МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть x_1 – максимальная степень двойки, на которую делится a, x_2 – максимальная степень двойки, на которую делится b, x_3 – максимальная степень двойки, на которую делится c.
$x_1, x_2, x_3 \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 14 \\ x_2 + x_3 \geq 17 \\ x_1 + x_3 \geq 20 \end{cases}$$

Сложив все три системы мы получим $x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{51}{2}$
т.к. x_1, x_2, x_3 – целые неотриц., то $x_1 + x_2 + x_3 \geq 26$

Заметим, что $x_1 = 9$, $x_2 = 5$, $x_3 = 12$ нам подходят.
Т.к нам необходимо минимизировать abc, то нам нужно сделать $x_1 + x_2 + x_3$ минимально возможным. Т.к $9+5+12 = 26$, а по следствию из системы мы получили $x_1 + x_2 + x_3 \geq 26$, то мы нашли минимум $x_1 + x_2 + x_3$.
~~Пусть y_1 – максимальная степень двойки~~
Введём аналогичные обозначения y_1, y_2, y_3, только для степени семи.

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 10 \\ y_2 + y_3 \geq 17 \\ y_3 + y_1 \geq 37 \end{cases}$$

Из третьего ур-я системы следует $y_1 + y_2 + y_3 \geq 37$
~~При~~ $y_3 = 17$; $y_2 = 0$, $y_1 = 20$ – решение системы
~~y_1~~ $17 + 20 + 0 = 37$.

$$\begin{cases} abc \,⋮\, 2^{26} \\ abc \,⋮\, 7^{37} \end{cases} \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$$

"=" достигается при $a = 2^9 \cdot 7^{20}$; $b = 2^5 \cdot$ ~~7~~; $c = 2^{12} \cdot 7^{17}$

Ответ: $2^{26} \cdot 3^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} \quad a,b \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

Пусть мы можем сократить дробь на какое-то K, тогда

$$\begin{cases} a+b \,\vdots\, K \\ (a+b)^2-8ab \,\vdots\, K \end{cases}$$

$$(a+b) \,\vdots\, K \Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2 \,\vdots\, K \\ (a+b)^2-8ab \,\vdots\, K \end{cases} \Rightarrow 8ab \,\vdots\, K$$

Если $\frac{a}{b}$ – несократимая дробь, то

$$\text{НОД}(a,b)=1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \text{НОД}(a+b,b)=1 \\ \text{НОД}(a,a+b)=1 \\ a+b \,\vdots\, K \\ 8ab \,\vdots\, K \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$8 \,\vdots\, K$

$K \le 8$

Приведём пример, когда достигается $K=8$

$a=3$; $b=5$

$$\frac{3+5}{8^2-8\cdot 15} = \frac{8}{8^2-8\cdot 15} = \frac{1}{1-15} = \frac{1}{14}$$

Ответ: 8

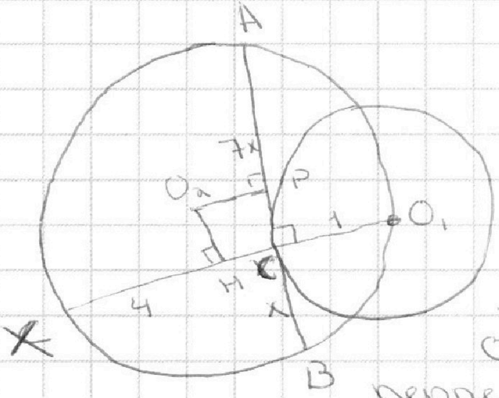
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3



Пусть X – точка касания AB и окр ω

Продлим прямую O_1C за точку C до пересечения с Ω в точке X

Пусть O_1 – центр ω, O_2 – цетр Ω

Опустим перпендикуляр из O_2 на хорду XO_1, и на хорду AB, обозначим основания перпендикуляров за H и P соответственно

