



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформить **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



МФТИ

$$y = a + 10b \quad BC = R \sin \alpha$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = R$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 - \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$2 - 2x = (2 - 2x) (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$-2x + 2$$

$$D = 25 - 82u = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

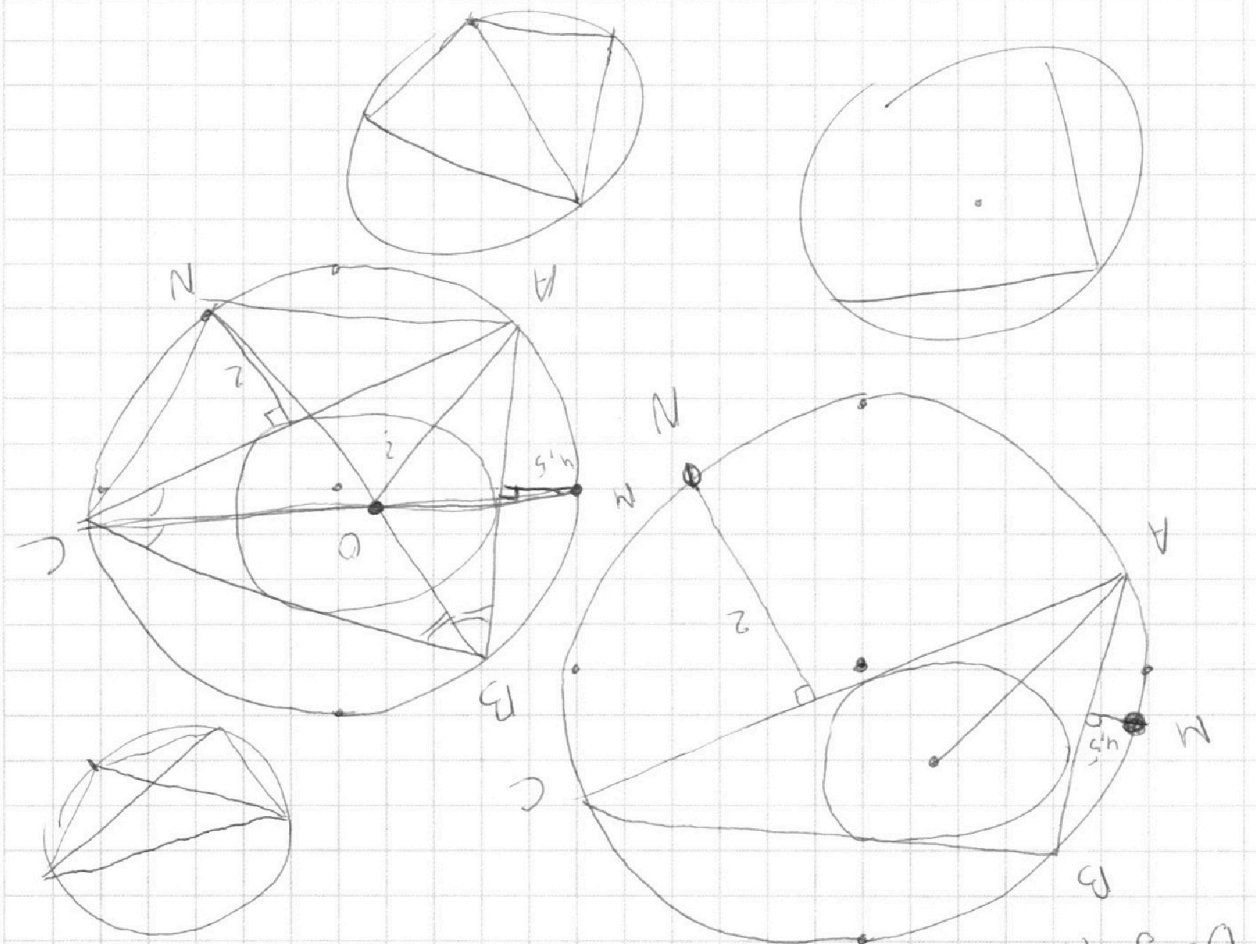
$$\frac{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}}{2 - 2x}$$

