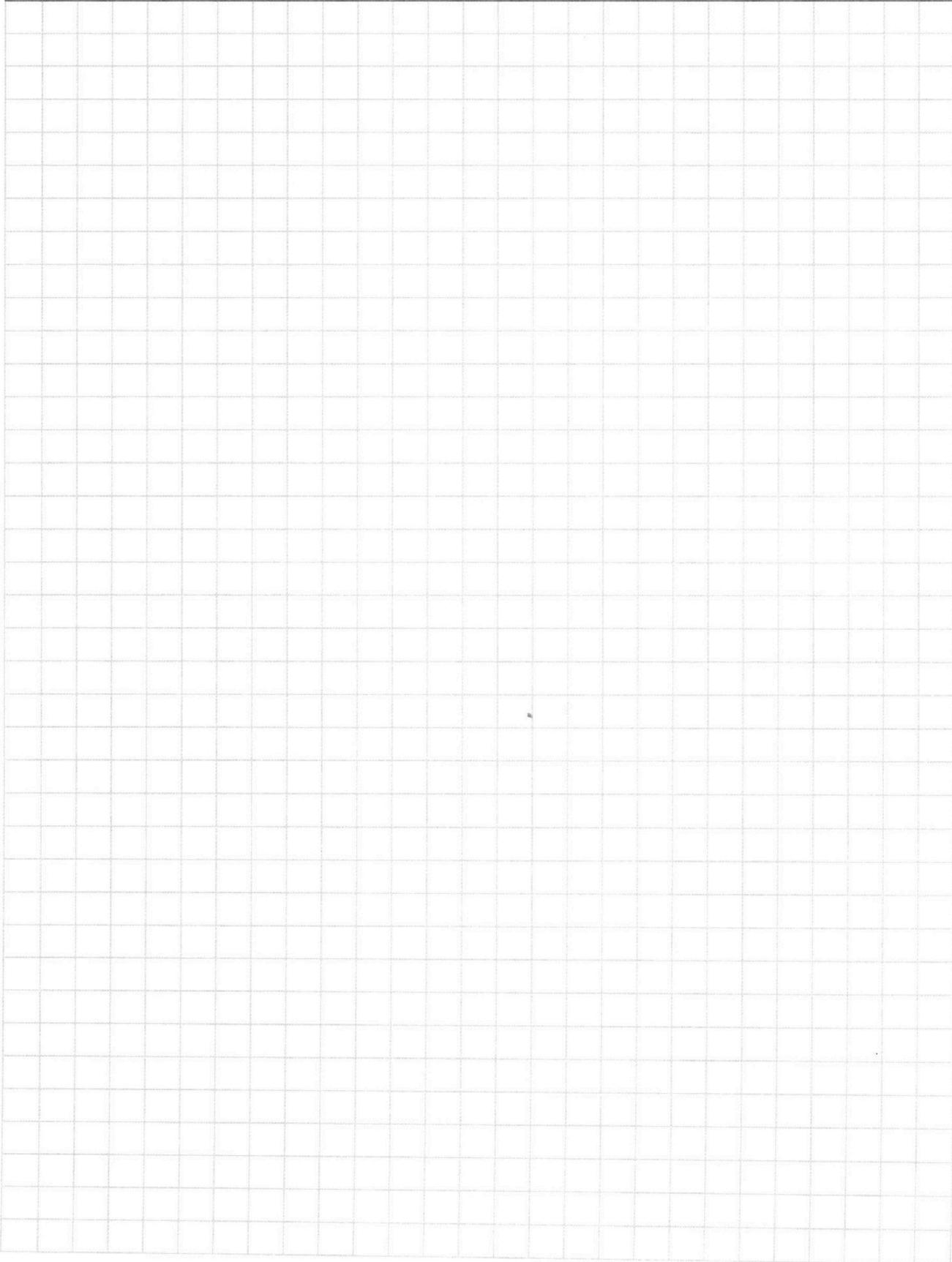
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





