МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N1

$a, b, c \in \mathbb{N}$, $ab \vdots 2^{15} 7^{11}$, $bc \vdots 2^{17} 7^{18}$, $ac \vdots 2^{23} \cdot 7^{39}$.

$\min(abc) = ?$

Решение. Через $\nu_p(m)$ будем обозначать степень вхождения простого числа p в натуральное число m (например, $\nu_3(18) = 2$).

Заметим, что т.к. $ac \vdots 7^{39}$, то $abc \vdots 7^{39} \Leftrightarrow \nu_7(abc) \geq 39$. Заметим, что из условия:

$$\begin{cases} \nu_2(a) + \nu_2(c) = \nu_2(ac) \geq 23 \\ \nu_2(b) + \nu_2(c) = \nu_2(bc) \geq 17 \\ \nu_2(a) + \nu_2(b) = \nu_2(ab) \geq 15 \end{cases}$$

(Ясно, что $\nu_p(m) + \nu_p(n) = \nu_p(mn)$)

Сложив эти нер-ва, получим:

$2(\nu_2(a) + \nu_2(b) + \nu_2(c)) = 2\nu_2(abc) \geq 55$.

Число слева — четное, а справа — нечетное, откуда (очевидно) $2\nu_2(abc) \geq 56 \Leftrightarrow$ $\nu_2(abc) \geq 28$, и раз $\nu_7(abc) \geq 39$, получим $abc \vdots 2^{28} 7^{39}$, откуда $\min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}$.

Покажем, что минимум достигается. Ясно, что подходят числа $a = 2^{11} \cdot 7^{21}$, $b = 2^4$ и $c = 7^{18} \cdot 2^{13}$.
Ясно, что при таких a, b, c все условия задачи выполняются и $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$. Ответ. $\boxed{2^{28} \cdot 7^{39}} \to$ $= abc$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

$a, b \in \mathbb{N}$, $\frac{a}{b}$ - несокр.; $m \in \mathbb{N}$, $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ сокр. на m. $\max(m) = ?$

Решение. Ясно, что $\frac{a}{b}$ - несокр. $\Leftrightarrow$ a и b взаимно-простые $\Leftrightarrow$ НОД$(a;b)=1$. Заметим, что $a+b \vdots m$ и $a^2-7ab+b^2 \vdots m$, откуда $a^2-7ab+b^2=(a+b)^2-9ab \vdots m$, и раз $a+b \vdots m$, то $9ab \vdots m$. Докажем, что НОД$(a;m)=$НОД$(b;m)=1$.

Пусть это не так, и НОД$(b;m)=n \in \mathbb{N}$, $n>1$. Раз $a+b \vdots m$ и $m \vdots n$, то $a+b \vdots n$, и раз $b \vdots n$, то $a \vdots n$, откуда НОД$(a;b) \geq n > 1$. Но НОД$(a;b)=1$, и мы пришли к противо-речию. Значит, НОД$(b;m)=1$. Аналогично НОД$(a;m)=1$. Но ведь тогда $9ab \vdots m$ и НОД$(a;m)=$НОД$(b;m)=1$, (очевидно) $\Rightarrow$ (тогда и только тогда) что возможно лишь когда $9 \vdots m$. $\rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение. Отсюда, $m=1$, $m=3$ или $m=9$. Значит, $\max(m)=9$.

Покажем, что максимум достигается. Возьмем $a=1$ и $b=17$. Ясно, что $\frac{a}{b}=\frac{1}{17}$ — несокр. Кроме того, $a+b=18 \vdots 9=m$ и

$a^2-7ab+b^2=289-7\cdot17+1=290-119=$

$=171 \vdots 9=m$. Значит, и числитель, и знаменатель ~~дроби~~ дроби

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ делятся на $m=9$, и максимум $m=9$ достигается.

Ответ. $\boxed{m=9}$

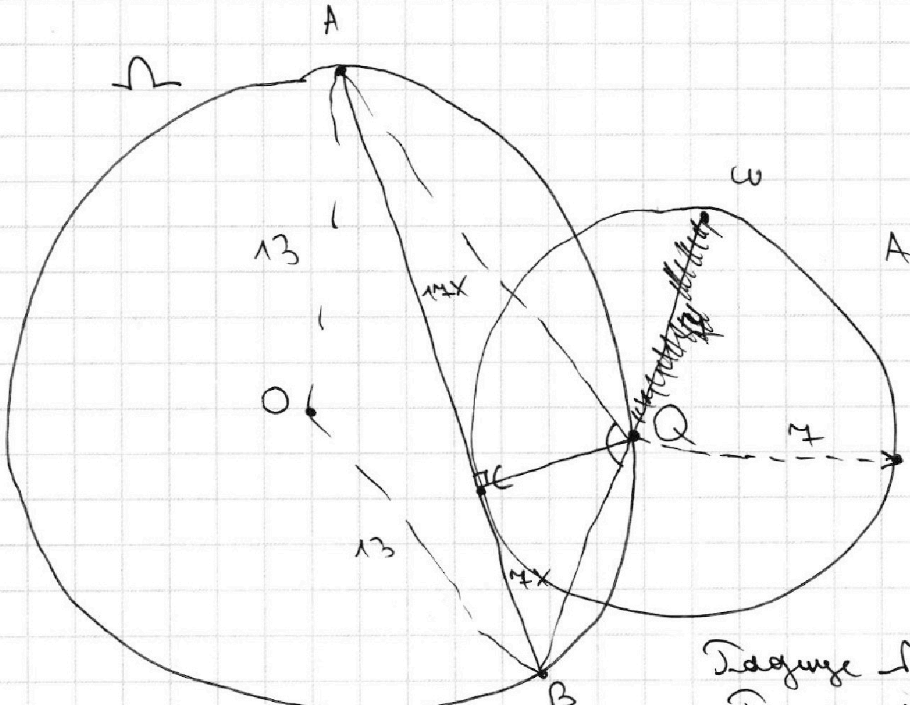
→

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3



AB кас. ω

$Q \in \Omega$

Радиус $\Omega = 13$

Радиус $\omega = 7$

$AC : CB = 17 : 7$. $AB = ?$

Решение. Пусть O, Q — центры Ω, ω соответственно. Пусть $BC = 7x$, тогда $AC = \frac{17}{7} \cdot 7x = 17x$.

