



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

* 5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

* 7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$a, b, c \in \mathbb{N}, \quad ab := 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc := 2^{14} \cdot 7^{18}, \quad ac := 2^{23} \cdot 7^{39}.$$

$$\min(abc) = ?$$

Решение. Через $\nu_p(m)$ будем обозначать степень вхождения простого числа p в каноническое число m (например, $\nu_3(18) = 2$).

Заметим, что т.к. $ac := 2^{23} \cdot 7^{39}$, то

$$abc := 2^{39} \cdot 7^{39} \Leftrightarrow \nu_7(abc) \geq 39. \quad \text{Заметим,}$$

$$\text{что из условия: } \begin{cases} \nu_2(a) + \nu_2(c) = \nu_2(ac) \geq 23 \\ \nu_2(b) + \nu_2(c) = \nu_2(bc) \geq 14 \\ \nu_2(a) + \nu_2(b) = \nu_2(ab) \geq 15 \end{cases}$$

(даже, что $\nu_p(m) + \nu_p(n) = \nu_p(mn)$)

Сложив эти нерав-ва, получим:

$$2(\nu_2(a) + \nu_2(b) + \nu_2(c)) = 2\nu_2(abc) \geq 55.$$

Число слева - четное, а справа - нечетное,

$$\text{откуда (очевидно) } 2\nu_2(abc) \geq 56 \Leftrightarrow$$

$$\nu_2(abc) \geq 28, \text{ и раз } \nu_7(abc) \geq 39, \text{ получим}$$

$$abc := 2^{28} \cdot 7^{39} \text{ и, откуда } \min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}.$$

Покажем, что минимум достигается. Дако, что

$$\text{подходят числа } a = 2^{11} \cdot 7^{21}, \quad b = 2^4 \text{ и } c = 7^{18} \cdot 2^{13}.$$

Дако, что при таких a, b, c все условия задачи выполняются и $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$.

$$\text{Ответ. } \boxed{2^{28} \cdot 7^{39}} \rightarrow = abc$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2

$$a, b \in \mathbb{N}, \frac{a}{b} \text{ - несократ.}; \quad m \in \mathbb{N}, \quad \frac{a+b}{a^2-4ab+b^2}$$

сократ. на m . $\max(m) = ?$

Деление. Ясно, что $\frac{a}{b}$ - несократ.

$$\Leftrightarrow a \text{ и } b \text{ взаимно-просты} \Leftrightarrow$$

$$\text{НОД}(a; b) = 1. \text{ Заметим, что}$$

$$a+b \equiv m \text{ и } a^2-4ab+b^2 \equiv m, \text{ откуда}$$

$$a^2-4ab+b^2 = (a+b)^2 - 6ab \equiv m, \text{ и так}$$

$$a+b \equiv m, \text{ то } 6ab \equiv m. \text{ Докажем,}$$

$$\text{что } \text{НОД}(a; m) = \text{НОД}(b; m) = 1.$$

Пусть это не так, и $\text{НОД}(b; m) =$

$$= n \in \mathbb{N}, \quad n > 1. \text{ Так } a+b \equiv m \text{ и}$$

$$m \equiv n, \text{ то } a+b \equiv n, \text{ и так } b \equiv n, \text{ то}$$

$$a \equiv n, \text{ откуда } \text{НОД}(a; b) \geq n > 1. \text{ Но}$$

$$\text{НОД}(a; b) = 1, \text{ и мы пришли к противоре-}$$

-чению. Значит, $\text{НОД}(b; m) = 1$. Аналогично

$$\text{НОД}(a; m) = 1. \text{ Но ведь тогда}$$

$$6ab \equiv m \text{ и } \text{НОД}(a; m) = \text{НОД}(b; m) = 1, \\ \text{что возможно лишь когда } 6 \equiv m. \rightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Предположение. Отсюда, $m=1$, $m=3$ или

$m=9$. Знаем, $\max(m) = 9$.

Покажем, что максимум достигается.

Возьмем $a=1$ и $b=17$. Ясно, что $\frac{a}{b} = \frac{1}{17}$ -

- некр. - больше того, $a+b = 18:9 = m$ и

$$a^2 - 4ab + b^2 = 289 - 4 \cdot 17 + 1 = 290 - 119 =$$

$$= 171 : 9 = m. \text{ Знаем, и числитель,}$$

и знаменатель ~~делят~~ делят

$$\frac{a+b}{a^2 - 4ab + b^2} \text{ делится на } m=9, \text{ и}$$

максимум $m=9$ достигается.

Ответ.

$$\boxed{m=9}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

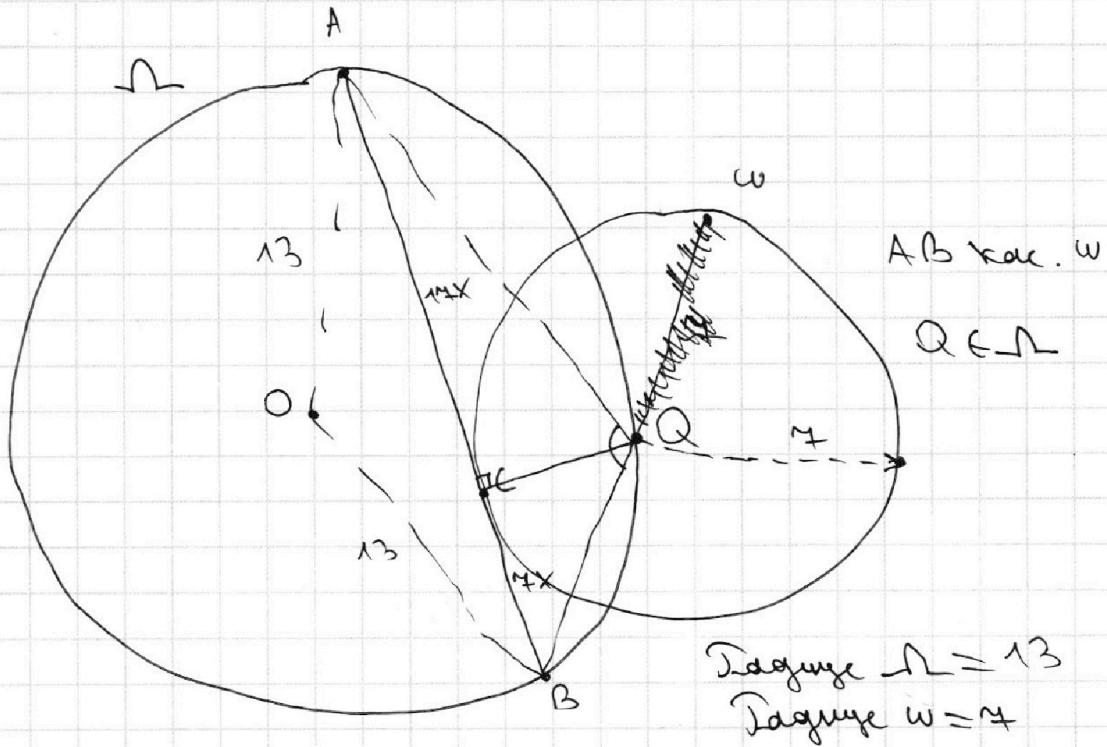
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3



$$AC:BC = 14:4. \quad AB = ?$$

Решение. Пусть O, Q — центры

Ω, ω соответственно. Пусть

$$BC = 4x, \text{ тогда } AC = \frac{14}{4} \cdot 4x = 14x.$$

главная цель — найти x . \rightarrow очевидно $x > 0$.
 $AB = AC + BC = 24x.$

Через $\angle \alpha, \gamma, \chi$ обозначим степень
точки X относительно окружностей Γ .

