



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 a, b, c - кат.

$$ab : 2^{75} \cdot 7^{77}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{78}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\min abc? \quad (abc)^2 : 2^{55} \cdot 7^{68}$$

Если квадрат делится на 2^{55} то

степень в показателе 2 должна быть **нечётной**

~~то~~ так как степени в показателе в

каждый квадрат чётны

$$(abc)^2 : 2^{56} \cdot 7^{68}$$

$$abc : 2^{28} \cdot 7^{34}$$

значит abc делится на 7^{39}

значит abc делится

$$\text{тогда } abc : 2^{28} \cdot 7^{39}$$

и правду можно найти a, b, c чтобы

условия выполнялись

например!

$$a = 7^{20} \cdot 2^{17}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 7^{19} \cdot 2^{12}$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

9/2

~~а, б ∈ N~~

$$\text{НОЧ}(a, b) = 1$$

$$a \in \mathbb{N} \quad b \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

макс m

$$\text{когда } \text{НОЧ}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = m$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

~~одно из чисел a, b делится~~

~~$\frac{a+b}{a-b}$~~

~~$(a-3b+b) / (a+b-3b)$~~

если $a+b$ на какой-то делитель что-то делится то $(a+b)^2$ тоже, значит числа чисел сократится $9ab$ - тоже должно делиться на этот делитель

выясним, когда $a+b$ и $9ab$ могут иметь общий делитель, обозначим его N если $a : N$ то $b : N$ и наоборот, ~~а значит тогда~~

$a+b : N$ значит, чтобы $a+b : N$ должно

быть так что $a : N$ и $b : N$ но тогда $a+b$ не

быть $a+b : N$ но если $a+b$ и $a+b$ не могут

иметь общий делитель, тогда найдем общий

возможной общий делитель $a+b$ и $9ab$ это

9 и действительно это возможно например при $a=5$

тогда $\frac{9}{9^2 - 9 \cdot 4 \cdot 5}$ сокращается на 9 $b=4$

ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Угрозимение зоджачи $0/4$ (2 чаша)

$$(2): x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

условия ~~должна вытмател~~ одно из следующим

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} 7 - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{или} \quad \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \stackrel{\textcircled{2}}{\geq} 7 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\textcircled{1}: \frac{6 - 2\sqrt{78} - 69 + 23\sqrt{3}}{69} \leq 0$$

$$23\sqrt{3} \leq 46 \quad (\sqrt{3} < 2) \quad 46 + 6 < 69$$

тогда неравенство выполняется

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \text{ корректно}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ \frac{1}{9}, \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}, \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи 01/4

~~75x^2 - 64x - 2 = 0~~ $69x^2 - 12x - 4 = 0$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69}}{138}$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{9 + 69}}{138}$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{138}$$

~~$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{78}}{23}$~~

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\begin{cases} x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} & (1) \\ x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} & (2) \end{cases}$$

Проверим корни.

годится вариант 1: ①

11: $x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$

~~$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} > 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$~~ $\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\textcircled{1} \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} - 69 - 23\sqrt{3} > 0 \quad \sqrt{78} < 9 \quad 6 + 2\sqrt{78} < 69$$

неравенство не выполняется

$$\textcircled{2} \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} - 69 + 23\sqrt{3} \leq 0$$

$23\sqrt{3} < 41,4$ ~~$23\sqrt{3} < 41,4$~~ $2\sqrt{78} < 18$ т.к. $(\sqrt{78} < 9)$

$6 + 2\sqrt{78} + 23\sqrt{3} < 65,4$ неравенство выполняется
 $x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$ корень

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



94. $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

вычитаем: $3x^2 - 6x + 2$

$3x^2 + 3x + 1 = Z$

$1 - 9x = t$

$\sqrt{Z+t} - \sqrt{Z} = t$

$\sqrt{Z+t} = t + \sqrt{Z}$

$Z+t = t^2 + 2t\sqrt{Z} + Z$

$t^2 + t(2\sqrt{Z} - 1) = 0$

$t(t + 2\sqrt{Z} - 1) = 0$

$t = 0$ (1)
 $t = 1 - 2\sqrt{Z}$ (2)

(1) $t=0$ $1-9x=0$ $x=\frac{1}{9}$ *не проверяем этот корень*

$\sqrt{\frac{3}{81} - \frac{6}{9} + 2} - \sqrt{\frac{3}{81} + \frac{1}{3} + 1} = 0$ *не подходит верно*

$\sqrt{\frac{3}{81} + 1 + \frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{3}{81} + 1 + \frac{1}{3}} = 0$ *подходит верно*