Наша цель — найти x (очевидно $x > 0$). $AB = AC + BC = 24x$.

Через $\deg_\Gamma X$ обозначим степень точки X относительно окр-ти Γ.

Тогда: $\deg_\omega A = AQ^2 - 49 = AC^2 = 289x^2$, $\deg_\omega B = BQ^2 - 49 = BC^2 = 49x^2$. →

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

откуда $AQ = \sqrt{49+289x^2}$ и $BQ = \sqrt{49+49x^2}$. По теореме синусов в $\triangle AQB$:

$$\frac{AB}{\sin\angle AQB} = \frac{24x}{\sin\angle AQB} = 2\cdot 13 = 26,$$

откуда $\sin\angle AQB = \frac{12}{13}x \le 1$, и $0 < x \le \frac{13}{12}$. Заметим $QC = 7$, $QC \perp AB$ как радиус в точку касания, откуда:

$$S_{\triangle ABQ} = \frac{QC\cdot AB}{2} = 12\cdot 7\cdot x = \frac{AQ\cdot QB\cdot \sin\angle AQB}{2} =$$

$$= \frac{\frac{12}{13}x\sqrt{49+49x^2}\sqrt{49+289x^2}}{2}.$$ Значит,

$$\sqrt{49+49x^2}\sqrt{49+289x^2} = 182.$$

Очевидно, что длина ~~хорды~~ AB может иметь лишь 1 значение, т.е. наше ~~число~~ число $0 < x \le \frac{13}{12}$ в наших условиях ~~не~~ может иметь лишь 1 значение.

Значит, при наших x наше уравнение →

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.

~~[illegible]~~ имеет равно 1 решение.

Заметим, что подходит $0 < x = 1 \leq \frac{13}{12}$. Действительно, при

$x=1$: $\sqrt{49+49x^2}\sqrt{49+289x^2} = \sqrt{98}\sqrt{338} =$
$= \sqrt{33124} = 182$, т.е. $x=1$ – корень.

Значит, единственное решение нашего уравнения это $x=1$.

Тогда, $AB = 24x = 24$.

Ответ. $\boxed{AB = 24}$

→

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

Решение.

Заметим. $1-9x=(3x^2-6x+2)-(3x^2+3x+1)$.

Замена: $a:=3x^2-6x+2$, $b:=3x^2+3x+1$.
Тогда $1-9x=a-b$.

Отсюда: $\sqrt{a}-\sqrt{b}=a-b$, $a,b\geq 0$.

$a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)=0.$

2 случая:

1) $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0. \Leftrightarrow \sqrt{a}=\sqrt{b}.$

$\Leftrightarrow a=b,\ a,b\geq 0. \Leftrightarrow$

$a=b,\ b\geq 0. \Leftrightarrow 3x^2-6x+2=3x^2+3x+1,$

$3x^2+3x+1\geq 0.$ Рассмотрим

уравнение $3x^2+3x+1=0$.

Его дискриминант D равен

$D=9-3\cdot 4=-3<0$, значит,

$3x^2+3x+1>0$ при всех $x\in\mathbb{R}$. →

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.

Отсюда $3x^2+3x+1=3x^2-6x+2$,

и ОДЗ нам не нужно, ибо $\forall x \in \mathbb{R}$

$3x^2+3x+1>0$. Значит, $9x=1$,

откуда $\boxed{x=\frac{1}{9}}$

② $\sqrt{a}+\sqrt{b}-1=0$, т.е.

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$, $a,b\geq 0$. $\Leftrightarrow$

$a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b=1$, $a,b\geq 0$. $\Leftrightarrow$

$3x^2-6x+2+2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1}+$

$+3x^2+3x+1=6x^2-3x+3+$

$+2\sqrt{a}\sqrt{b}=1$, $a,b\geq 0$.

Отсюда $2\sqrt{a}\sqrt{b}=1-6x^2+3x-3\geq 0$.

Рассмотрим уравнение $6x^2-3x+3=1$.

$\Leftrightarrow$ $6x^2-3x+2=0$. Его дискриминант

равен $D=9-6\cdot 2\cdot 4=9-48=-39<0$,

значит, $6x^2-3x+3>1$ при всех

$x\in\mathbb{R}$. Но мы же с вами получили →

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

что $1-6x^2+3x-3 = 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$,

откуда $1 \geq 6x^2 - 3x + 3 > 1$. Но

это невозможно $\Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Значит, в этом случае

нет решений. Поэтому $x = \frac{1}{9}$.