$\cancel{\frac{AC}{CB}}$ $\cancel{\frac{OC}{XC}}$ по св-ву пересекающихся хорд $\frac{AC}{CB} = \frac{XC}{O_1C}$

$XC = 7O_1C = 7$

$HX = HO_1 = \frac{O_1X}{2} = 4$ $HC = HO_1 - O_1C = 3$

Заметим, что O_2HCP – прямоугольник

$O_2P = HC = 3$

$O_2X = 5$, т.к. O_2X – радиус

$O_2H = \sqrt{O_2X^2 - XH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$PC = O_2H = 3$

Пусть $CB = y$

$PA = \frac{AB}{2} = 4y$

$PC = 7y - 4y = 3y = 3$

$y = 1$

$8y = 8$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$$

$$\frac{\left(\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x-1}\right)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)}{\sqrt{2x^2+5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}=2-7x$$

$$\sqrt{2x^2+5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\geq 0$$

$$\frac{2x^2-5x+3-2x^2-2x-1}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}=2-7x$$

$$\frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}=2-7x$$

$$(2-7x)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}-1\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-7x=0\\2x^2-5x+3\geq 0\\2x^2+2x+1\geq 0\end{cases}\\ \\ \sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\cancel{\geq}=1\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{7}{2}\\ \\ \sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1\quad(1)\end{array}\right.$$

(1) При $x>0$ $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\geq$

$\geq\sqrt{2x^2+2x+1}>1$

При $x<0$ $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\leq$

$\leq\sqrt{2x^2-5x+3}\leq\sqrt{3}$

~~Пр~~ $x=0$ – не подходит

Ответ: $\frac{7}{2}$

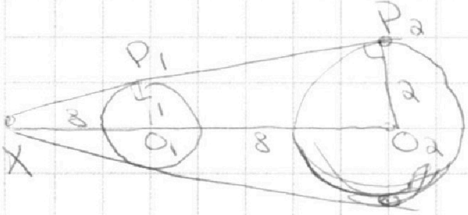
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

Рассмотрим II случай касания



$\triangle P_1O_1X \sim \triangle P_2O_2X$

$$\frac{O_1X}{O_2X} = \frac{P_1O_1}{P_2O_2} = \frac{1}{2}$$

$$2O_1X = O_2X$$

$$O_2X - O_1X = O_1O_2 = 8$$

$$O_2X - O_1X = O_1X = 8$$

X имеет координаты $(-16; 0)$

$XP_1 = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$ по т. Пифагора для $\triangle XP_1O_1$

Пусть P_1 имеет координаты $(x; y)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x+16)^2 + y^2 = 63 \end{cases}$$

$$32x + 256 = 63 - 4$$

$$32x = -197$$

$$x = -\frac{197}{32}$$

$$y = \pm\sqrt{4 - \frac{197^2}{32^2}} = 232$$

~~10~~
~~256~~
~~63~~
193
4
197

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ (x+16)^2 + y^2 = 63 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 6 (продолжение)

Вычтем из первого ур-я второе

$$16x + 256 - 64 = 62$$

$$16x = -130$$

$$x = -\frac{65}{8}$$

$$y = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \pm\sqrt{\frac{63}{64}} = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$$

Тогда тангенс угла наклона $a = \pm\frac{\sqrt{63}}{16 \cdot 8 - 65} =$

$$= \pm\frac{\sqrt{63}}{63} = \pm\frac{1}{\sqrt{63}}$$

Ответ: $\pm\frac{9\sqrt{5}}{95}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{63}}$

№6 (продолжение)

Пусть A имеет координаты $(x; y)$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 & (1) \\ \left(x+\frac{16}{3}\right)^2+y^2=\frac{160}{9} & (2) \end{cases}$$