$$\text{Тогда: } \angle \alpha_{\omega A} = AQ^2 - 49 = AC^2 = 289x^2,$$

$$\angle \alpha_{\omega B} = BQ^2 - 49 = BC^2 = 49x^2. \quad \rightarrow$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



отсюда $AQ = \sqrt{49 + 289x^2}$ и
 $BQ = \sqrt{49 + 49x^2}$. Это теорема
синусов в $\triangle AQB$:

$$\frac{AB}{\sin \angle AQB} = \frac{24x}{\sin \angle AQB} = 2 \cdot 13 = 26,$$

отсюда $\sin \angle AQB = \frac{12}{13} x \leq 1$,
и $0 < x \leq \frac{13}{12}$. Заметим.

$QC = 4$, $QC \perp AB$ как радиус

в точку касания, отсюда:

$$S_{\triangle AQB} = \frac{QC \cdot AB}{2} = 12 \cdot 4 \cdot x =$$
$$= \frac{AQ \cdot QB \cdot \sin \angle AQB}{2} =$$

$$= \frac{\frac{12}{13} x \sqrt{49 + 49x^2} \sqrt{49 + 289x^2}}{2}$$

Значит,

$$\sqrt{49 + 49x^2} \sqrt{49 + 289x^2} = 182.$$

Очевидно, что ^{длина} хорды AB может иметь

только 1 значение, т.е. наше ~~уравнение~~

тоже $0 < x \leq \frac{13}{12}$ в наших условиях

тоже может иметь только 1 значение.

Значит, при наших ~~данных~~ x наше уравнение \rightarrow

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Предложение.

имеет ~~только одно~~

~~только одно~~ равно 1 решение.

Заметим, что подходит

$0 < x = 1 \leq \frac{13}{12}$. Действительно, при

$$x=1: \sqrt{49 + 49x^2} \sqrt{49 + 289x^2} = \sqrt{98} \sqrt{338} = \\ = \sqrt{33124} = 182, \text{ т.е. } x=1 - \text{корень.}$$

Значит, единственное решение

нашего уравнения это $x=1$.

Когда, $AB = 24x = 24$.

Ответ. $AB = 24$

→

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 2x.$$

Решение. ~~итерация~~

Заметим. $1 - 2x = (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1 + 1).$

Замена: $a := 3x^2 - 6x + 2$, $b := 3x^2 + 3x + 1$.
Тогда $1 - 2x = a - b$.

Отсюда: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$, $a, b \geq 0$.

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) = 0.$$

2 случая:

① $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$. $\Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$.

$\Leftrightarrow a = b$, $a, b \geq 0$. \Leftrightarrow

$a = b$, $b \geq 0$. $\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$,
 $3x^2 + 3x + 1 \geq 0$. Расмотрим

уравнение $3x^2 + 3x + 1 = 0$.

Его дискриминант D равен

$D = 9 - 3 \cdot 4 = -3 < 0$, значит,

$3x^2 + 3x + 1 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. \rightarrow

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.

отсюда $3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 - 6x + 2$,

и отсюда $\forall x \in \mathbb{R}$ не нужно, что $\forall x \in \mathbb{R}$

$3x^2 + 3x + 1 > 0$. Значит, $9x = 1$,

откуда $x = \frac{1}{9}$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 = 0$, т.е.

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$, $a, b \geq 0$. \Leftrightarrow

$a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = 1$, $a, b \geq 0$. \Leftrightarrow

$3x^2 - 6x + 2 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}\sqrt{3x^2 + 3x + 1} +$

$+ 3x^2 + 3x + 1 = 6x^2 - 3x + 3 +$

$+ 2\sqrt{a}\sqrt{b} = 1$, $a, b \geq 0$.

отсюда $2\sqrt{a}\sqrt{b} = 1 - 6x^2 + 3x - 3 \geq 0$.

Таким образом уравнение $6x^2 - 3x + 3 = 1$.

$\Leftrightarrow 6x^2 - 3x + 2 = 0$. Его дискриминант

равен $D = 9 - 6 \cdot 2 \cdot 4 = 9 - 48 = -39 < 0$,

значит, $6x^2 - 3x + 3 > 1$ при всех

$x \in \mathbb{R}$. Это значит (ваше решение) \rightarrow



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

что $1 - 6x^2 + 3x - 3 = -2\sqrt{a} \sqrt{b} \geq 0,$

откуда $1 - 6x^2 + 3x + 3 > 1.$ Но

это невозможно $\Leftrightarrow x \in \emptyset.$

значит, в этом случае

нет решений.

Поэтому $x = \frac{1}{9}.$

ответ.