Ответ. $\boxed{x = \frac{1}{9}}$

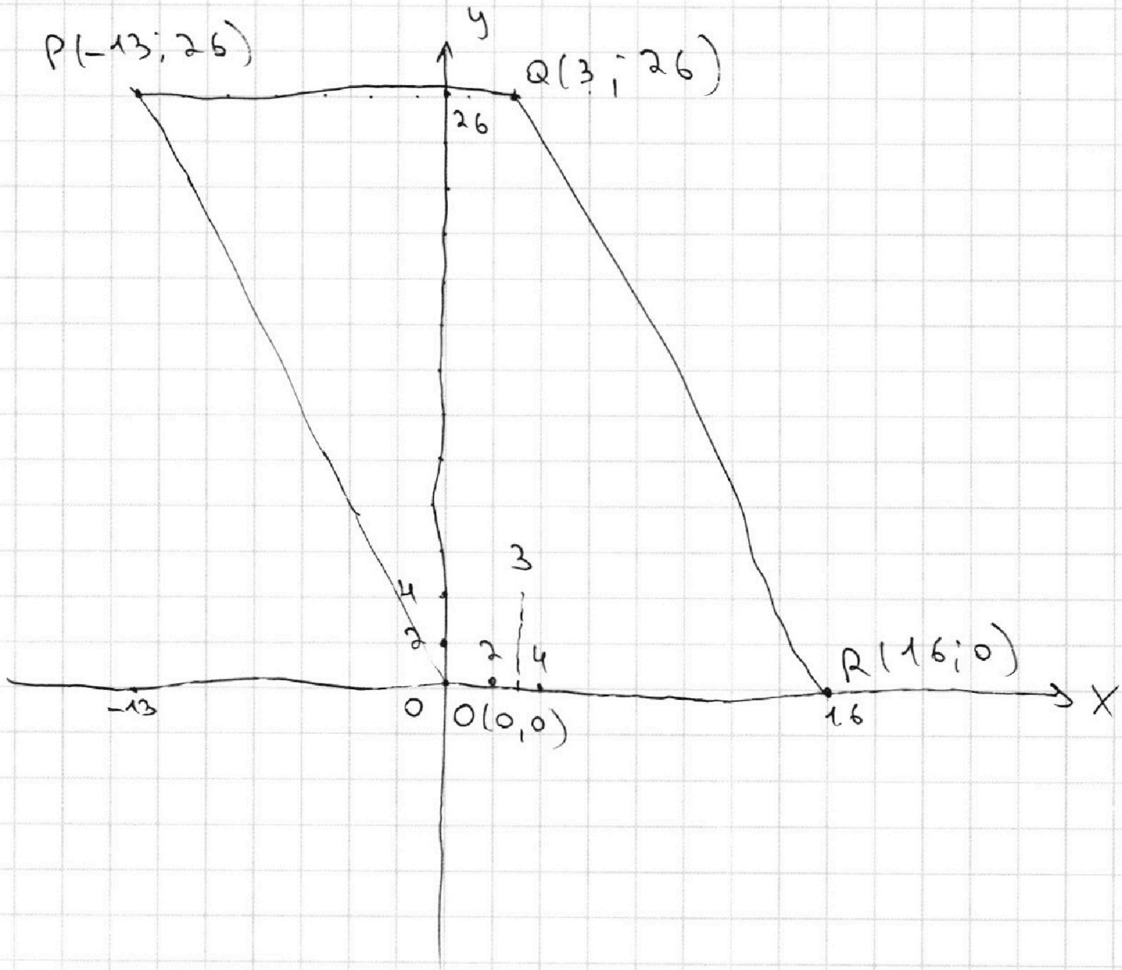
$\longrightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5



Решение. OR задается ур-нием
~~...~~ $y=0$; PQ – ур-нием $y=26$,

№ 6

Найти все a, при котор. $\exists b$: сист. имеет

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\leq 0 \end{cases}$$

равно 2 реш.

Решение. Первое уравнение: $y=-ax+8b$ – прямая l вида $y=kx+l$.

Второе нер-во:

$x^2+y^2=1$ – окр-ть ω_1 с центром $O_1(0;0)$ радиуса $R_1=1$; $x^2+(y-12)^2=16$ – окр-ть ω_2 с центром $O_2(0;12)$ радиуса $R_2=4$.

Ясно, что ω_1 и ω_2 не имеют общих точек. Очевидно, что второе неравенство выполняется:

- На границах окр-тей ω_1 и ω_2.
- Внутри окр-тей ω_1 и ω_2.