$$D = 9 - 12 - 4 = -7$$

$$x = \frac{2}{3}$$

0993

$$D = 1 - 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



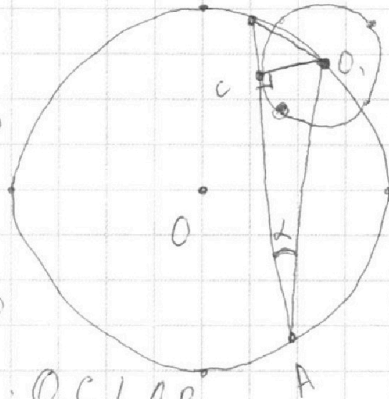
№3 Дано: $AC:CB = 7:1$; $r_\omega = 1$, $r_\Omega = 5$ $AB = ?$

Решение:

1) Пусть O - центр Ω , а O_1 - центр окружности ω ;

AB - касательная ω в точке C , то по

теореме о радиусе и касательной: $O_1C \perp AB$



2) Рассмотрим $\triangle ABO_1$: он вписан в Ω , то по теореме о хордах

длины хорд AB : $\frac{O_1B}{\sin \angle BAO_1} = 2r_\Omega = 10$, где $\angle BAO_1 = \alpha$, то т.к.

$\triangle AOC$ - н/уг ($O_1C \perp AB$), то $\sin \alpha = \sin \angle BAO_1 = \frac{CO_1}{AO_1} = \frac{1}{AO_1}$,

то $\frac{O_1B}{\sin \angle BAO_1} = O_1B \cdot AO_1 = 2r_\Omega = 10 \Rightarrow \underline{O_1B \cdot AO_1 = 10}$

3) Рассмотрим н/уг $\triangle AOC$ и н/уг $\triangle BOC$. По теореме Пифагора:

$$AO_1^2 = CO_1^2 + AC^2 = 1 + AC^2 \quad (1) \quad AC:CB = 7:1, \quad AC = 7BC$$

$$BO_1^2 = O_1C^2 + BC^2 = 1 + BC^2 \quad (2) \quad \underline{\text{Дуга } BC \text{ а, то } AC = 7BC}$$

Умножим (1) на (2): $AO_1^2 \cdot BO_1^2 = (49BC^2 + 1)(BC^2 + 1)$, или:

$$100 = 49BC^4 + 49BC^2 + BC^2 + 1 \quad 4) \underline{r_\omega}: BC^2 = \frac{-25 \pm 49}{49} = 1 \quad (BC = -1, \text{ не$$

$$49BC^4 + 50BC^2 - 99 = 0 \quad (\text{находим корни уравнения}) \quad \underline{BC = 1}$$

$$D = 25 + 99 \cdot 49 = 625 + 4851 = 5476 \quad \text{то } \underline{AB = 8BC = 8}$$

$$BC^2 = \frac{-25 \pm \sqrt{5476}}{49}, \quad (BC^2 = \frac{-25 - \sqrt{5476}}{49} \text{ не подходит по} \\ \text{смыслу задачи})$$

Ответ: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



54) $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$; • Умно: $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$

1) $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

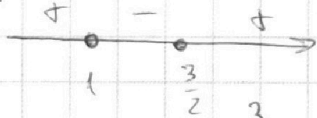
2) $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$

$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

$(x-1)(x-\frac{3}{2}) \cdot 2 \geq 0$

$D < 0, a > 0, \Rightarrow$

• $4x^2 - 3x + 3 \leq 0$



$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$(D < 0, a > 0), x \in \emptyset$

$x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$ *

3) Домножим на сопряженное: $\frac{(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}}$

$= 2 - 7x$;

Умно: $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$

$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$

$2 - 7x = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$

При $x = \frac{2}{7}$, $0 = 0$ (Верно)

При $x \neq \frac{2}{7}$, сократим на $(2 - 7x)$: $1 = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

4) Обе части ≥ 0 , то возведем в квадрат:

$1 = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

$1 = 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$

$1 = 4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$

$-4x^2 + 3x - 3 = 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$

$$\begin{cases} -4x^2 + 3x - 3 \geq 0 \\ 4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = (-4x^2 + 3x - 3)^2 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6
$$\begin{cases} y = ax + 10b & (1) \\ ((x+8)^2 + (y^2) - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