$$x = \frac{1}{9}$$



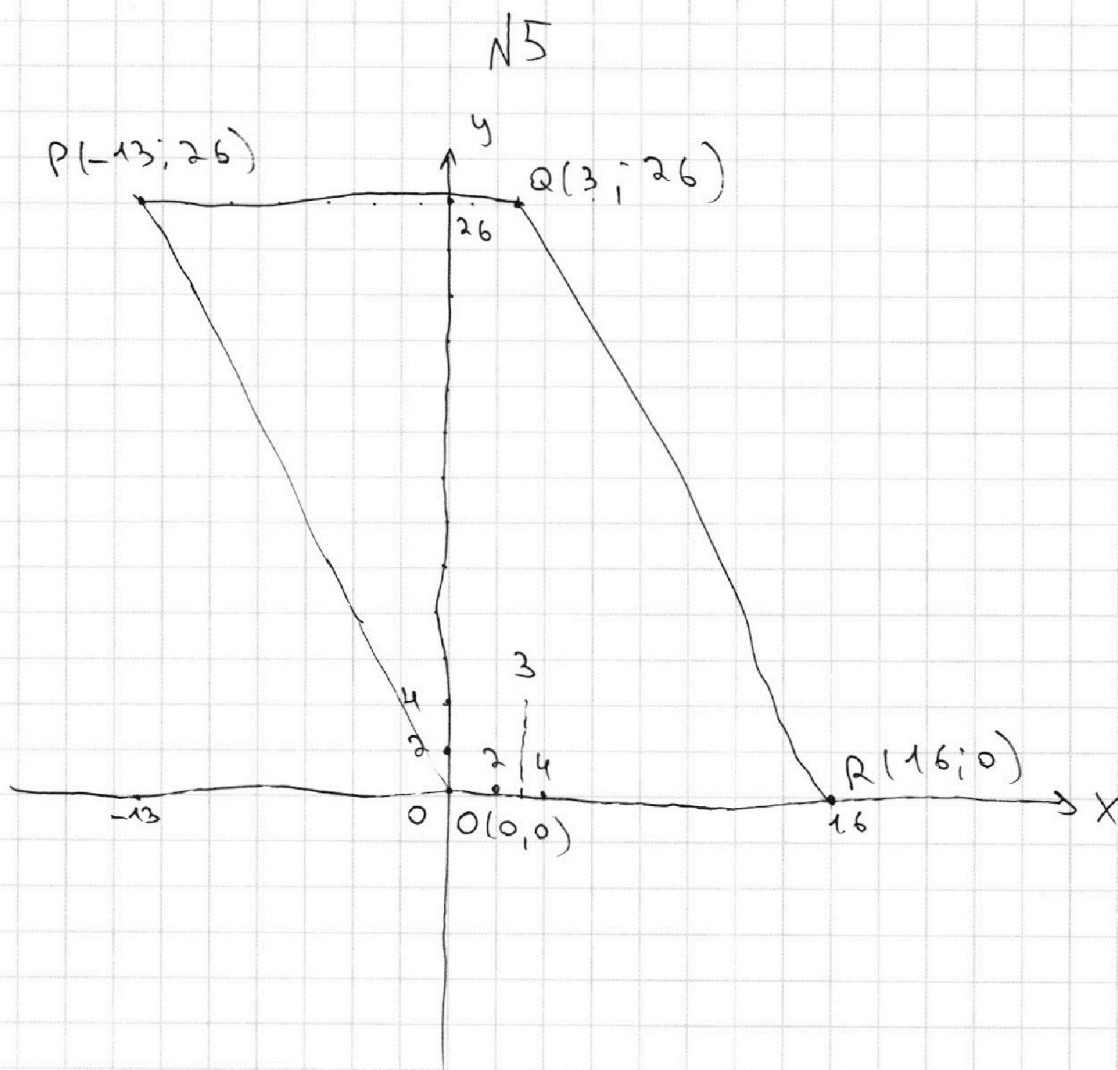
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение. OR задается уравнением

~~$x=3$~~ $y=0$; PQ — уравнением $y=26$,

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

Найти все a , при которых $\exists b$: сист. имеет

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

ровно 2 реш.

Решение. Первое уравнение: $y = -ax + 8b$

~~прямая~~ - прямая (вида $y = kx + c$).

Второе нерав-во:

$x^2 + y^2 = 1$ - окр-ть w_1 (центром $O_1(0; 0)$)

радиуса $R_1 = 1$; $x^2 + (y - 12)^2 = 16$ - окр-ть

w_2 (центром $O_2(0; 12)$) радиуса $R_2 = 4$.

Ясно, что w_1 и w_2 не имеют общих

точек. Очевидно, что второе неравенство

~~выполняется~~ выполняется:

- на границах ~~окр-тей~~ ^{окр-тей} w_1 и w_2 .
- Внутри окр-тей w_1 и w_2 .

Нарисуем графики: \rightarrow

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

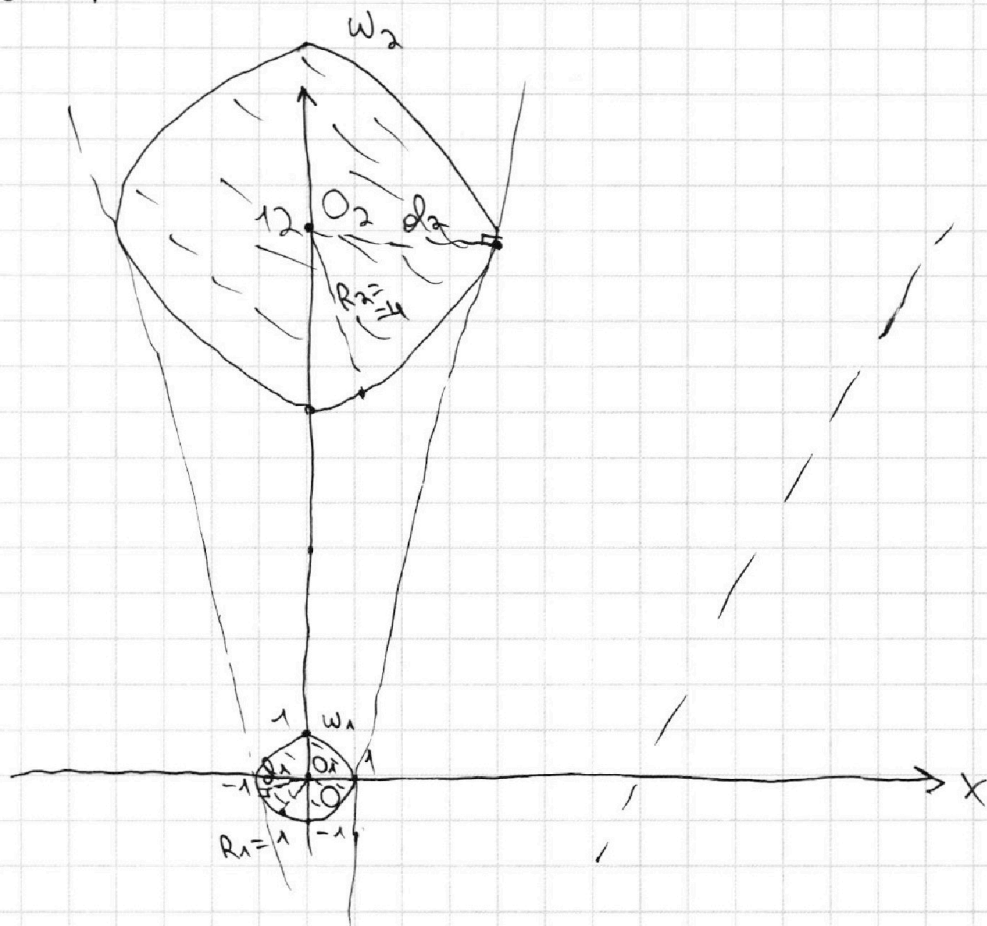
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.



Очевидно, что ~~од~~ равно два решения
будет \Leftrightarrow ρ касается w_1 и w_2 .

Почему? Если ρ внешне пересек. одну из
окр-тей w_1 и w_2 , то ясно, что будет ∞
реш., значит, она может либо касаться,
либо не иметь общих точек (касаний
из окр-тей w_1 и w_2 . По т.к. окр-ти
два и решения два, то ясно, что \rightarrow

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

прямая ℓ касается искомых окружностей. Дано, что w_1 и w_2 искомые касательные $\Rightarrow y$ кас.