Нарисуем графики: →

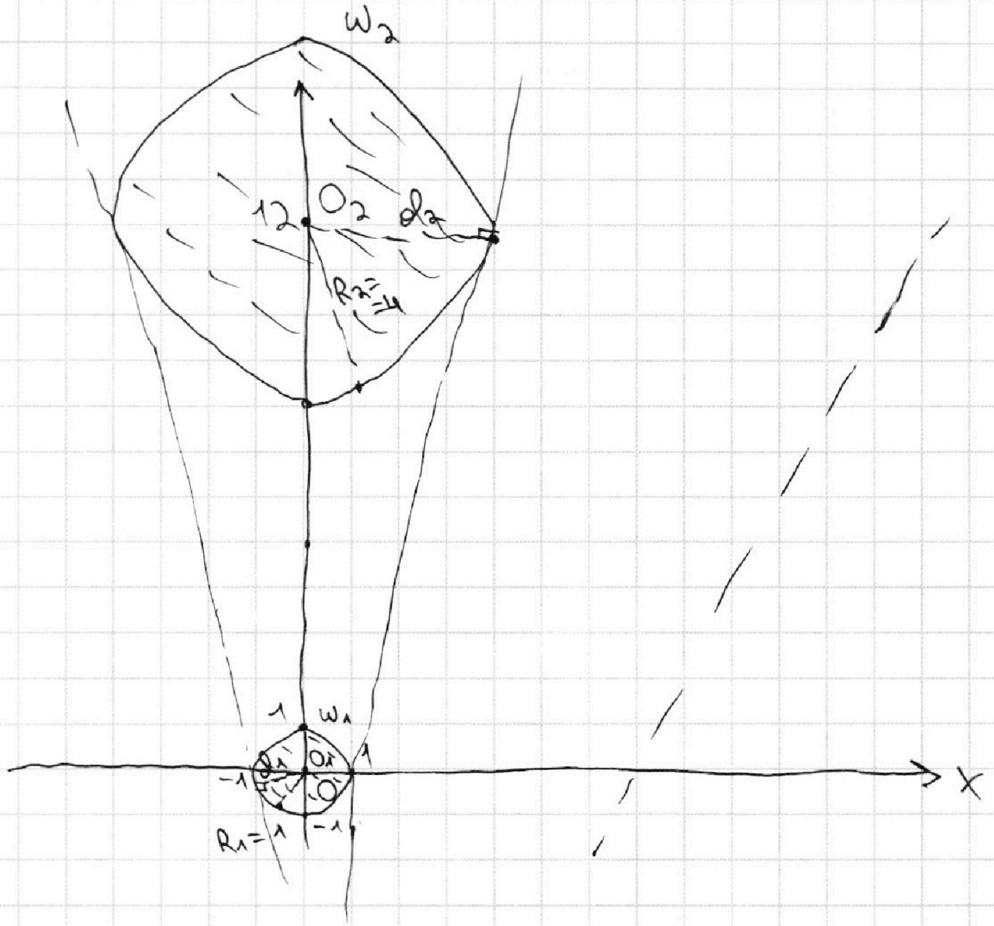
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение.



Очевидно, что равно два решения будет $\Leftrightarrow$ ℓ касается ω_1 и ω_2.

Почему? Если ℓ именно пересек. одну из окр-тей ω_1 и ω_2, то ясно, что будет ∞ реш., значит, она может либо касаться, либо не иметь общих точек (каждой из окр-тей ω_1 и ω_2. Но т.к. окр-ти две и решения два, то ясно, что $\rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

прямая l должна именно касаться обеих окр-тей. Ясно, что ω_1 и ω_2 имеют 4 общих касательных (очев.) $\Rightarrow$ у нас 4 значения a. Найдем их.

Напомним. Расстояние d от точки $(x_0; y_0)$ до прямой $ax+by+c=0$ равно

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Т.к. l касается ω_1 и ω_2, то если d_1 и d_2 — расстояния от O_1 и O_2 до l соответственно, то $d_1=R_1$ и $d_2=R_2$. Значит:

$$\begin{cases} d_1=\dfrac{|8b|}{\sqrt{a^2+1}}=R_1=1 \\ d_2=\dfrac{|8b+12|}{\sqrt{a^2+1}}=R_2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |8b|=\sqrt{a^2+1} \\ |8b+12|=4\sqrt{a^2+1} \end{cases}$$

Тогда 3 случая:

1) $b\geq 0$. Тогда $8b=\sqrt{a^2+1}$ и $12+8b=4\sqrt{a^2+1}$, откуда $12+8b=12+\sqrt{a^2+1}=4\sqrt{a^2+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+1}=4 \Leftrightarrow a^2+1=16 \Leftrightarrow \boxed{a=\pm\sqrt{15}}$

(и тогда $b=\frac{1}{2}$) $(b=\frac{1}{2}\geq 0)$ $\to$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение.

(2) $-\frac{3}{2} \le b \le 0$. Тогда

$-8b = \sqrt{a^2+1}$ и $12+8b = 4\sqrt{a^2+1}$, откуда

$8b = -\sqrt{a^2+1}$ и $12 = 5\sqrt{a^2+1}$, а значит

$a^2+1 = \frac{144}{25} \Leftrightarrow a^2 = \frac{119}{25} \Leftrightarrow \boxed{a = \pm\frac{\sqrt{119}}{5}}$.

(и тогда $-\frac{3}{2} \le b = -\frac{3}{10} \le 0$)

(3) $b \le -\frac{3}{2}$. Тогда $-8b = \sqrt{a^2+1}$

и $-12-8b = 4\sqrt{a^2+1}$, откуда

$12 = -3\sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+1} = -4$.

$\sqrt{a^2+1} \ge 0$, но $-4 < 0$. То есть,

$0 \le \sqrt{a^2+1} = -4 < 0$, что невозможно

$\Leftrightarrow a \in \varnothing$. Значит, $a = \pm\sqrt{15}$

и $a = \pm\frac{\sqrt{119}}{5}$.

Ответ. $\boxed{\text{при } a = \sqrt{15};\ -\sqrt{15};\ \frac{\sqrt{119}}{5};\ -\frac{\sqrt{119}}{5}}$.