1) $y = ax + 10b$ — уравнение прямой

2) $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 & (2.1) \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$

2.1) $(x+8)^2 + y^2 \geq 1 \Leftrightarrow (x+8)^2 + y^2 = 1$ —

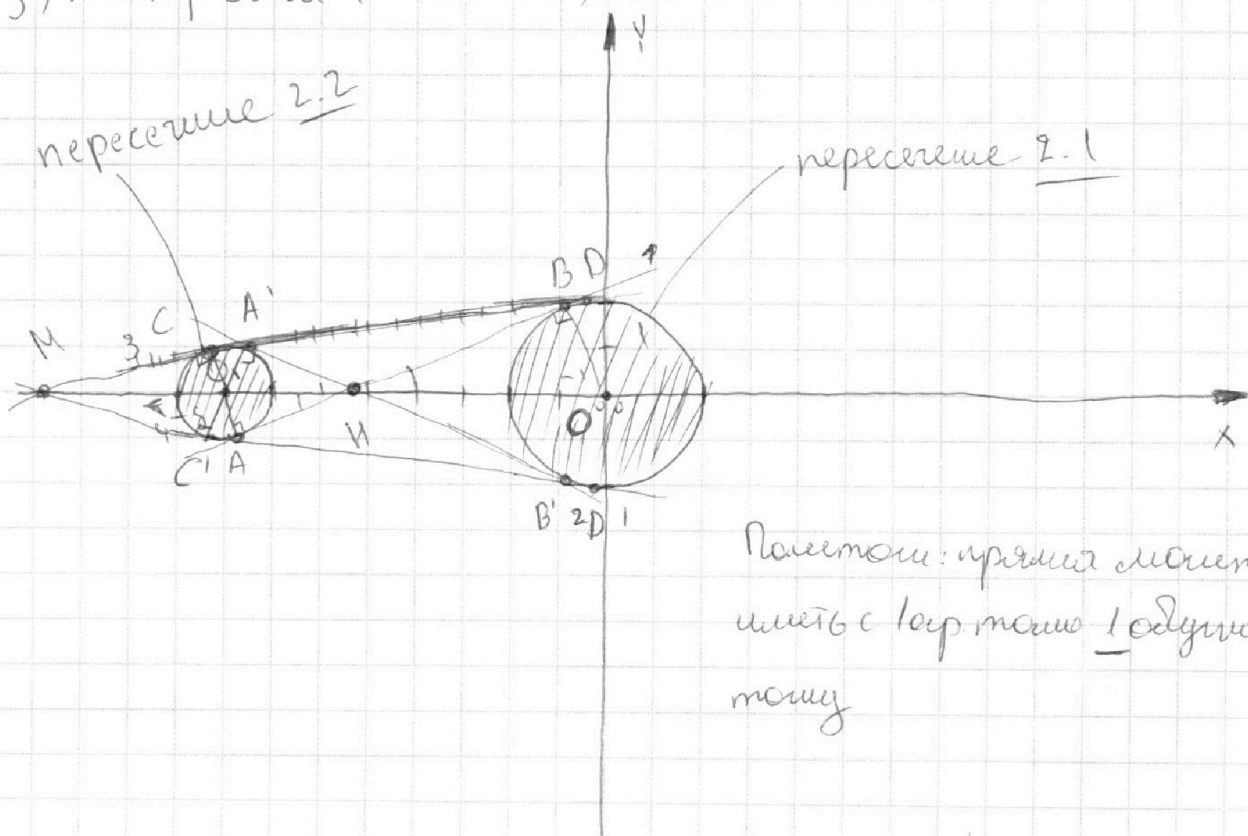
уравнение окружности с центром $(-8, 0)$

и радиусом 1

$x^2 + y^2 = 4$ — уравнение окружности с центром $(0, 0)$ и радиусом 2

2.2) То же самое

3) Построим (2.1) и (2.2) в ДПСи $xO'y$:



Помимо: прямой может
иметь с окружностью одну
точку

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№0 (продолжение)