$(2)-(1)$: $2\cdot\frac{16}{3}x+\frac{256}{9}=\frac{160}{9}-4$

$$\frac{32}{3}x=\frac{160-36-256}{9}$$

$$\frac{32}{3}x=-\frac{132}{9}$$

$$32x=-\frac{132}{3}$$

$$x=-\frac{33}{24}=-\frac{11}{8}$$

$$-\begin{array}{r}256\\160\\\hline 96\end{array} \qquad +\begin{array}{r}96\\36\\\hline 132\end{array} \qquad 132:4=33$$

$\cancel{y=\pm\sqrt{4-\frac{33^2}{8^2}}}$

$$y=\pm\sqrt{4-\frac{33^2}{24^2}}=\pm\sqrt{\frac{(2\cdot24-33)(2\cdot24+33)}{24^2}}= \qquad +\begin{array}{r}48\\33\\\hline 81\end{array}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{15\cdot81}{24^2}}=\pm\sqrt{\frac{45}{64}}=\pm\frac{3}{8}\sqrt5$$

Коэффициент b в уравнении $y=ax-10b$ отвечает за сдвиг прямой.

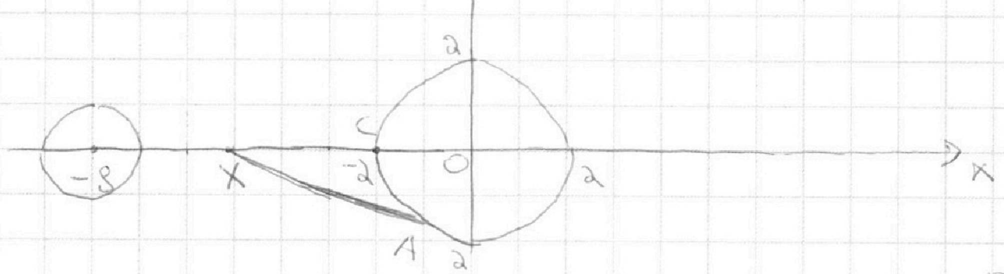
Получается, чтобы прямая касалась окружностей угловой коэффициент (a)

$$a=\pm\frac{\frac{3}{8}\sqrt5}{\left(\frac{16}{3}-\frac{11}{8}\right)}=\pm\frac{9\sqrt5}{128-33}=\pm\frac{9\sqrt5}{95}$$

N6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \quad (1) \\ \left((x+8)^2 + y^2 - 1\right)(x^2+y^2-4) \le 0 \quad (2) \end{cases}$$

Решением второго неравенства являются два круга с центрами в точках $(0;0)$ и $(-8;0)$ и радиусами 2 и 1 соответственно.



Т.к. по условию должно быть только два решения, то прямая (1) должна касаться этих окружностей.
Прямая может касаться окружностей двумя способами

В I случае $\triangle O_1P_1X \sim \triangle O_2P_2X$ по двум углам $\Rightarrow \dfrac{O_1X}{XO_2} = \dfrac{O_1P_1}{O_2P_2}$

В нашем случае у X будет координата $\left(-\frac{16}{3}; 0\right)$

Пусть XA касается окр $x^2+y^2=4$

$XC = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$ $\quad XA^2 = XC \cdot XO = \frac{10}{3} \cdot \frac{16}{3} = \frac{160}{9}$