$\rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

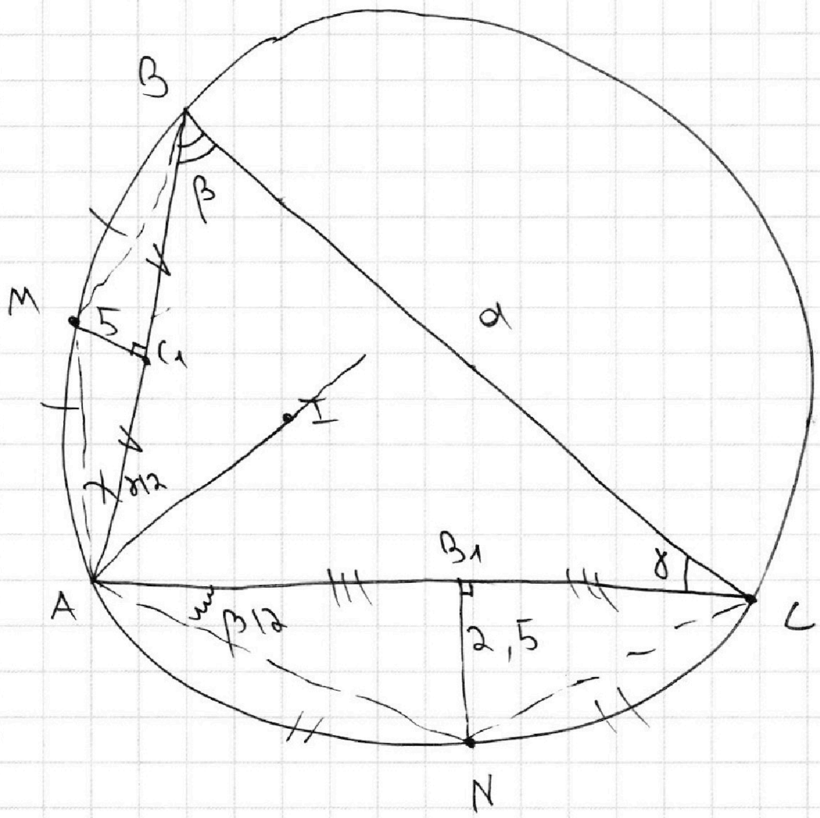
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7

I – инцентр ΔABC

$AI = ?$

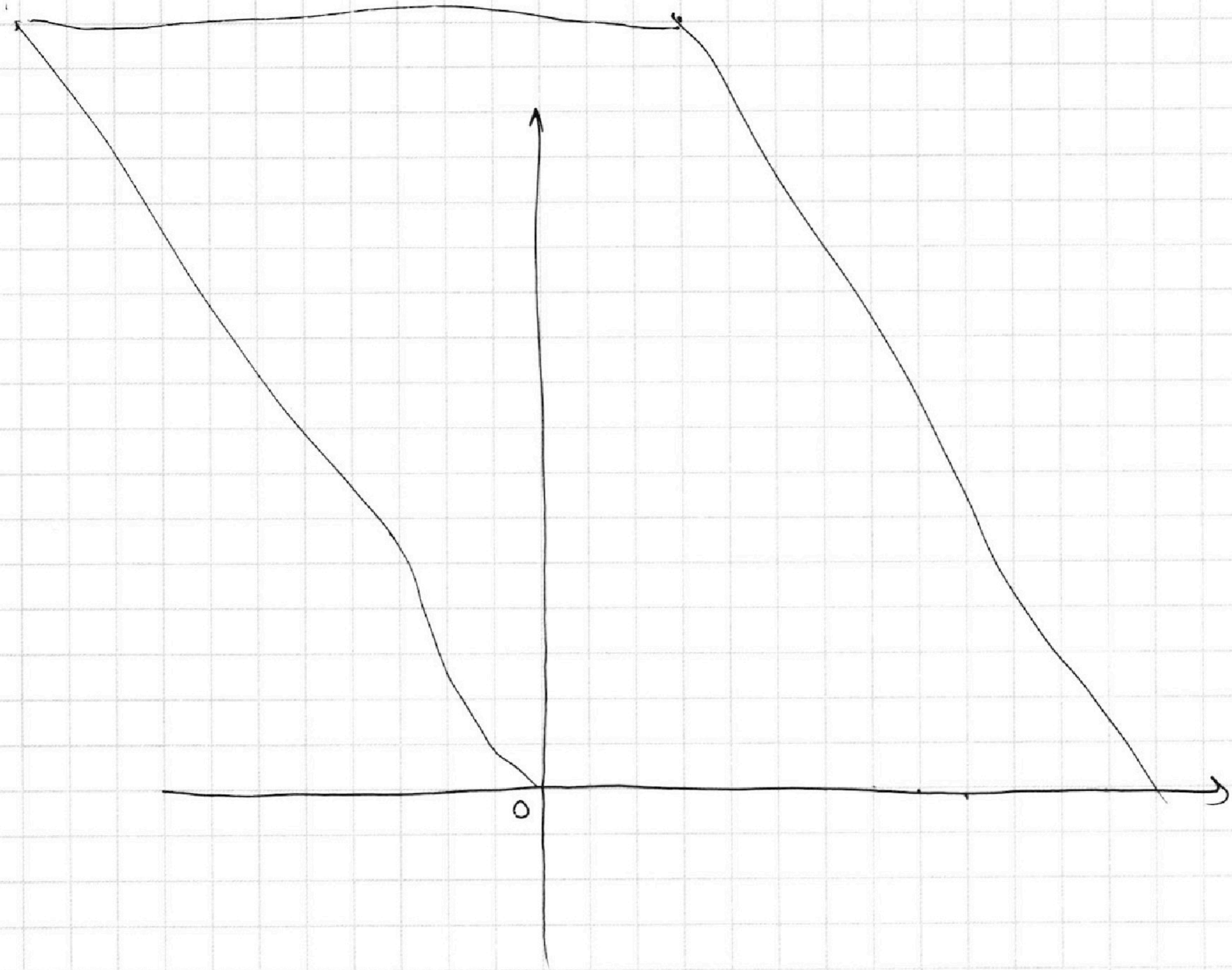


Решение. Пусть B_1, C_1 – середины AC, AB соответственно; Пусть $BC=a$, $AB=c$, $AC=b$, $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$. Ясно, что $\angle NAC=\frac{\beta}{2}$ и $\angle MAB=\frac{\gamma}{2}$. Отсюда $AC_1=\frac{c}{2}=$
$=5\,ctg\frac{\gamma}{2}$ и $AB_1=\frac{b}{2}=2{,}5\,ctg\frac{\beta}{2}$
и $c=10\,ctg\frac{\gamma}{2}$, $b=5\,ctg\frac{\beta}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



a kx.

