



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 a, b, c - кат.

$$ab : 2^{75} \cdot 7^{77}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{78}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\min abc? \quad (abc)^2 : 2^{55} \cdot 7^{68}$$

Если квадрат делится на  $2^{55}$  то

степень в показателе 2 должна быть **нечётной**

~~то~~ так как степени в показателе в

каждый квадрат чётны

$$(abc)^2 : 2^{56} \cdot 7^{68}$$

$$abc : 2^{28} \cdot 7^{34}$$

значит  $ac$  делится на  $7^{39}$

значит  $abc$  делится

$$\text{тогда } abc : 2^{28} \cdot 7^{39}$$

и правду можно найти  $a, b, c$  чтобы

условия выполнялись

например!

$$a = 7^{20} \cdot 2^{17}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 7^{19} \cdot 2^{12}$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

9N2

~~а. а. а. а. а.~~

$\text{НОД}(a, b) = 1 \quad a \in \mathbb{N} \quad b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

макс m

когда  $\text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = m$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

~~одна из чисел a, b делится~~

~~$\frac{a+b}{a-b}$~~

~~$(a-3b+b) \mid (a+b-3b)$~~

если  $a+b$  на какой-то делитель что-то делится то  $(a+b)^2$  тоже, значит какая-то часть сократится в  $9ab$  - тоже должно делиться на этот делитель

Рассуждаем: когда  $a+b$  и  $9ab$  могут иметь общий делитель, обозначим его  $N$   
 если  $a : N$  то  $b : N$  и наоборот, ~~а значит тогда~~  
 $a+b : N$  значит какая-то часть  $a+b : N$  должна быть так что  $a : N$  и  $b : N$  но тогда  $a+b$  это  $a+b : N$  но если  $a+b$  и  $9ab$  не могут иметь общий делитель, тогда наибольший возможный общий делитель  $a+b$  и  $9ab$  это

и действительно это достигается например при  $a=5$   $b=4$   
 тогда  $\frac{9}{9^2 - 9 \cdot 4 \cdot 5}$  сокращается на 9

ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Углубленные задания 01/4 (2 часа)

$$(2): x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

условия должны выполняться одно из следующих

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} 7 - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{или} \quad \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \stackrel{\textcircled{2}}{\geq} 7 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\textcircled{1}: \frac{6 - 2\sqrt{78} - 69 + 23\sqrt{3}}{69} \leq 0$$

$$23\sqrt{3} \leq 46 \quad (\sqrt{3} < 2) \quad 46 + 6 < 69$$

тогда неравенство выполняется и

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \text{ верно}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ \frac{1}{9}, \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}, \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи 01/4

~~75x^2 - 64x - 2 = 0~~  $69x^2 - 12x - 4 = 0$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69}}{138}$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{9 + 69}}{138}$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{138}$$

~~$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{78}}{23}$~~

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\begin{cases} x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} & (1) \\ x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} & (2) \end{cases}$$

Проверим корни.

годится вариант 1. ②

11:  $x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$

~~$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} > 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$~~   ~~$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$~~

①  $\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} - 69 - 23\sqrt{3} > 0$   $\frac{6 + 2\sqrt{78}}{\sqrt{78}} < 9$   $6 + 2\sqrt{78} < 69$

неравенство не выполняется

②  $\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$   $\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} - 69 + 23\sqrt{3} \leq 0$

$23\sqrt{3} < 41,4$   ~~$23\sqrt{3} < 41,4$~~   $2\sqrt{78} < 7,8$  т.к.  $(\sqrt{78} < 9)$

$6 + 2\sqrt{78} + 23\sqrt{3} < 65,4$  неравенство выполняется  
 $x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$  корень

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



94.  $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

вычитаем:  $3x^2 - 6x + 2$

$3x^2 + 3x + 1 = Z$

$1 - 9x = t$

$\sqrt{Z+t} - \sqrt{Z} = t$

$\sqrt{Z+t} = t + \sqrt{Z}$

$Z+t = t^2 + 2t\sqrt{Z} + Z$

$t^2 + t(2\sqrt{Z} - 1) = 0$

$t(t + 2\sqrt{Z} - 1) = 0$

$t = 0$  (1)

$t = 1 - 2\sqrt{Z}$  (2)