и значения a . Значит w_1 .

Значение. Расстояние d от точки (x_0, y_0)

до прямой $ax+by+c=0$ равно

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

т.к. ℓ касается

w_1 и w_2 , то если d_1 и d_2 - расстояния

- от O_1 и O_2 до ℓ соответственно,

то $d_1 = R_1$ и $d_2 = R_2$. Значит:

$$\begin{cases} d_1 = \frac{18b}{\sqrt{a^2+1}} = R_1 = 1 \\ d_2 = \frac{18b+12}{\sqrt{a^2+1}} = R_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18b = \sqrt{a^2+1} \\ 18b+12 = 4\sqrt{a^2+1} \end{cases}$$

~~Значит~~ Значит. 3 случая:

① $b \geq 0$. Тогда $8b = \sqrt{a^2+1}$ и $12+8b = 4\sqrt{a^2+1}$, откуда $12+8b = 12+\sqrt{a^2+1} = 4\sqrt{a^2+1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+1} = 4 \Leftrightarrow a^2+1=16 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{15}$$

(и тогда $b = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+1}$ ($b = \frac{1}{2} \geq 0$)) \rightarrow

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Предложение.

$$\textcircled{2} \quad -\frac{3}{2} \leq b \leq 0. \quad \text{и тогда}$$

$$-8b = \sqrt{a^2 + 1} \quad \text{и} \quad 12 + 8b = 4\sqrt{a^2 + 1}, \quad \text{откуда}$$

$$8b = -\sqrt{a^2 + 1} \quad \text{и} \quad 12 = 5\sqrt{a^2 + 1}, \quad \text{а значит}$$

$$a^2 + 1 = \frac{144}{25} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = \frac{119}{25} \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$(\text{и тогда} \quad -\frac{3}{2} \leq b = -\frac{3}{10} \leq 0)$$

$$\textcircled{3} \quad b \leq -\frac{3}{2}. \quad \text{и тогда} \quad -8b = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\text{и} \quad -12 - 8b = 4\sqrt{a^2 + 1}, \quad \text{откуда}$$

$$12 = -3\sqrt{a^2 + 1} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2 + 1} = -4.$$

$$\sqrt{a^2 + 1} \geq 0, \quad \text{но} \quad -4 \leq 0. \quad \text{и следовательно}$$

$$0 \leq \sqrt{a^2 + 1} = -4 < 0, \quad \text{что невозможно}$$

$$\Leftrightarrow a \in \emptyset. \quad \text{Значит,} \quad a = \pm \sqrt{15}$$

$$\text{и} \quad a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$

Ответ.

$$a = \sqrt{15}; -\sqrt{15}; \frac{\sqrt{119}}{5}; -\frac{\sqrt{119}}{5}$$

→



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

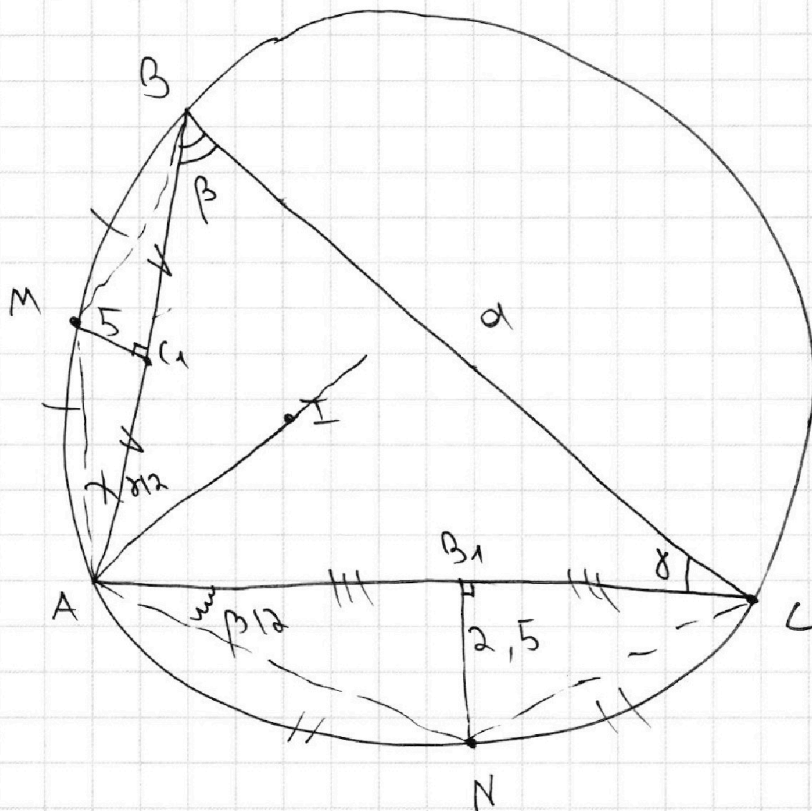
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7

I - центр $\triangle ABC$

$AI = ?$



Решение. Пусть B_1, C_1 - середины AC, AB

~~соответственно~~ соответственно; Пусть

$BC = a, AB = c, AC = b, \angle A = \alpha, \angle B = \beta,$

$\angle C = \gamma$. Ясно, что $\angle NAC = \frac{\beta}{2}$ и

$\angle MAB = \frac{\gamma}{2}$. Отсюда $AC_1 = \frac{c}{2} =$

$= 5 \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ и $AB_1 = \frac{b}{2} = 2,5 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$

и $c = 10 \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}, b = 5 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$.