т.е. ~~будет~~ ^{система} будут иметь решения в том случае, если прямая

$y = ax + b$ будет проходить \neq 2 точки данных окружностей

4) Расшифруем неизвестную \perp : $\Delta O_1 B \sim \Delta O_2 A$ (по 2 углам)

$$\text{то: } \frac{O_1 A}{O_1 B} = \frac{O_2 A}{O_2 B} = \frac{1}{2} \text{ (по условию)} \Rightarrow \begin{cases} O_1 B = 2O_1 A \\ O_1 B + O_2 A = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O_1 B = 2O_1 A \\ 3O_1 A = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} O_1 B = 20,4 \\ O_1 A = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O_2 B = \frac{16}{3} \\ O_2 A = \frac{8}{3} \end{cases}, \text{ то } \Delta O_1 B \text{ и } \Delta O_2 A \text{ - равнобедренные}$$

то по м. Пифагора: $AB = \sqrt{\frac{259}{9} - 4}$

$$= \sqrt{\frac{259 - 36}{9}} = \sqrt{\frac{223}{9}} = \frac{2\sqrt{55}}{3}; \quad AA = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \sqrt{\frac{55}{9}} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

Пусть $B(x_B; y_B)$, то: $\begin{cases} (x_B)^2 + y_B^2 = 4 & (1) \\ \frac{220}{9} = (x_B + \frac{16}{3})^2 + y_B^2 & (2) \end{cases}$

Вычтем из (1) - (2):

$$\cancel{x_B^2} + \cancel{y_B^2} - \cancel{x_B^2} - \frac{32}{3}x_B - \frac{256}{9} + y_B^2 = 4 - \frac{220}{9}$$

$$\frac{32}{3}x_B - \frac{256}{9} = 4 - \frac{220}{9}$$

$$\frac{32}{3}x_B = \frac{259 + 36 - 220}{9} = \frac{75}{9} = 25$$

$$\Rightarrow x_B = \frac{25}{32}; \quad \text{то: } y_B^2 = 4 - \frac{625}{1024} \Rightarrow y_B = \frac{\sqrt{3481}}{32}$$

5) Пусть $A(x_A; y_A)$

$$\begin{cases} (x_A + 8)^2 + y_A^2 = 1 \\ (x_A - \frac{16}{3})^2 + y_A^2 = \frac{55}{9} \end{cases}$$

Вычтем: $-\frac{32}{3}x_A + \frac{256}{9} -$

$$-16x_A = \frac{55}{9} - 1$$

$$\frac{32}{3}x_A + 16x_A = \frac{259}{9} - \frac{55}{9} + 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y_1 = 1 - \left(\frac{21}{10}x + 8\right)^2$$

$$y_2 = \frac{(32+48)x + 204+9}{3} = \frac{213}{3}$$

$$10(x+8) = \frac{213}{3} \Rightarrow x_A = \frac{71}{30}$$

$$x_A = \frac{71}{30}, y_A = 1 - \left(\frac{71 \cdot 80}{30}\right)^2$$

6) Точки A и A' будут иметь одинаковые координаты по x и противоположные по y, симметричные относительно B и B'

$$B\left(\frac{25}{32}; \frac{\sqrt{3431}}{32}\right); B'\left(\frac{25}{32}; -\frac{\sqrt{3431}}{32}\right)$$

Затем мы просто подставляем координаты в $y = ax + b$ и находим a и b

7) Длинна стороны BC и $C'D$, $MO, C \sim \Delta MCD$

$$\Rightarrow \frac{MO_1}{MO} = \frac{1}{2}, \text{ где } MO_1 = MF + 1$$

$$MO = MF + 9$$

$$(MF + 1)^2 = MF + 9$$

$$\Delta MOC - \text{изр} \Rightarrow MC = \sqrt{64 - 1}$$

$$2MF + 2 = MF + 9$$

$$MF = 7, \text{ то } M(-16; 0) = \sqrt{63}; \text{ то } MD = 2\sqrt{63}$$

$$\Rightarrow MC = CD = 2\sqrt{63}$$

Для точки C:

$$\begin{cases} (x_C + 16)^2 + y_C^2 = 63 \\ (x_C)^2 + y_C^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_D + 16)^2 + y_D^2 = 4 \cdot 63 \\ (x_D)^2 + y_D^2 = 4 \end{cases}$$