(1)  $t=0$   $1-9x=0$   $x=\frac{1}{9}$  *проверяем этот корень*

$\sqrt{\frac{3}{81} - \frac{6}{9} + 2} - \sqrt{\frac{3}{81} + \frac{1}{3} + 1} = 0$  *равенство верно*

$\sqrt{\frac{3}{81} + 1 + \frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{3}{81} + 1 + \frac{1}{3}} = 0$  *равенство верно*

$x = \frac{1}{9}$  корень

(2) *т.е.*  $t = 1 - 2\sqrt{Z}$

$1 - 9x = 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$   $x > 0$

$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$

$75x^2 - 6x - 2 = 0$   $69x^2 - 12x - 4 = 0$

Ограничения:

$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$   
 $D > 0$

$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$   
 $x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6}$

~~$x \in (-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{1 + \sqrt{3}}{3})$~~

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6}$   
 $x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$   
 $x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x \in (-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{1 + \sqrt{3}}{3})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 ~~продолжение, 2 часть~~  
~~продолжение (2 часть)~~

~~$-a = \operatorname{tg} \beta$      $-a = \frac{1}{\sqrt{15}}$      $a = -\frac{1}{\sqrt{15}}$     первая прямая~~

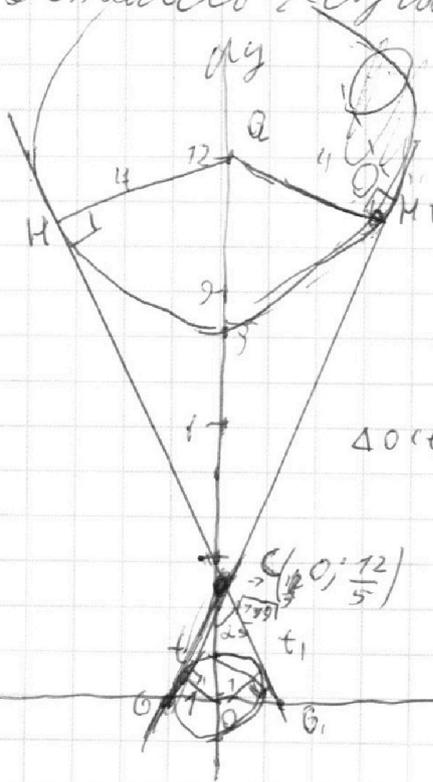
~~прямая LZ~~

ZL' одна из направляющих прямой  $y = -ax + 80$   
причем  $-a$  в ней будет равно  $\operatorname{tg} \beta$

$\operatorname{tg} \beta = \frac{16}{4}$   
 $-a = \operatorname{tg} \beta$      $-a = \frac{16}{4}$      $a = -4$

также направляющая прямой LZ её можно получить  
получив  $\operatorname{tg} \beta$  и  $\cos \beta$  в прямой  $y = -ax + 80$   
получим  $a = 4$

остаток — случай расположения прямой:



$\Delta HOC$      $\Delta t_1 OC$      $\cos \theta = \frac{4}{5}$   
 (по 2)    (по 2)

$OC = 4 \cos \theta$      $OC + CO = 12$   
 $5 \cos \theta = 12$      $\cos \theta = \frac{12}{5}$

$\Delta O C t_1$ :     $(t_1)^2 = \frac{144}{25} + 1$      $t_1 = \sqrt{\frac{179}{25}} = \frac{\sqrt{179}}{5}$

$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{5}$   
 $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{5}$   
 $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{5}$   
 $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{5}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

01/6

$$\begin{cases} ax+y-86=0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2): \begin{cases} \begin{cases} x^2+y^2-1 \geq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \leq 0 \end{cases} & (2).1 \\ \begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \geq 0 \end{cases} & (2).2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x^2+y^2 \geq 1^2 \\ x^2+(y-12)^2 \leq 4^2 \end{cases} & (2).1 \\ \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1^2 \\ x^2+(y-12)^2 \geq 4^2 \end{cases} & (2).2 \end{cases}$$

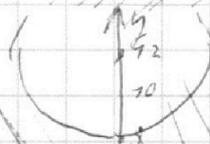
(2).1:



Решения это точки **вне** окр. (центром  $(0, 12)$ ) и  $R=4$

$ax+y-86=0$  и **внутри**

(2).2:



Решения это точки **внутри** окр. (центром  $(0, 0)$ ) и  $R=1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 Треугольник (3 балла)

~~$OB = OC$  (в силу симметрии)~~

~~$OB =$~~   $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{\sqrt{119}}$

~~$OC$~~   $\frac{5}{\sqrt{119}}$

$\frac{5(OC)}{12} = \frac{5}{\sqrt{119}}$

$OC_1 = \frac{12}{\sqrt{119}}$

$$\operatorname{tg}(\angle CO_1O) = \frac{12}{5} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$\triangle OCO_1 = \triangle OCB$  (в силу симметрии)

$$\operatorname{tg}(\angle CO_1O) = \operatorname{tg}(\angle COB) = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

прямая  $OM$ , одна из перпендикулярных прямых

$$ax + by - 36 = 0 \quad y = -ax + 36 \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\angle COB)$$

$$-a = \frac{\sqrt{119}}{5} \quad a = -\frac{\sqrt{119}}{5}$$

Найдите координаты  $O_1M$  которую можно получить  
путём скалярного произведения  $OM$  на  $OC$  в прямой, которая  
задаёт  $OM$ ,  $OM$  получили  $a = \frac{\sqrt{119}}{5}$

все и случай рассмотрели, когда можно получить  $b$ ,  
чтобы получить уравнение одной координаты

Ответ:  $a \in \left\{ -4, -\frac{\sqrt{119}}{5}, \frac{\sqrt{119}}{5}, 4 \right\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$LO_2 = LO + 73 \quad \text{Чермакин}$$

$$\sqrt{769 + 768x} = \frac{73}{2} + \frac{\sqrt{769 + 4 \cdot 768x}}{2}$$

$$\sqrt{769 + 768x} - \frac{\sqrt{769 + 4 \cdot 768x}}{2} = \frac{73}{2}$$

$$769 + 768x = \frac{769}{4} + \frac{73 \cdot \sqrt{769 + 4 \cdot 768x}}{2} + 769 + 4 \cdot 768x$$

$$= 3 + 768x$$

$$2\sqrt{769 + 768x} = 73 + \sqrt{769 + 4 \cdot 768x}$$

$$4 \cdot 769 + 4 \cdot 768x = 769 + \sqrt{769 + 4 \cdot 768x} + 2 \cdot 6 \sqrt{769 + 4 \cdot 768x}$$

$$2 \cdot 6 \sqrt{769 + 4 \cdot 768x} = 2 \cdot 769$$

$$\sqrt{769 + 4 \cdot 768x} = 73$$

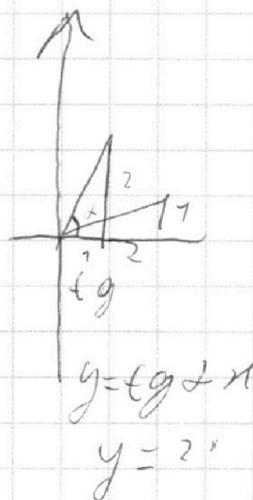
$$ax + y - 86 = 0$$

$$y = -ax + 86$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 76 \\ \times 76 \\ \hline 96 \\ 76 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$76 \cdot 76 - 76$$