$x = \frac{1}{9}$ *корень*

(2) *т.е.* $t = 1 - 2\sqrt{Z}$ $1 - 9x = 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$ $x > 0$ $81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$
 $75x^2 - 6x - 2 = 0$ $69x^2 - 12x - 4 = 0$

Ограничения:

$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$
 $D > 0$

$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$
 $x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6}$

~~$x \in (-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{1 + \sqrt{3}}{3}, \infty)$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

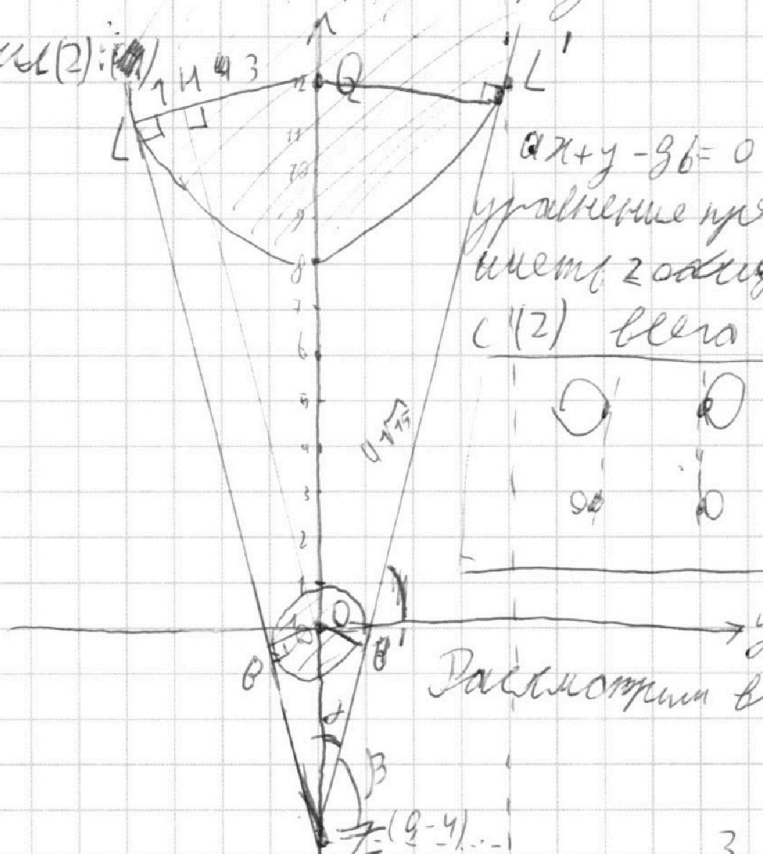


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

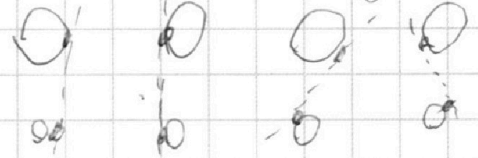
№6 Проекция Прямой

находим координаты каждой плоскости

все линии (2): $ax + y - 3z = 0$



$ax + y - 3z = 0$ это уравнение прямой имеет 2 однократных решения (2) влеса в 4 углах:



Рассмотрим все эти углы

$OQ = 12$ $LQ = 4$ $BO = 7$

$\cos(\angle OQM) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$LQ = LM + MQ$ $LQ = 1 + 3$
 $LM = BO$

$\cos(\angle OQM) = \cos(\angle ZQL) = \frac{1}{4}$

$\frac{LQ}{OZ} = \frac{1}{4}$ $16 = OZ$

у точки Z координаты (0,1,-1)

отсюда находим координаты точек L' и B' $L'Z = \sqrt{16^2 - 4^2}$

$L'Z = 4\sqrt{15}$

$L'Z = 4\sqrt{15}$

$\cos(\angle ZOL) = \frac{4}{4\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$

ZL' одна из тех координатных осей
прямой $ax + y - 3z = 0$ прямой $y = -ax + 3z - a = 19z$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

01/6

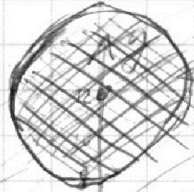
$$\begin{cases} ax+y-86=0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2): \begin{cases} \begin{cases} x^2+y^2-1 \geq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \leq 0 \end{cases} & (2).1 \\ \begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \geq 0 \end{cases} & (2).2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x^2+y^2 \geq 1^2 \\ x^2+(y-12)^2 \leq 4^2 \end{cases} & (2).1 \\ \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1^2 \\ x^2+(y-12)^2 \geq 4^2 \end{cases} & (2).2 \end{cases}$$