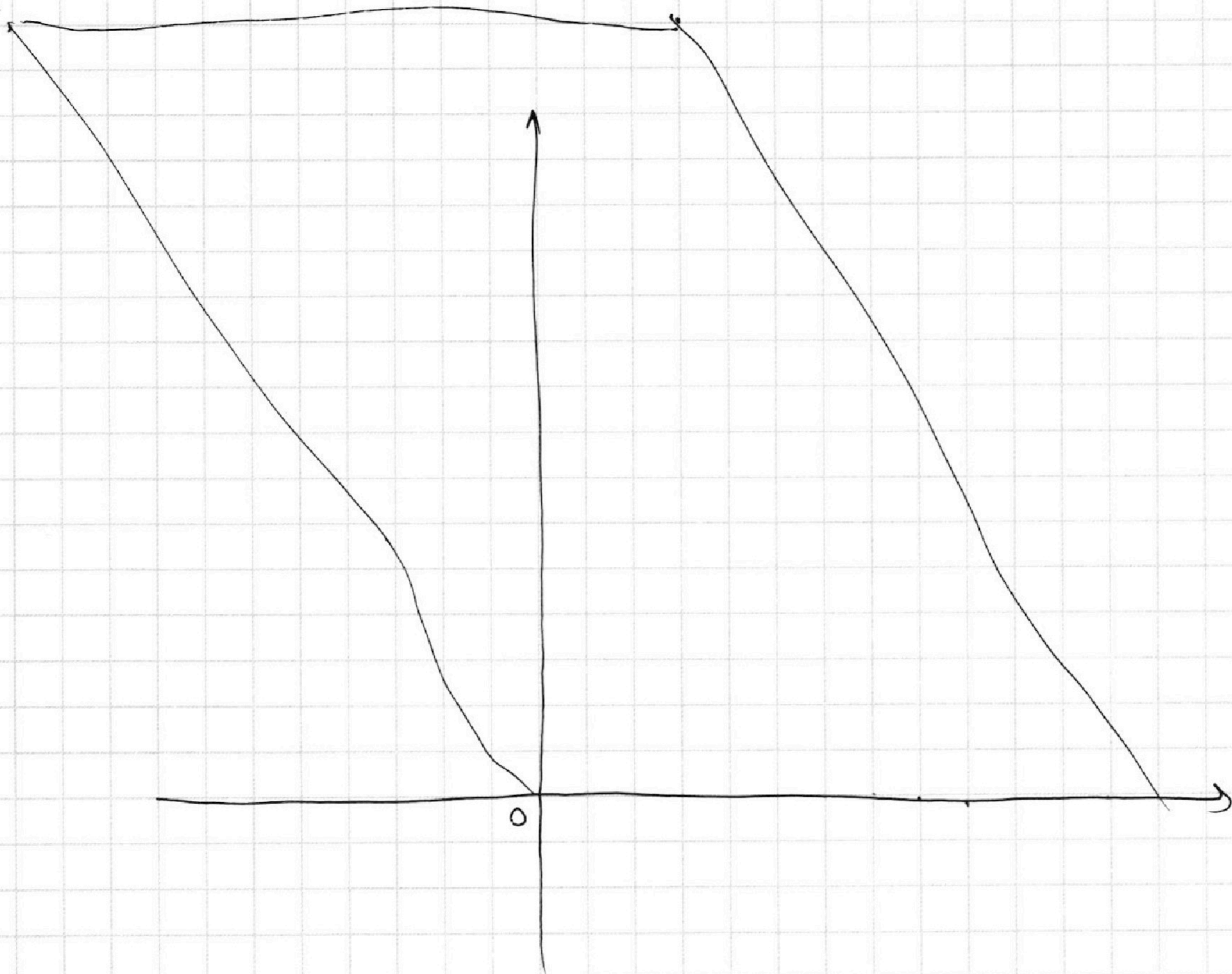
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



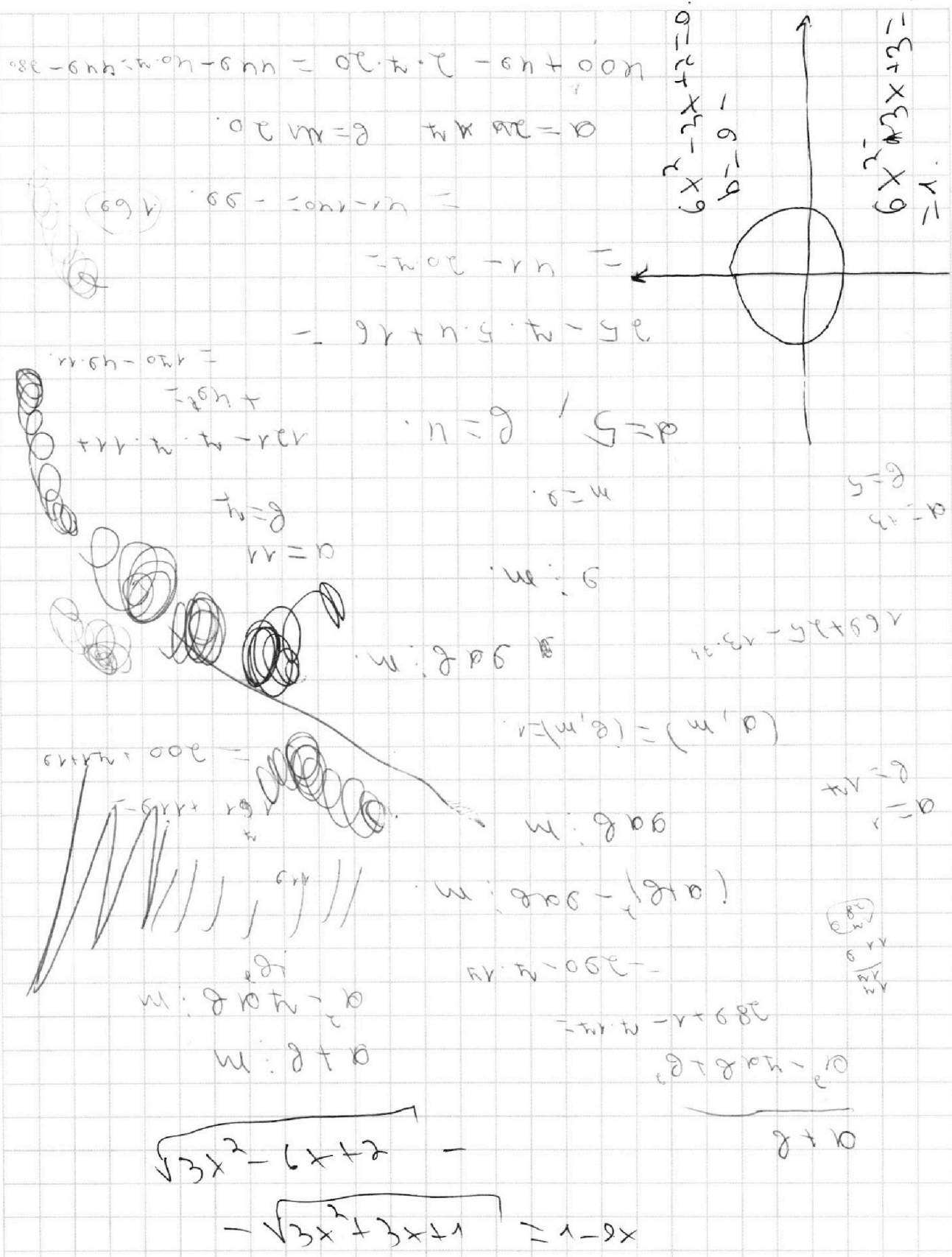
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a \cdot k \cdot x$

$$k \cdot -13 = 26$$

$$k = -2$$



На одной странице можно оформить только одну задачу.
 Отметьте крестиком номер задачи,
 решение которой представлено на странице:
 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
 страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода непустым!



На одной странице можно оформить **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,

страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода неопределен!