$k \cdot -13 = 26$

$k = -2.$

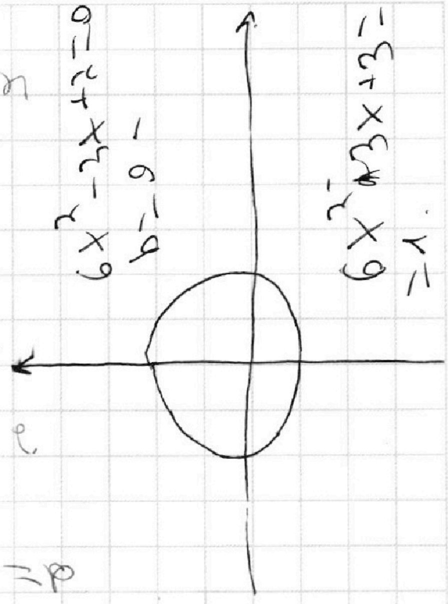
$400+49-2\cdot7\cdot20=449-40\cdot7=449-280$

$a=21\cdot7$ $b=11\cdot20.$

$=41-140=-99.$ (169)

$=41-20\cdot7=$

$25-7\cdot5\cdot4+16=$



$a=5,\ b=4.$

$121-7\cdot7\cdot11+49=$

$=170-49\cdot11.$

$m=9.$

$a=13$ $b=5$

$a=11$ $b=7$

$9 \vdots m.$

$169+25-13\cdot35$

$9ab \vdots m.$

$(a,m)=(b,m)=1.$

$a=1$ $b=17$

$9ab \vdots m$

$1+289 \ldots$

$=200 \ldots$

$(a+b)^2-9ab \vdots m.$

$a+b \vdots m$

$a^2-7ab \vdots m$

$289+1-7\cdot17=$

$=290-7\cdot17$

$a^2-7ab+b^2$

$a+b$

$\sqrt{3x^2-6x+7}\ -$

$-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$

Черновик

$$\frac{a+b}{a^2-4ab+b^2}$$

$\frac{a}{b}$ $a, b \in \mathbb{N}$

$(a, b) = 1$

$a = 2^7$

$18x^3 - 18x^2 - 6x$

$9x^4 - 9x^3 + 3x^2 -$

$+ 6x^2 + 6x + 2$

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ y + z = 18 \\ z + x = 11 \end{cases}$$

$x - z = 21$

$2x = 32$

$x = 16,$

$15 + 14 + 23$

45

$11 + 18 + 39$

58

$a = 2^{23}$

23

34

55

$4x^4 - 15x^2 - 2 = 1$

$a = 7^{21}$

28

$ab \vdots 2^{15} 7^{11}$

$b c \vdots 2^{17} 7^{18}$

$a c \vdots 2^{23} 7^{39}$

$\nu_2(a) + \nu_2(c) \geq 23$

$\nu_2(a) + \nu_2(b) \geq 15$

$\nu_2(b) + \nu_2(c) \geq 17$

$\nu_p(a) =$

$a = b = c = 2^{12} \cdot 7^{20}$

$abc \vdots 2^{45} 7^{58}$

$a^2 b^2 c^2 \vdots 2 \; 7$

$a = 2^1 \cdot 2^{13}$

$\nu_2(a) + \nu_2(b) + \nu_2(c)$

$a = 7^{18} \cdot 2$

$x^2 \vdots 2^{45} \cdot 7^{58}$

23

$c = 7^4$

$b = 2^4$

$x^2 \vdots 2^{46} \cdot 7^{58}$

44

$18x^4 - 1 + 18x^2 =$

$6x^2 + 3x + 1 +$

$+ 3x^2 + 3x + 1 \cdot \sqrt{2}$

$3x^2 -$

$6x^2 - 3x + 3$

$x \vdots 2^{23} \cdot 7^{29}$

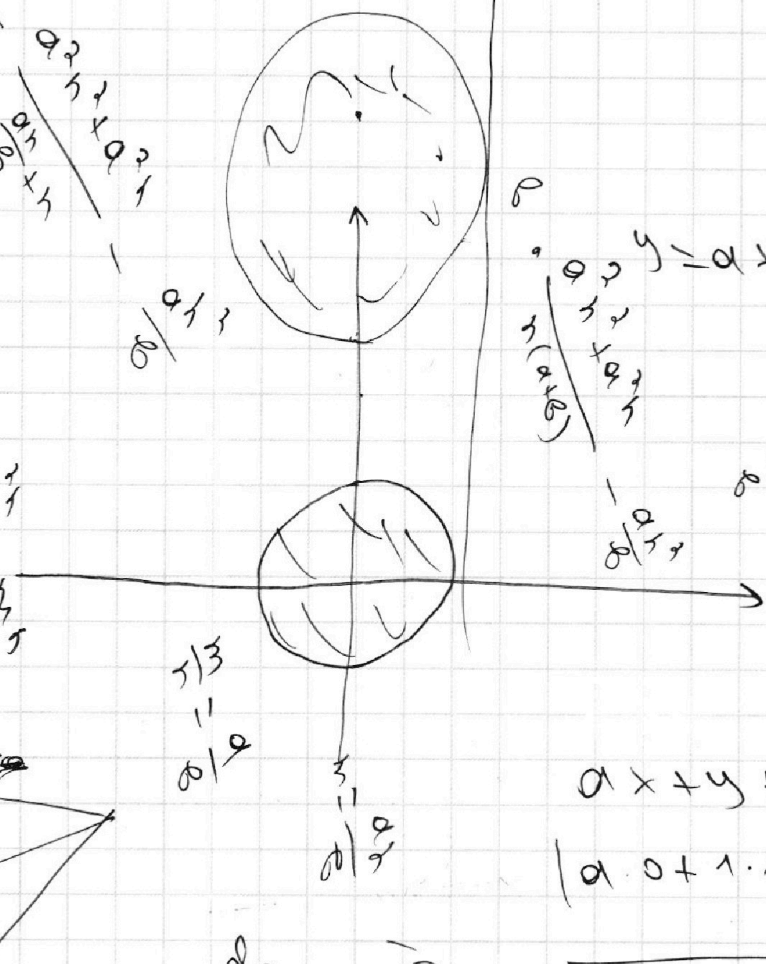
$c = 1, \quad b = a = 2.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