Итого координаты точек C и D найти подставляем в уравнение $y = ax + b$ и находим a и b — получим уравнение a

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

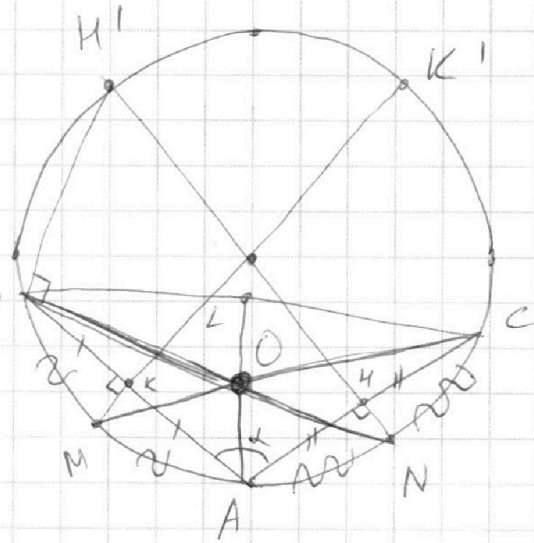
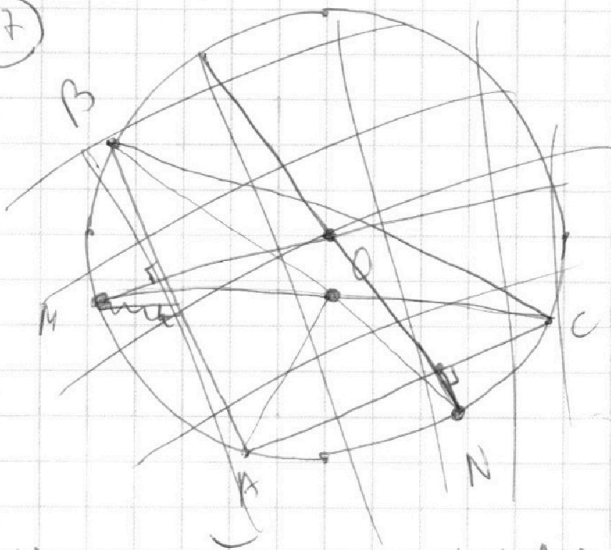
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



27



1) N -серуши AC , т.е. $NK \perp AC$, то по теореме N -серуши AC автоматически N -серуши AB ; CM -биссектриса $\angle C$ (т.е. M -серуши AB) автоматически BN -биссектриса $\angle B$, то $\angle CM \cap BN = O$, O -центр вкл. окруж., т.е. AO -?

2) $NK \cap AC = K$, то $NK \cdot KK' = AK \cdot KC$, $2 \cdot (2R - 2) = \left(\frac{1}{2} AC\right)^2$
 $4R - 4 = \frac{AC^2}{4}$; $16R - 16 = AC^2$, то: $AC = 4\sqrt{R - 1}$;

Аналогично: $4,5 \cdot (2R - 4,5) = \left(\frac{1}{2} AB\right)^2$

$$9R - \frac{81}{4} = \frac{AB^2}{4}$$

$$36R - 81 = AB^2 \Rightarrow AB = 3\sqrt{4R - 9}$$

3) $AO = \frac{2}{3} AL$, где AL -биссектриса $\angle A$; пусть $\angle A = \alpha$, то по т. косинусов:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{36R - 81 + 16R - 16 - BC^2}{2 \cdot 4\sqrt{R-1} \cdot 3\sqrt{4R-9}}$$

$$\sqrt{0}: AL = \frac{2AC \cdot BA \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{a + b} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1) $ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$, $bc: 2^{12} \cdot 7^{17}$, $ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$; a, b, c — числа? — ?