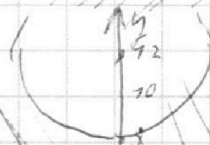
(2).1:



Решения это точки **вне** окр. (центром $(0, 12)$) и $R=4$

$ax+y-86=0$ и **пряная**

(2).2:



Решения это точки **внутри** окр. (центром $(0, 0)$) и $R=1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 Треугольник (3 балла)

~~$OB = OC$ (в силу ~~того~~ симметрии)~~

~~$OB =$~~ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{\sqrt{119}}$

~~OC~~ $\frac{5}{\sqrt{119}}$

$\frac{5(OB)}{12} = \frac{5}{\sqrt{119}}$

$OB = \frac{12}{\sqrt{119}}$

$$\operatorname{tg}(\angle COB) = \frac{12}{5} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$\triangle OCB_1 = \triangle OCB$ (в силу ~~того~~ симметрии)

$$\operatorname{tg}(\angle COB) = \operatorname{tg}(\angle COB_1) = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

прямая B_1M , одна из перпендикулярных прямых

$ax + by - 36 = 0$ $y = -ax + 36$ $\operatorname{tg} \theta = -a = \operatorname{tg}(\angle COB)$

$-a = \frac{\sqrt{119}}{5}$ $a = -\frac{\sqrt{119}}{5}$

Итак же найдём B_1M которую можно получить
путём домножения ~~на~~ на -1 в прямой, которая
задаёт BM , ~~тогда~~ получим $a = \frac{\sqrt{119}}{5}$

то же все и другая рассмотрена, когда ~~мы~~ $a = \frac{\sqrt{119}}{5}$,
чтобы получить уравнение ~~одной~~ перпендикулярной

Ответ: $a \in \left\{ -4, -\frac{\sqrt{119}}{5}, \frac{\sqrt{119}}{5}, 4 \right\}$

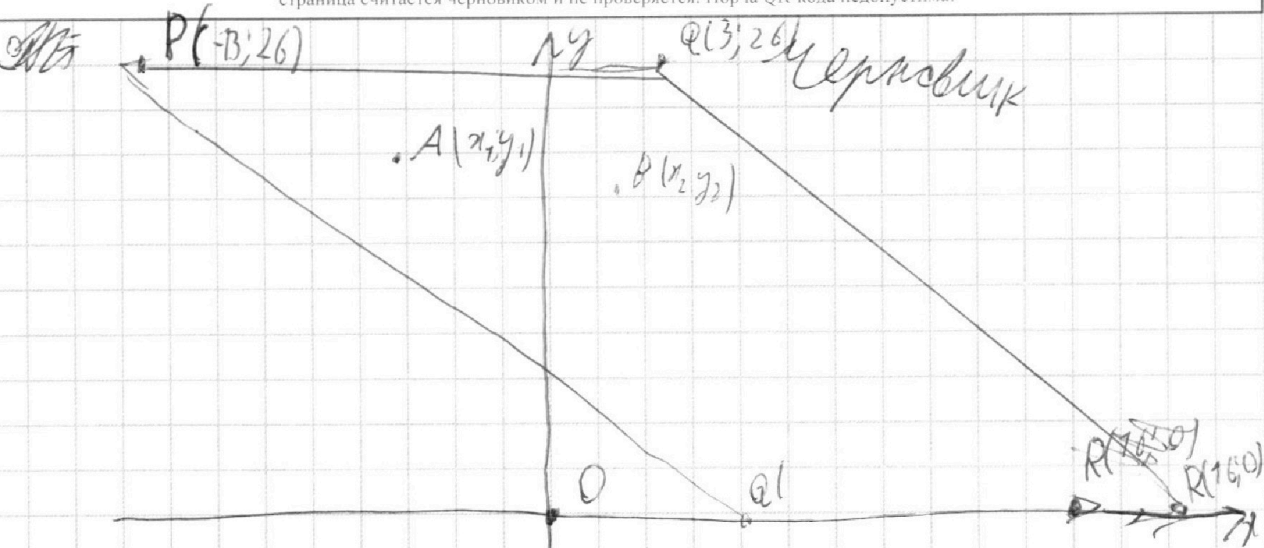
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



какие координаты $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$
целые координаты.