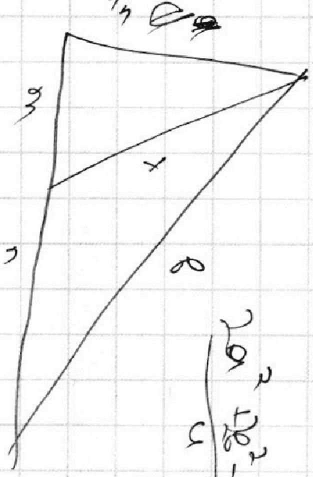
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$a^2 y = a + 8b$



$ax + y + 8b = 0$

$d_2 = \dfrac{|a \cdot 0 + 1 \cdot 12 + 8b|}{\sqrt{a^2+1}}$

$d_1 = \dfrac{|8b|}{\sqrt{a^2+1}} = 1$

$a = \sqrt{15}$

$\dfrac{|12 + 8b|}{\sqrt{a^2+1}} = 4$

$12 = 3\sqrt{a^2+1}$

$16 = a^2 + 1$

$|8b| = \sqrt{a^2+1}$, $|12 + 8b| = 4\sqrt{a^2+1}$

$8b = \sqrt{a^2+1}$

$12 + 8b = 4\sqrt{a^2+1}$

$\sqrt{98}$ $\sqrt{338}$

$2 \cdot 7 \cdot 13$

$\frac{14 \cdot 13}{\;}$ $\frac{13}{42}$ $\frac{14}{182}$

A.

$\frac{24x \cdot 7}{\cancel{2}} = 12 \cdot 7x = \boxed{\sqrt{49+49x^2}\sqrt{49+280x^2}} \cdot \frac{x \cdot \frac{12}{13}}{\cancel{2}}$

$24 \cdot 7 = \ldots$

$\frac{24 \cdot 7}{168} =$

338, 98, 2704, 3042, 33124, 168

$\cancel{24x^2} = 5^{4}6x^2$

$= 49 + 49x^2 + 280x^2 + 49 -$

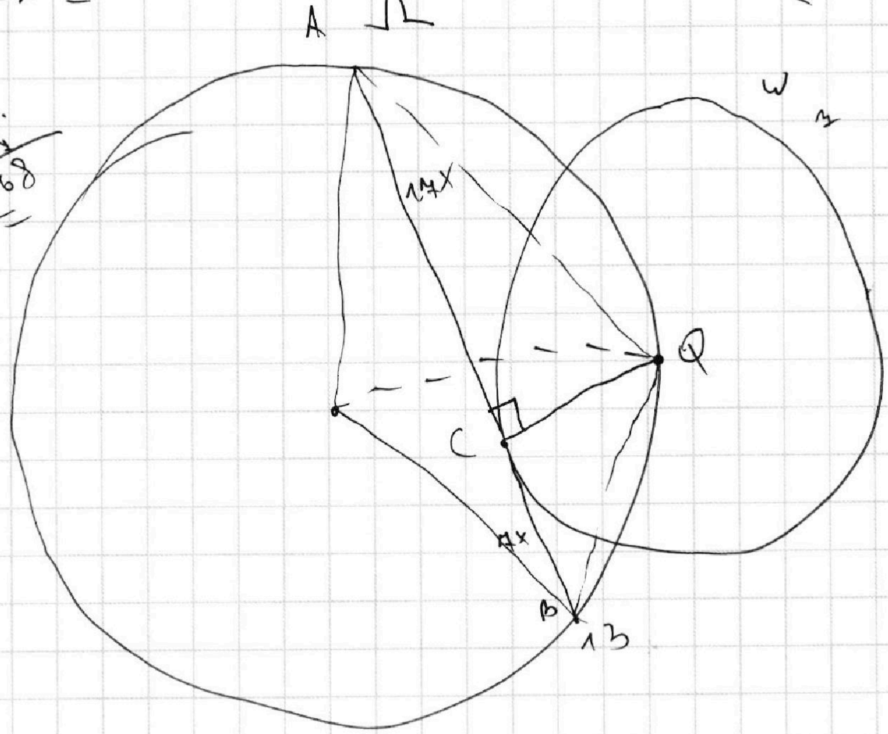
$- 2$

2^{40}

168, 168, 1344, 1008, 168, 28224

$\cos\angle AQB =$

$= \pm \frac{5}{13} x.$



$\frac{24x}{\sin\angle AQB} = 2R = 26$

$\sin\angle AQB = x \cdot \frac{12}{13}$

182, 182, 364, 1456, 182, 33124

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$a, b, c \in \mathbb{N}$, $ab \vdots 2^{15} 7^{11}$, $bc \vdots 2^{17} 7^{18}$, $ac \vdots 2^{23} 7^{39}$.