Решение:

$$\frac{a+b}{(a-b)^2 - 4ab}$$

1) Если a, b, c — простые, то a, b, c — числа = $2^{14} \cdot 7^{10}$ (1)

2) Попробуем (2) и (3):

bc — числа = $2^{17} \cdot 7^{17}$ (2)

ac — числа = $2^{20} \cdot 7^{37}$ (3)

$$\frac{bc}{ac} = \frac{2^{17} \cdot 7^{17}}{2^{20} \cdot 7^{37}} = \frac{1}{2^3 \cdot 7^{20}}$$

то: $b = \frac{a}{2^3 \cdot 7^{20}} \Rightarrow a = 2^3 \cdot 7^{20} \cdot b$ то: $ab = 2^{14} \cdot 7^{10} = b \cdot 2^3 \cdot 7^{20}$

$b^2 = \frac{2^{11}}{7^{10}}$

$ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$

$c = \frac{2^9 \cdot 30 \cdot 2^3 \cdot 7^3}{1 \cdot 2^{12} \cdot 7^{32}}$

$bc = m \cdot 2^{12} \cdot 7^{17}$

$\frac{a}{c} = \frac{k \cdot 7}{m \cdot 2^3 \cdot 7^7} \Rightarrow c = \frac{a \cdot m}{k} \cdot 2^3 \cdot 7^7$

$ac = p \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$

$ac = p \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$

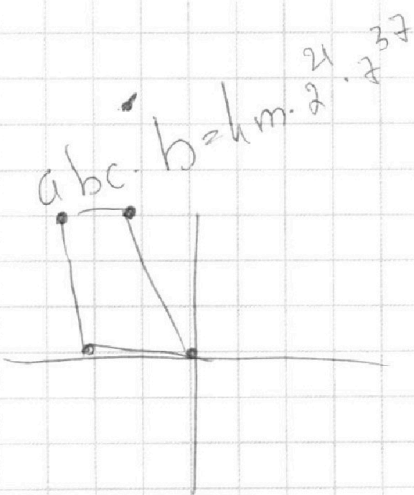
$m \Rightarrow 30$
 $k = 1$
 $p = 2$

$a \cdot \frac{m}{k} \cdot 2^3 \cdot 7^7 = p \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$

$a = \frac{k \cdot p}{m} \cdot 2^{17} \cdot 7^{30} = \frac{k \cdot p \cdot 2^{12} \cdot 7^{30}}{m}$

$a = 2^{15} \cdot 7^{30}$ $a = 2^9$

$a = \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 2^{17} \cdot 7^{30}$, $a = 2^{15} \cdot 7^{15}$



$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$ $b = \frac{k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{2^9} = 2^5 \cdot 7^{10}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (проценты)

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \emptyset \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{x \in \emptyset}$$

$$4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = (4x^2 - 3x + 3)^2$$

По: $x = \frac{2}{7}$ в ответе *

Ответ: $x = \frac{2}{7}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + b = m$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = m$$