Черновик

$a + b$

$\frac{a^2 - y a b + b^2}{1}$

$a, b \in \mathbb{N}$

$a, b = 1$

$25x^2 - 15x - 2 = 1$

$25x^2 - 15x - 3 = 0$

$a = 2, b = 1$

$a = 1, b = 2$

$a = 2, b = 2$

$a = 1, b = 3$

$a = 3, b = 1$

$a = 2, b = 3$

$a = 3, b = 2$

$a = 1, b = 4$

$a = 4, b = 1$

$a = 2, b = 4$

$a = 4, b = 2$

$a = 3, b = 3$

$a = 1, b = 5$

$a = 5, b = 1$

$a = 2, b = 5$

$a = 5, b = 2$

$a = 3, b = 4$

$a = 4, b = 3$

$a = 4, b = 4$

$a = 1, b = 6$

$a = 6, b = 1$

$a = 2, b = 6$

$a = 6, b = 2$

$a = 3, b = 5$

$a = 5, b = 3$

$a = 4, b = 5$

$a = 5, b = 4$

$a = 1, b = 7$

$a = 7, b = 1$

$a = 2, b = 7$

$a = 7, b = 2$

$a = 3, b = 6$

$a = 6, b = 3$

$a = 4, b = 6$

$a = 6, b = 4$

$a = 5, b = 5$

$a = 1, b = 8$

$a = 8, b = 1$

$a = 2, b = 8$

$a = 8, b = 2$

$a = 3, b = 7$

$a = 7, b = 3$

$a = 4, b = 7$

$a = 7, b = 4$

$a = 5, b = 6$

$a = 6, b = 5$

$a = 6, b = 6$

$a = 1, b = 9$

$a = 9, b = 1$

$a = 2, b = 9$

$a = 9, b = 2$

$a = 3, b = 8$

$a = 8, b = 3$

$a = 4, b = 8$

$a = 8, b = 4$

$a = 5, b = 7$

$a = 7, b = 5$

$a = 6, b = 7$

$a = 7, b = 6$

$a = 7, b = 7$

$a = 1, b = 10$

$a = 10, b = 1$

$a = 2, b = 10$

$a = 10, b = 2$

$a = 3, b = 9$

$a = 9, b = 3$

$a = 4, b = 9$

$a = 9, b = 4$

$a = 5, b = 8$

$a = 8, b = 5$

$a = 6, b = 8$

$a = 8, b = 6$

$a = 7, b = 7$

$a = 7, b = 7$

$a = 8, b = 8$

$a = 8, b = 8$

$a = 9, b = 9$

$a = 9, b = 9$

$a = 10, b = 10$

$a = 10, b = 10$

$a = 1, b = 11$

$a = 11, b = 1$

$a = 2, b = 11$

$a = 11, b = 2$

$a = 3, b = 10$

$a = 10, b = 3$

$a = 4, b = 10$

$a = 10, b = 4$

$a = 5, b = 9$

$a = 9, b = 5$

$a = 6, b = 9$

$a = 9, b = 6$

$a = 7, b = 8$

$a = 8, b = 7$

$a = 8, b = 8$

$a = 9, b = 9$

$a = 10, b = 10$

$a = 11, b = 11$

$a = 11, b = 11$

$a = 1, b = 12$

$a = 12, b = 1$

$a = 2, b = 12$

$a = 12, b = 2$

$a = 3, b = 11$

$a = 11, b = 3$

$a = 4, b = 11$

$a = 11, b = 4$

$a = 5, b = 10$

$a = 10, b = 5$

$a = 6, b = 10$

$a = 10, b = 6$

$a = 7, b = 9$

$a = 9, b = 7$

$a = 8, b = 8$

$a = 8, b = 8$

$a = 9, b = 9$

$a = 10, b = 10$

$a = 11, b = 11$

$a = 12, b = 12$

$a = 12, b = 12$

$a = 1, b = 13$

$a = 13, b = 1$

$a = 2, b = 13$

$a = 13, b = 2$

$a = 3, b = 12$

$a = 12, b = 3$

$a = 4, b = 12$

$a = 12, b = 4$

$a = 5, b = 11$

$a = 11, b = 5$

$a = 6, b = 11$

$a = 11, b = 6$

$a = 7, b = 10$

$a = 10, b = 7$

$a = 8, b = 9$

$a = 9, b = 8$

$a = 9, b = 9$

$a = 10, b = 10$

$a = 11, b = 11$

$a = 12, b = 12$

$a = 13, b = 13$

$a = 13, b = 13$

$a = 1, b = 14$

$a = 14, b = 1$

$a = 2, b = 14$

$a = 14, b = 2$

$a = 3, b = 13$

$a = 13, b = 3$

$a = 4, b = 13$

$a = 13, b = 4$

$a = 5, b = 12$

$a = 12, b = 5$

$a = 6, b = 12$

$a = 12, b = 6$

$a = 7, b = 11$

$a = 11, b = 7$

$a = 8, b = 10$

$a = 10, b = 8$

$a = 9, b = 9$

$a = 9, b = 9$

$a = 10, b = 10$

$a = 11, b = 11$

$a = 12, b = 12$

$a = 13, b = 13$

$a = 14, b = 14$

$a = 14, b = 14$

$a = 1, b = 15$

$a = 15, b = 1$

$a = 2, b = 15$

$a = 15, b = 2$

$a = 3, b = 14$

$a = 14, b = 3$

$a = 4, b = 14$

$a = 14, b = 4$

$a = 5, b = 13$

$a = 13, b = 5$

$a = 6, b = 13$

$a = 13, b = 6$

$a = 7, b = 12$

$a = 12, b = 7$

$a = 8, b = 11$

$a = 11, b = 8$

$a = 9, b = 10$

$a = 10, b = 9$

$a = 10, b = 10$

$a = 11, b = 11$

$a = 12, b = 12$

$a = 13, b = 13$

$a = 14, b = 14$

$a = 15, b = 15$

$a = 15, b = 15$

$a = 1, b = 16$

$a = 16, b = 1$

$a = 2, b = 16$

$a = 16, b = 2$

$a = 3, b = 15$

$a = 15, b = 3$

$a = 4, b = 15$

$a = 15, b = 4$

$a = 5, b = 14$

$a = 14, b = 5$

$a = 6, b = 14$

$a = 14, b = 6$

$a = 7, b = 13$

$a = 13, b = 7$

$a = 8, b = 12$

$a = 12, b = 8$

$a = 9, b = 11$

$a = 11, b = 9$

$a = 10, b = 10$

$a = 10, b = 10$

$a = 11, b = 11$

$a = 12, b = 12$

$a = 13, b = 13$

$a = 14, b = 14$

$a = 15, b = 15$

$a = 16, b = 16$

$a = 16, b = 16$

$a = 1, b = 17$

$a = 17, b = 1$

$a = 2, b = 17$

$a = 17, b = 2$

$a = 3, b = 16$

$a = 16, b = 3$

$a = 4, b = 16$

$a = 16, b = 4$

$a = 5, b = 15$

$a = 15, b = 5$

$a = 6, b = 15$

$a = 15, b = 6$

$a = 7, b = 14$

$a = 14, b = 7$

$a = 8, b = 13$

$a = 13, b = 8$

$a = 9, b = 12$

$a = 12, b = 9$

$a = 10, b = 11$