$\min(abc) = ?$

Решение. Пусть $t := abc$. Перемножим числа ab, bc и ac. Получим $ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = (abc)^2 = t^2$. Из условия, $ab \vdots 2^{15} 7^{11}$, $bc \vdots 2^{17} \cdot 7^{18}$, $ac \vdots 2^{23} 7^{39}$, откуда $t^2 \vdots 2^{45} \cdot 7^{68}$. Заметим, что раз t^2 — квадрат натур. числа $t \in \mathbb{N}$, $t^2 \vdots 2^{45}$ и 45 — нечетное, то $t^2 \vdots 2^{46}$, так как простые числа (а двойка — простое число) могут входить в квадраты натур. чисел только в четных степенях. Значит, $t^2 \vdots 2^{46} \cdot 7^{68}$.

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$ $\quad x = -3 \pm \sqrt{9} -$

$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 + 2(1-2x)\sqrt{3x^2+3x+1}$

$12 = -3\sqrt{a^2+1}$ $\quad + 1 + 81x^2 - 18x$

$\frac{3}{10}$

$12 + 8b = -4\sqrt{a^2+1}$ $\quad 8b = -\sqrt{a b^2+1}$ $\quad \frac{12}{40} = \frac{6}{20}$

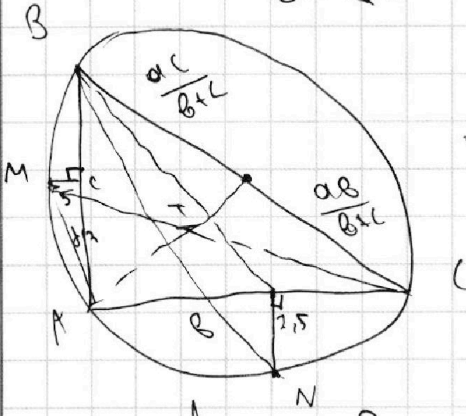
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5\,ctg\,\gamma$ $10\,ctg\,\gamma$ $5\,ctg\,\beta$. -1



$\underline{\underline{2\cdot 4x}}$ $x=1$.

$5\cdot 7\cdot 6$

AQ^2 $\sqrt{3+6+2}$ $-\sqrt{3-3}$.

$49+49x^2=2\cdot169-2\cdot169\cdot\cos\angle BOQ$

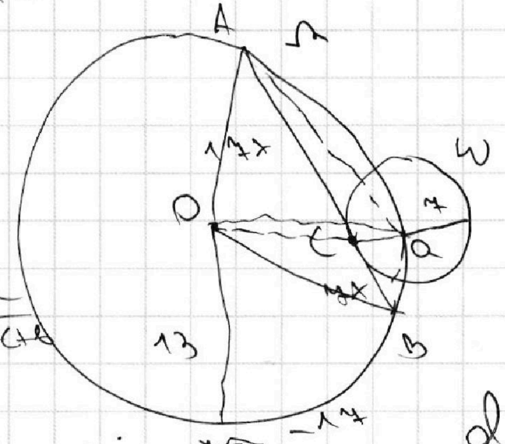
$\cos\angle BOQ=49+49x^2$

$49x^2=BQ^2-49$

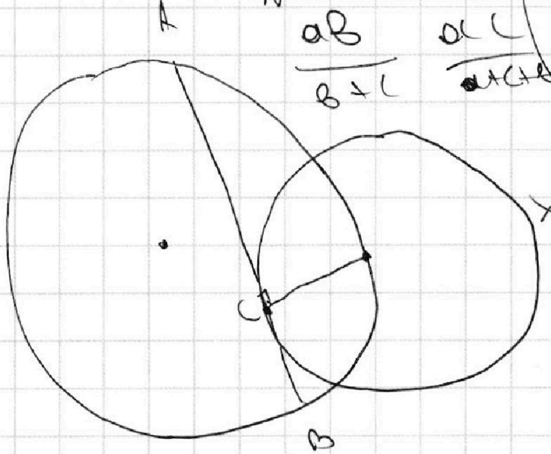
$BQ^2=49+49x^2$

$BQ=7\sqrt{1+x^2}$

$AQ^2=49+289x^2$



$\frac{ab}{b+c}$ $\frac{ac}{a+c+b}$



$x=2$: -17

$\deg_\Omega C=-17x\cdot 7x=$

$\sqrt{12-12+2}$

$\sqrt{2}$

$=OC^2-R^2\ 13^2=$

$300-11$

$\cos x=2\cos^2-1$

$=OC^2-169$

$\cos^2=\frac{\cos x+1}{2}$

$OC^2=169-119x^2$.

$2x_1$ $-2x_1-4_1=-2x_3-4_3$ 338

$\cos\angle BAQ=\cos\frac{\angle BOQ}{2}=$

$\cos\angle BOQ=1-\frac{49+49x^2}{2\cdot169}=$

$81x^2-18x+1=$

$3x^2-6x+2x$

$=3x^2+2\cdot12\cdot1+1$

$+3x$

$-2\sqrt{\ }$

$\sqrt{27+18+2}\geq$

$\sqrt{\frac{\cos\angle BQQ+1}{2}}=$

$3x^2-6x+2-3x^2-3x-1=$

$=\frac{289-49x^2}{338}$

$=$ -2

$\sqrt{27-18+2}$

$\sqrt{12+12+2}$