$$76(75)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



МА

46

76

из центра

25

$$\frac{AC}{CB} = \frac{77}{7}$$

$$7AC = 77CB$$

$$\text{пусть } AC = 77x$$

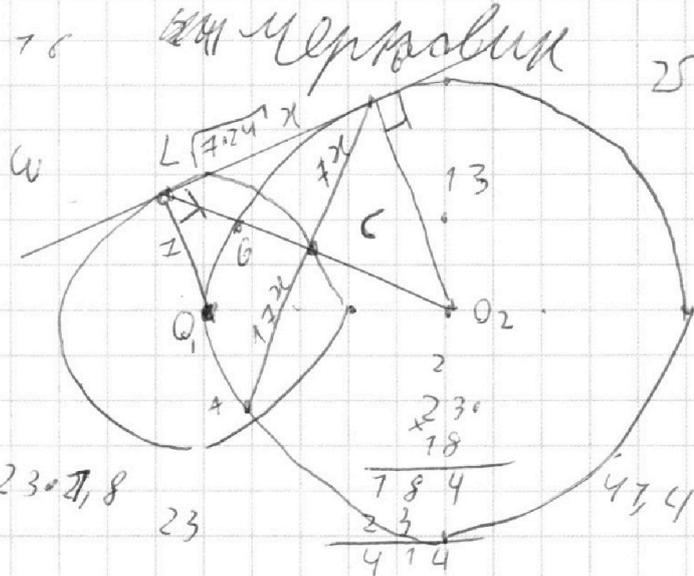
$$\text{пусть } CB = 7x$$

$$23 = 7,8$$

23

$$\frac{33}{705} \cdot 84$$

проведем другую касательную кр. LB



теореме о касательной и секущей

$$LB^2 = BC \cdot (BC + CA) \quad LB = \sqrt{7x \cdot 24x} \quad LB = 17.24x$$

проведем прямую LO2 соединим её пересеч с

кр. в точкой G по условию O2O = 13, O1L = 7

$$\Delta LO_2 \text{ по Т. Пиф. } (LO_2)^2 = (BO_2)^2 + (LB)^2$$

$$(LO_2)^2 = \sqrt{169 + 168x}$$

по Т. о секущей и касат. к кр. LG(LG + GO2) = LB^2

$$LG^2 + 13LG = 168x \quad LG = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 4 \cdot 168x}}{2}$$

$$LG = \frac{-13 + \sqrt{169 + 4 \cdot 168x}}{2} \quad \text{очевидно } \frac{-13 - 29}{2} < 0 \text{ поэтому не надо}$$

$$LG = \frac{-13 + \sqrt{169 + 4 \cdot 168x}}{2}$$

$$\sqrt{169} = 13$$

738/2  
69/3  
23/3  
23/3

78/2  
39/3  
13/3

48

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$a = 7^{19} \cdot 2^{12} \quad b = 2^5$$
$$a = 7^{20} \cdot 2^{11}$$

$$bc = 7^{10} \cdot 2^{17}$$
$$ab = 2^{16} \cdot 7^{20}$$
$$ca = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a^2 + ab} \Big| \frac{a+b}{a}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + \frac{2}{3} = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

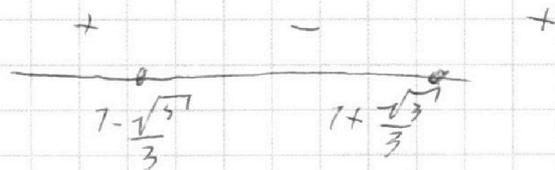
$$x = 7 \pm \sqrt{12}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{3}$$

$$x = 7 \pm 2\sqrt{3}$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$$x = 7 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Уравнение  $7AC = 17CB$

$4 + 168$   
 $29 = 8$   
 $58$   
 $AB = ?$   
 $12$   
 $2 \times 3$   
 $\times 768$   
 $+ 672$   
 $+ 169$   
 $847$

$8$   
 $29 = 8$   
 $58$   
 $vw = 1$   
 $74 = 11$   
 $7024$

$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$   
 $\sqrt{24 \cdot 7} x$   
 $13$   
 $7x$   
 $13$   
 $13$   
 $13x$   
 $13$   
 $0$

$\sqrt{21}$   
 $\times 73$   
 $\sqrt{25} = 13$   
 $2$   
 $\times 19$   
 $\times 13$   
 $57$   
 $19$   
 $2$

$LO^2 = 7x \cdot 24x$   
 $LO(LO + 13) = 24 \cdot 7x$   
 $LO^2 + 13LO - 24 \cdot 7x = 0$   
 $LO = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 28 \cdot 24x}}{2}$

$LO = 17$   
 $168 - 2$   
 $33$   
 $169 - 127 = 48$

$2$   
 $\times 24$   
 $7$   
 $768$   
 $127$

$LO = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 28 \cdot 24x}}{2}$   
 $LO^2 = 24 \cdot 7x + 13$   
 $LO = 17$   
 $168 - 2$   
 $33$   
 $169 - 127 = 48$

$8$   
 $29$   
 $\times 29$   
 $261$

$2$   
 $17^2$   
 $\times 13$   
 $51$   
 $17$   
 $221$   
 $442$   
 $731$

$26$   
 $169 - 127 = 48$   
 $26$   
 $12$   
 $12$   
 $24$   
 $12$   
 $759 +$   
 $17x$   
 $13x$   
 $17x$   
 $168 - 744 = 29$   
 $780$