$$\text{что } 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 74$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 74$$

$$\Rightarrow x_2 + y_2 + \dots = 74 + x_1 + y_1 + \dots$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$LO_2 = LO + T_3 \quad \text{Чермакин}$$

$$\sqrt{769 + 768x} = \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{769 + 4 \cdot 768x}}{2}$$

$$\sqrt{769 + 768x} - \frac{\sqrt{769 + 4 \cdot 768x}}{2} = \frac{13}{2}$$

$$769 + 768x = \frac{769}{4} + \frac{13 \cdot \sqrt{769 + 4 \cdot 768x}}{2} + 769 + 4 \cdot 768x$$

$$= 3 + 768x$$

$$2\sqrt{769 + 768x} = 13 + \sqrt{769 + 4 \cdot 768x}$$

$$4 \cdot 769 + 4 \cdot 768x = 769 + \sqrt{769 + 4 \cdot 768x} + 2 \cdot 6 \sqrt{769 + 4 \cdot 768x}$$

$$2 \cdot 6 \sqrt{769 + 4 \cdot 768x} = 2 \cdot 769$$

$$\sqrt{769 + 4 \cdot 768x} = 769$$

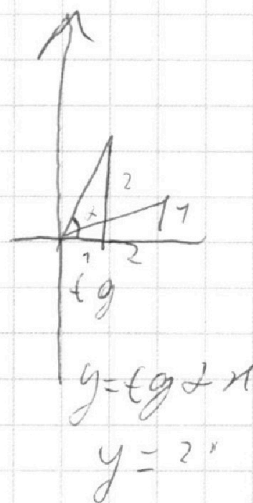
$$ax + y - 86 = 0$$

$$y = -ax + 86$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 76 \\ \times 76 \\ \hline 96 \\ 76 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$76 \cdot 76 - 76$$

$$76(75)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$a = 7^{19} \cdot 2^{12} \quad b = 2^5$$
$$a = 7^{20} \cdot 2^{11}$$

$$bc = 7^{10} \cdot 2^{17}$$
$$ab = 2^{16} \cdot 7^{20}$$
$$ca = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2$$

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a^2 + ab} \Big| \frac{a+b}{a}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + \frac{2}{3} = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$x = 7 \pm \sqrt{12}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{9 - 12}$$

$$x = 7 \pm 2\sqrt{3}$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$$x = 7 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{array}{c} + \qquad \qquad - \qquad \qquad + \\ \hline 7 - \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \qquad 7 + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Уравнение $7AC = 17CB$

$4 + 168$ $29 = 8$ $AC = \frac{17}{7} CB$

9 58 W L $\sqrt{24 \cdot 7} x$ θ $\sqrt{21}$ $\frac{21}{73}$

$AB = ?$ $vw = 1$ 7 6 13 13 $\sqrt{25} = 13$

12 2 $7 + 4 = 11$ 7024

$$\begin{array}{r} 293 \\ \times 768 \\ \hline 1816 \\ + 17568 \\ \hline 224304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 77 \\ \times 77 \\ \hline 529 \\ + 5290 \\ \hline 5963 \end{array}$$

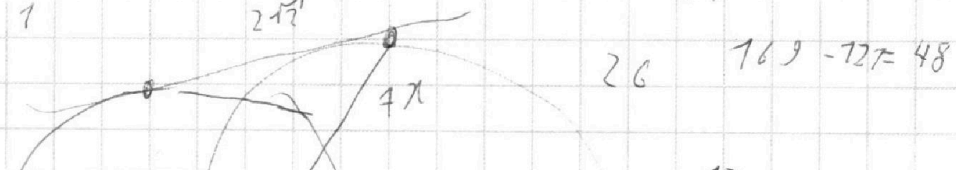
$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 7 \\ \hline 168 \\ + 1680 \\ \hline 1704 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 768 \\ \hline 1536 \\ + 15360 \\ + 153600 \\ \hline 184320 \end{array}$$

$LO^2 = 7x \cdot 24x$ 2
 $LO(LO + 13) = 24 \cdot 7x$ $\times 24$
 $LO^2 + 13LO - 24 \cdot 7x = 0$ $LO = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 28 \cdot 24x}}{2}$ $\frac{17}{7}$ $\frac{17}{127}$

$LO = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 28 \cdot 24x}}{2}$ $LO = LO = 17$

8 29 $LO^2 = 24 \cdot 7x + 13$ $168 - 2$
 $\times 29$ 261 247 33



2 12 $759 +$ $\frac{12}{12}$ 24 12
 17^2 12 $769 +$ 24 12
 $\times 13$ 12 $769 - 744 = 25$
 51 12 $17x$
 17 24 780
 221 12 $13x$
 442 $17x$

$(13^2 + 40x) = 769 +$
 $26 \cdot 30$