$XA = \frac{4}{3}\sqrt{10}$

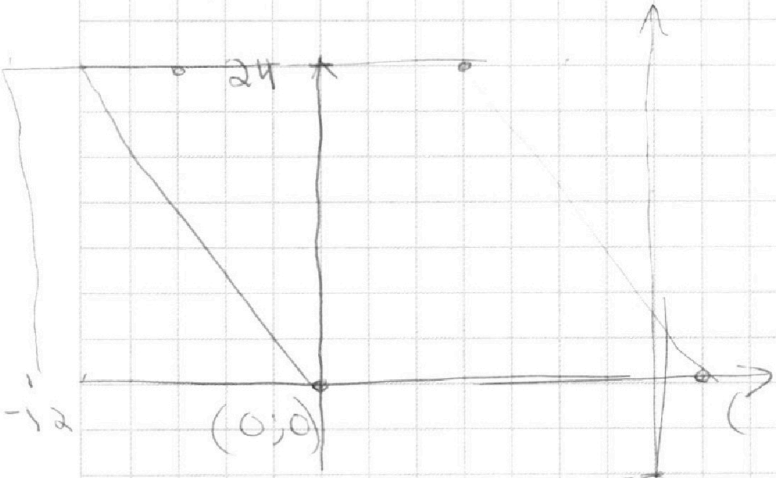
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \le 0 \end{cases}$$



$(x+8)^2 + y^2 = \cancel{4}$

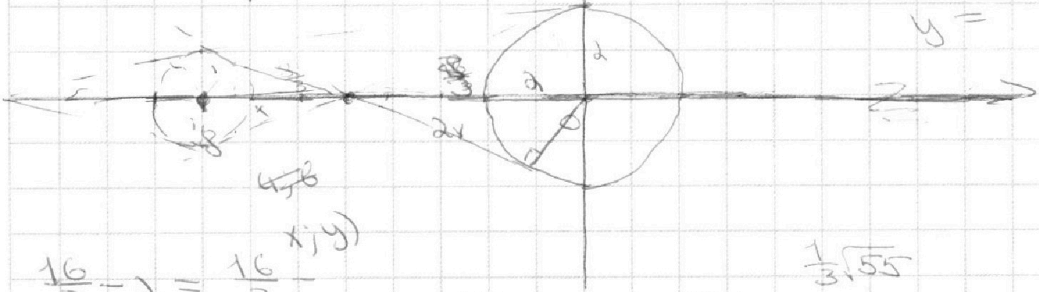
$x^2 + y^2 - 4 = 0$

$x^2 + y^2 = 4$

$y = ax + 10b$

$y = a(x-8)$ ⊥

$y =$



$\frac{16}{3} - 2 = \frac{16}{3} -$

$\frac{10}{3}$

$\frac{64}{9} - 1 = \frac{55}{9} =$ $\frac{1}{3}\sqrt{55}$

$(x+8)^2 + y^2 = 1$

$(x + \frac{16}{3})^2 + y^2 = \frac{55}{3}$

$16x + 64 - \frac{32}{3}x + \frac{256}{9} = \frac{52}{3}$

$-\frac{16x}{3} = 64 + \frac{256}{9} + \frac{52}{3}$

$2(x_2 - x_1)$
$+ (y_2 - y_1) = 12$

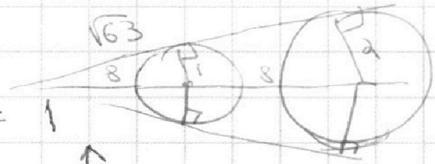
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

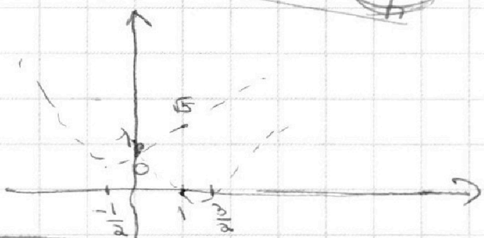
МФТИ

$\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$



$\sqrt{2(x-1)(x-\frac{3}{2})}+\sqrt{2(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}=1$

$t=x-1$



$\sqrt{2t(t-\frac{1}{2})}+\sqrt{2(t+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}$