$a = 11, b = 10$

$a = 11, b = 11$

$a = 12, b = 12$

$a = 13, b = 13$

$a = 14, b = 14$

$a = 15, b = 15$

$a = 16, b = 16$

$a = 17, b = 17$

$a = 17, b = 17$

$a = 1, b = 18$

$a = 18, b = 1$

$a = 2, b = 18$

$a = 18, b = 2$

$a = 3, b = 17$

$a = 17, b = 3$

$a = 4, b = 17$

$a = 17, b = 4$

$a = 5, b = 16$

$a = 16, b = 5$

$a = 6, b = 16$

$a = 16, b = 6$

$a = 7, b = 15$

$a = 15, b = 7$

$a = 8, b = 14$

$a = 14, b = 8$

$a = 9, b = 13$

$a = 13, b = 9$

$a = 10, b = 12$

$a = 12, b = 10$

$a = 11, b = 11$

$a = 11, b = 11$

$a = 12, b = 12$

$a = 13, b = 13$

$a = 14, b = 14$

$a = 15, b = 15$

$a = 16, b = 16$

$a = 17, b = 17$

$a = 18, b = 18$

$a = 18, b = 18$

$a = 1, b = 19$

$a = 19, b = 1$

$a = 2, b = 19$

$a = 19, b = 2$

$a = 3, b = 18$

$a = 18, b = 3$

$a = 4, b = 18$

$a = 18, b = 4$

$a = 5, b = 17$

$a = 17, b = 5$

$a = 6, b = 17$

$a = 17, b = 6$

$a = 7, b = 16$

$a = 16, b = 7$

$a = 8, b = 15$

$a = 15, b = 8$

$a = 9, b = 14$

$a = 14, b = 9$

$a = 10, b = 13$

$a = 13, b = 10$

$a = 11, b = 12$

$a = 12, b = 11$

$a = 12, b = 12$

$a = 13, b = 13$

$a = 14, b = 14$

$a = 15, b = 15$

$a = 16, b = 16$

$a = 17, b = 17$

$a = 18, b = 18$

$a = 19, b = 19$

$a = 19, b = 19$

$a = 1, b = 20$

$a = 20, b = 1$

$a = 2, b = 20$

$a = 20, b = 2$

$a = 3, b = 19$

$a = 19, b = 3$

$a = 4, b = 19$

$a = 19, b = 4$

$a = 5, b = 18$

$a = 18, b = 5$

$a = 6, b = 18$

$a = 18, b = 6$

$a = 7, b = 17$

$a = 17, b = 7$

$a = 8, b = 16$

$a = 16, b = 8$

$a = 9, b = 15$

$a = 15, b = 9$

$a = 10, b = 14$

$a = 14, b = 10$

$a = 11, b = 13$

$a = 13, b = 11$

$a = 12, b = 12$

$a = 12, b = 12$

$a = 13, b = 13$

$a = 14, b = 14$

$a = 15, b = 15$

$a = 16, b = 16$

$a = 17, b = 17$

$a = 18, b = 18$

$a = 19, b = 19$

$a = 20, b = 20$

$a = 20, b = 20$

$a = 1, b = 21$

$a = 21, b = 1$

$a = 2, b = 21$

$a = 21, b = 2$

$a = 3, b = 20$

$a = 20, b = 3$

$a = 4, b = 20$

$a = 20, b = 4$

$a = 5, b = 19$

$a = 19, b = 5$

$a = 6, b = 19$

$a = 19, b = 6$

$a = 7, b = 18$

$a = 18, b = 7$

$a = 8, b = 17$

$a = 17, b = 8$

$a = 9, b = 16$

$a = 16, b = 9$

$a = 10, b = 15$

$a = 15, b = 10$

$a = 11, b = 14$

$a = 14, b = 11$

$a = 12, b = 13$

$a = 13, b = 12$

$a = 13, b = 13$

$a = 14, b = 14$

$a = 15, b = 15$

$a = 16, b = 16$

$a = 17, b = 17$

$a = 18, b = 18$

$a = 19, b = 19$

$a = 20, b = 20$

$a = 21, b = 21$

$a = 21, b = 21$

$a = 1, b = 22$

$a = 22, b = 1$

$a = 2, b = 22$

$a = 22, b = 2$

$a = 3, b = 21$

$a = 21, b = 3$

$a = 4, b = 21$

$a = 21, b = 4$

$a = 5, b = 20$

$a = 20, b = 5$

$a = 6, b = 20$

$a = 20, b = 6$

$a = 7, b = 19$

$a = 19, b = 7$

$a = 8, b = 18$

$a = 18, b = 8$

$a = 9, b = 17$

$a = 17, b = 9$

$a = 10, b = 16$

$a = 16, b = 10$

$a = 11, b = 15$

$a = 15, b = 11$

$a = 12, b = 14$

$a = 14, b = 12$

$a = 13, b = 13$

$a = 13, b = 13$

$a = 14, b = 14$

$a = 15, b = 15$

$a = 16, b = 16$

$a = 17, b = 17$

$a = 18, b = 18$

$a = 19, b = 19$

$a = 20, b = 20$

$a = 21, b = 21$

$a = 22, b = 22$

$a = 22, b = 22$

$a = 1, b = 23$

$a = 23, b = 1$

$a = 2, b = 23$

$a = 23, b = 2$

$a = 3, b = 22$

$a = 22, b = 3$

$a = 4, b = 22$

$a = 22, b = 4$

$a = 5, b = 21$

$a = 21, b = 5$

$a = 6, b = 21$

$a = 21, b = 6$

$a = 7, b = 20$

$a = 20, b = 7$

$a = 8, b = 19$

$a = 19, b = 8$

$a = 9, b = 18$

$a = 18, b = 9$

$a = 10, b = 17$

$a = 17, b = 10$

$a = 11, b = 16$

$a = 16, b = 11$

$a = 12, b = 15$

$a = 15, b = 12$

$a = 13, b = 14$

$a = 14, b = 13$

$a = 14, b = 14$

$a = 15, b = 15$

$a = 16, b = 16$

$a = 17, b = 17$

$a = 18, b = 18$

$a = 19, b = 19$

$a = 20, b = 20$

$a = 21, b = 21$

$a = 22, b = 22$

$a = 23, b = 23$

$a = 23, b = 23$

$a = 1, b = 24$

$a = 24, b = 1$

$a = 2, b = 24$

$a = 24, b = 2$

$a = 3, b = 23$

$a = 23, b = 3$

$a = 4, b = 23$

$a = 23, b = 4$

$a = 5, b = 22$

$a = 22, b = 5$

$a = 6, b = 22$

$a = 22, b = 6$

$a = 7, b = 21$

$a = 21, b = 7$

$a = 8, b = 20$

$a = 20, b = 8$

$a = 9, b = 19$

$a = 19, b = 9$

$a = 10, b = 18$



На одной странице можно оформить **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Лепка QR-кода невозможна!