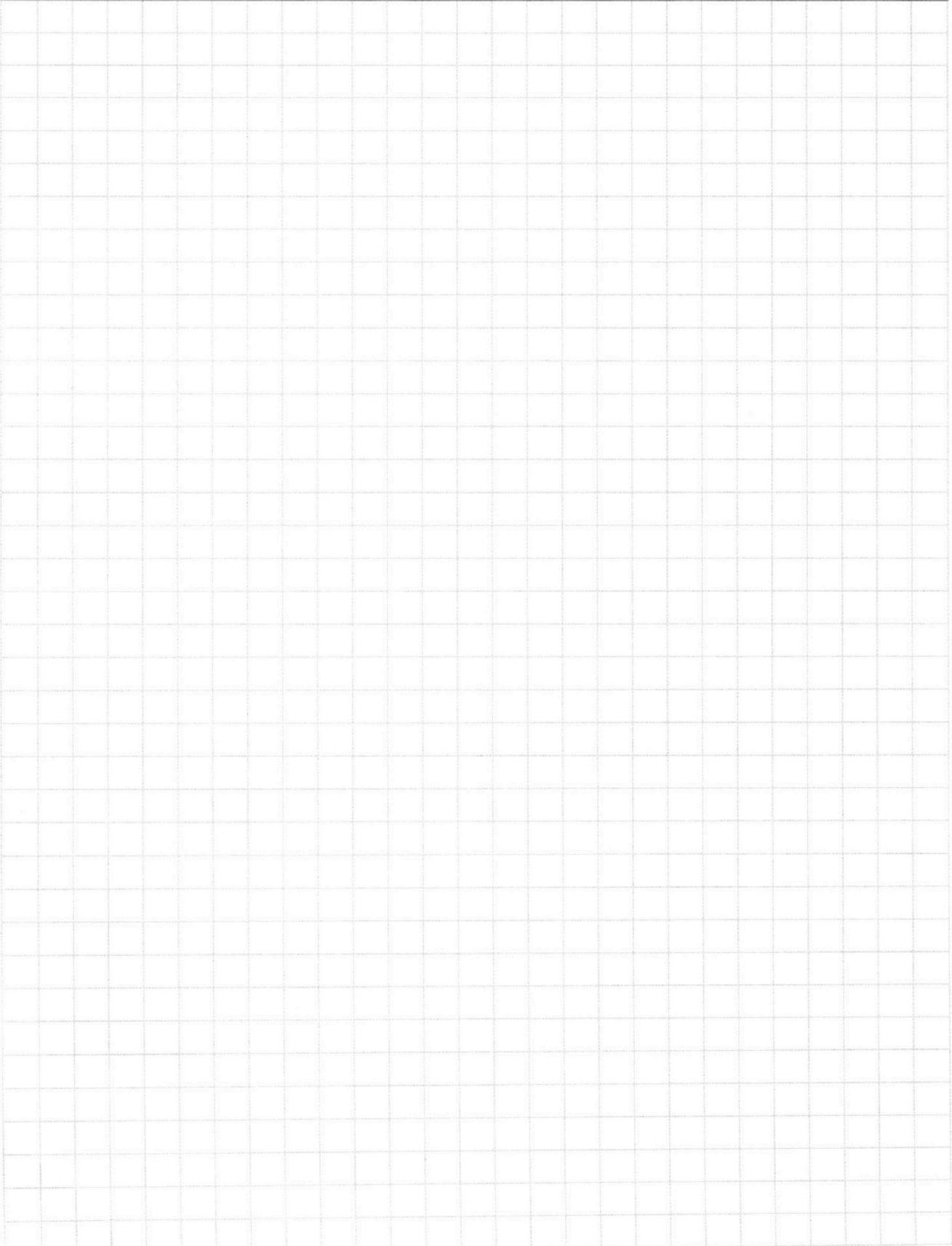
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Условия

$$ab = 2^{10} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{12} \cdot 7^{12}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$a = 2^{a_1} \cdot 7^{b_1}$$

$$b = 2^{b_1} \cdot 7^{c_1}$$

$$c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$$

$$a = 2^8 \cdot 7^{17}$$

$$b = 2^6 \cdot 7^{17}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{10}$$

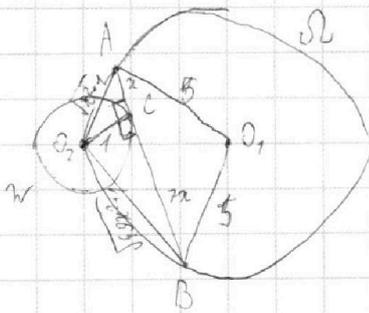
$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 14 \\ a_2 + b_2 \geq 10 \\ a_1 + c_1 \geq 20 \\ a_2 + c_2 \geq 37 \\ b_1 + c_1 \geq 17 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \geq 25,5 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 32 \\ abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32} \end{cases}$$

$$\frac{3+5}{(3+5)^2 - 8 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{8-15}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$\frac{8}{64-120} = -\frac{8}{56} = -\frac{1}{7}$$



$$2R = \frac{AO_2 \cdot BO_2}{\sin \angle AOB}$$

$$AO_2 \cdot BO_2 = 10$$

$$S_{AO_2B} = \frac{AO_2 \cdot BO_2 \cdot \sin \angle AOB}{2} = 5$$

$$\sin \angle AOB = \frac{1}{\sqrt{r^2+1}} = \frac{\sqrt{49r^2+1}}{10}$$

$$\sqrt{(r^2+1)(49r^2+1)} = 10$$

$$\sqrt{49r^2 - 5r + 3} - \sqrt{2r^2 + 2r + 1} = 2 - 7r$$

$$49r^4 + 50r^2 - 29 = 0$$

$$\frac{2-7r}{\sqrt{2r^2-5r+3} + \sqrt{2r^2+2r+1}} = 2-7r$$

$$r^2 = 1$$

$$(r-1)(49r+99) = 0$$

$$r = 1$$

$$\begin{cases} r = 3,5 \\ \sqrt{2r^2-5r+3} + \sqrt{2r^2+2r+1} = 1 \end{cases}$$

$$2\sqrt{10} -$$

$$\frac{49}{2} - \frac{35}{2} + 3$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a-b} \quad a-b$$

$$\frac{25}{8} - \frac{25}{4} + 3$$

$$2\sqrt{10} - 3 + 3 + \dots$$