$-(4x^2+3x+3)=2\sqrt{2x^2-5x+3}\sqrt{2x^2+2x+1}$

$D=9-$

$\sqrt{2(t+\frac{1}{4})(t-\frac{1}{4})}$

$2x^2-5x+3$

$x<0$

$2t^2-\frac{1}{8}$

$2x^2-5x+3\geq 3$

$\frac{49}{2}-$

$\begin{array}{r}-128\\33\\\hline 95\end{array}$

$\sqrt{2x^2-5x+3}\geq\sqrt{3}>1$

$2x^2-5x$

a, b, c

$a: 7^{\beta_1}$ $\quad \beta_1+\beta_2\geq 10$

$ab: 2^{14}7^{10}$

$b: 7^{\beta_2}$ $\quad \beta_2+\beta_3\geq 17$

$a^2b^2c^2: 2^{51}7^{54}$

$c: 7^{\beta_3}$ $\quad \beta_1+\beta_3\geq 37$

95

76

$a: 2^{\alpha_1}$ $\quad \alpha_1+\alpha_2\geq 14$

$\beta_1+\beta_2+\beta_3\geq 32$

$b: 2^{\alpha_2}$ $\quad \alpha_2+\alpha_3\geq 17$

$\beta_1+\beta_3\geq 37$

$\beta_2=20$ $\quad c: 2^{\alpha_3}$ $\quad \alpha_1+\alpha_3\geq 20$

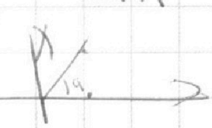
$\beta_1=17$

$2^{26}\cdot 7^{37}$

$\alpha_1+\alpha_2$

$y=ax$

$\alpha_1+\alpha_3+2\alpha_2\geq 21$



$2\alpha_2\geq 1$

$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_2\geq\frac{51}{2}$

$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_2\geq 26$

$\alpha_2\geq 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$(2-7x)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2-5x+3}}-1\right)=0$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ НОД$(a;b)=1$

$\vdots\, d$ $8ab \vdots d$

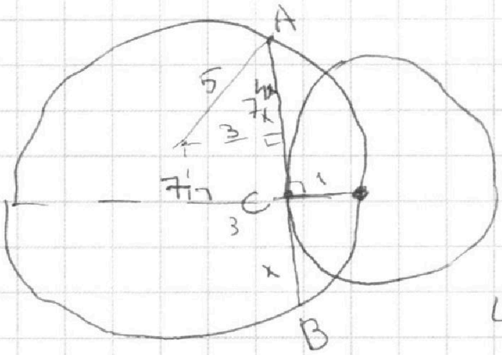
$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$ $8 \vdots d$

$D=25-24=1$ $D=4-8$

$x=\frac{5\pm1}{4}=\frac{3}{2};1$ $D<0$ $2-5x=2x$

$\sqrt{2(x-1)(x-\frac{3}{2})}-$

$\frac{3+5}{(3+5)^2-8\cdot3\cdot5}=\frac{8}{8^2-120}=\frac{1}{8-15}=-\frac{1}{17}$



$2x^2-5x+\cancel{3}+2x^2+2x+\cancel{1}+$

$+2\sqrt{2x^2-5x+3}\sqrt{2x^2+2x+1}=49x^2-28x+4$

$4x^2-3x+2\sqrt{\ }\sqrt{\ }=49x^2-28x$

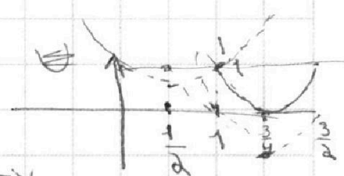
$45x^2-25x=2\sqrt{\ }\sqrt{\ }$

8

$5x(9x-5)$

$2(x-1)(x-\frac{3}{2})\ge 0$

$x\in(-\infty;1)\cup(\frac{3}{2};+\infty)$



$\underbrace{(2x^2-5x+3)}_{A}-\underbrace{(2x^2+2x+1)}_{B}=2-7x$

$2x^2+2x+1=$
$=2(x^2+x+\frac{1}{4})+$

$A-B=(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})=2-7x$ $2(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$

$\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$

$4x^2+3x+3+2\sqrt{2x^2-5x+3}\sqrt{2x^2+2x+1}=0$