МФТИ

Handwritten mathematical work on grid paper. At the top, there is a diagram of a triangle with sides labeled a , b , and c , and an angle α . Below the diagram are several equations and derivations:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
- $a^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \alpha$
- $a^2 = 2 - 2 \cos \alpha$
- $a = \sqrt{2 - 2 \cos \alpha}$
- $a = \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$
- $a = \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$
- $a = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$
- $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}$
- $\frac{\alpha}{2} = \arcsin \frac{a}{2}$
- $\alpha = 2 \arcsin \frac{a}{2}$

There are also some scribbles and other equations scattered throughout the page, including $a^2 + b^2 = c^2$ and $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos \alpha$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a, b, c \in \mathbb{N}$, $ab: 2 \begin{smallmatrix} 15 \\ 7 \end{smallmatrix}$, $bc: 2 \begin{smallmatrix} 17 \\ 7 \end{smallmatrix}$, $ac: 2 \begin{smallmatrix} 23 \\ 7 \end{smallmatrix}$.

$\min(abc) = ?$

Решение. Пусть $t := abc$. Перемножим
 числа ab , bc и ac . Получим

$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = (abc)^2 = t^2$. Из

условия, $ab: 2 \begin{smallmatrix} 15 \\ 7 \end{smallmatrix}$, $bc: 2 \begin{smallmatrix} 17 \\ 7 \end{smallmatrix}$, $ac: 2 \begin{smallmatrix} 23 \\ 7 \end{smallmatrix}$,

откуда $t: 2 \begin{smallmatrix} 45 \\ 7 \end{smallmatrix}$. Заметим,

что раз t^2 - квадрат натур. числа $t \in \mathbb{N}$,

$t^2: 45$ и 45 - келетное, то $t^2: 2 \begin{smallmatrix} 45 \\ 7 \end{smallmatrix}$, так

как простые числа могут входить в

квадраты натур. чисел только в четных

степенях. Значит, $t^2: 2 \begin{smallmatrix} 45 \\ 7 \end{smallmatrix}$.

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$ $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9}}{6}$

$12 = -3 \sqrt{12} + 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 + 2(1-2x) \sqrt{3x^2 + 5x + 1}$

$12 + 3\sqrt{12} = 3x^2 - 6x + 2 + 2(1-2x)\sqrt{3x^2 + 5x + 1}$

$12 + 8\sqrt{3} = -4\sqrt{3x^2 + 5x + 1}$

$\frac{12 + 8\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3x^2 + 5x + 1}$

$\frac{3 + 2\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3x^2 + 5x + 1}$

$\frac{3 + 2\sqrt{3}}{10} = \frac{3}{10}$

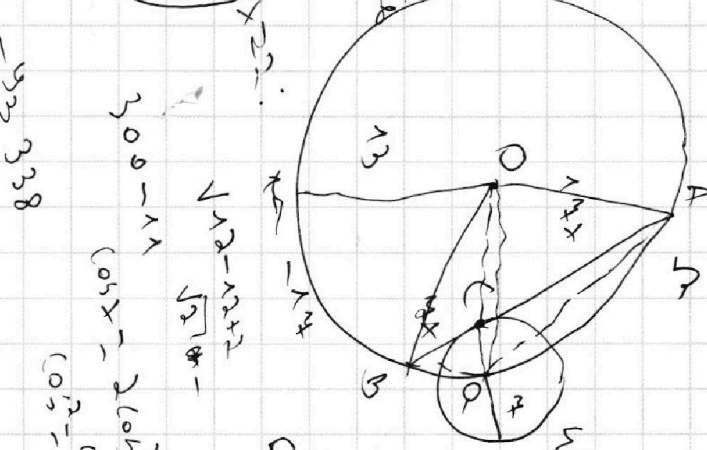
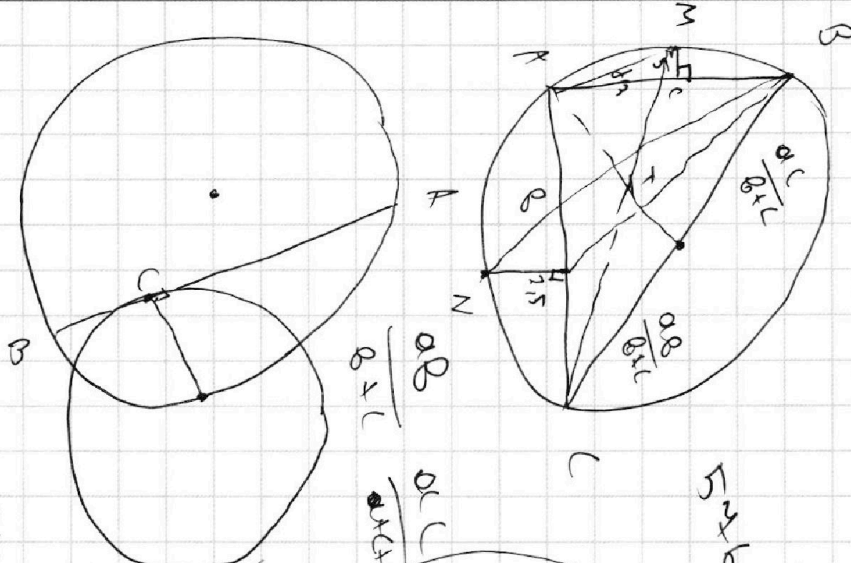
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5(49) 10(49) 5(49) p. -1

$\frac{2yx}{x} = 1$

AO^2

$13 + 6 + 2 = 13 + 3 = 16$

$13 + 6 + 2 = 2 \cdot 169 - 2 \cdot 169 \cdot \cos \angle BOA$

$\cos \angle BOA = \frac{49 + 49x^2}{BO^2}$

$49x^2 = BO^2 - 49$

$BO^2 = 49 + 49x^2$

$BO = 7 \sqrt{1+x^2}$

$AO^2 = 49 + 289x^2$

$\text{deg } \angle C = 14x \cdot 14x = 196x^2$

$OC^2 = R^2 \cdot 15^2 = 225R^2$

$\cos x = \frac{2(15^2 - 1)}{OC^2} = \frac{45}{OC^2} = \frac{45}{169 - 149x^2}$

$OC^2 = 169 - 149x^2$

$2x \cdot 1 = -2x + 1 = -2x + 338$

$\cos \angle BOA = \frac{\cos \angle BOA}{x}$

$\cos \angle BOA = 1 - \frac{49 + 49x^2}{2 \cdot 169}$

$\frac{289 - 49x^2}{338} = 1 - \frac{49 + 49x^2}{2 \cdot 169}$

$\sqrt{12 + 12x}$

$2x^2 - 18x + 11 = 0$
 $2x^2 - 18x + 11 = 0$
 $x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 2 \cdot 11}}{2 \cdot 2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 88}}{4} = \frac{18 \pm \sqrt{236}}{4}$