$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{36}{23}$$



$$\frac{a}{b} = 1$$

$$\frac{2+3}{4-36+9} = \frac{5}{-23}$$

$$\frac{a}{b}a - 6a + b$$

$$4 - 6 \cdot 6 + 9$$

$$= \frac{5}{23}$$

$$a + b = \frac{8ab}{a+b}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

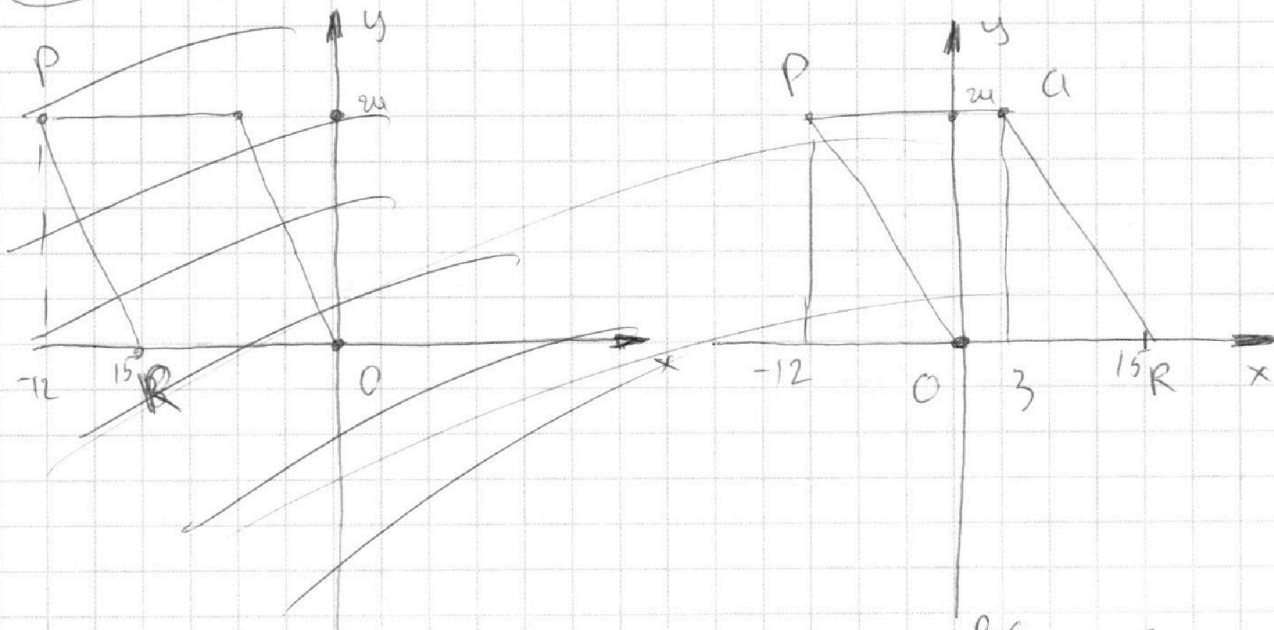
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(N5) $O(0; 0)$, $P(-12; 21)$, $Q(3; 21)$, $R(15; 0)$



$$AL = \frac{2 \cdot 4\sqrt{R-1} + 3 \cdot 4\sqrt{R-9} \cdot \cos \alpha}{4\sqrt{R-1} + 3\sqrt{4R-9}}$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$$

$$2 \cdot \frac{21}{3} = \frac{21}{4}$$

$$BC^2 = 16R - 16 + 36R - 81 - 24\sqrt{R-1}\sqrt{4R-9} \cdot \cos \alpha$$

$$4R^2 \sin^2 \alpha = 52R - 97 - 24\sqrt{R-1}\sqrt{4R-9} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{-4R^2 \sin^2 \alpha + 52R - 97}{24\sqrt{R-1}\sqrt{4R-9}}$$

$$AL = \frac{52R - 4R^2 \sin^2 \alpha - 97}{4\sqrt{R-1} + 3\sqrt{4R-9}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AC = \frac{7}{8}a \Rightarrow$$

$$BC = \frac{1}{8}a$$

$$AO_1^2 = AC^2 + 1$$

$$BO_1^2 = BC^2 + 1$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{AO_1}$$

$$\frac{BO_1}{\sin \alpha} = 10$$

$$BO_1 \cdot AO_1 = 10$$

$$BC = a$$

$$AC = 7a$$

$$\begin{array}{r}
 23 \\
 75 \\
 75 \\
 \hline
 375 \\
 525 \\
 \hline
 5625 \\
 4900 \\
 \hline
 625 \\
 \hline
 5525
 \end{array}$$

~~$$100 = (AC^2 + 1)(BC^2 + 1)$$~~

~~$$100 = \frac{49}{64}$$~~

$$100 = (49a^2 + 1)(a^2 + 1)$$

$$100 = 49a^4 + 49a^2 + a^2 + 1$$

$$49a^4 + 50a^2 - 100 = 0$$

$$D_1 = \sqrt{225 + 4900} = 625 + 4900 =$$

$$-25 + \sqrt{5325}$$

$$-25 + 5\sqrt{221}$$

$$AB = 8BC$$

$$40(\sqrt{221} - 5)$$

$$\begin{array}{r}
 1248 \\
 74 \\
 \hline
 174
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 296 \\
 518 \\
 \hline
 5476
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1848 \\
 \hline
 968 \\
 \hline
 189 \\
 \hline
 69 \\
 \hline
 69 \\
 \hline
 8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5525 \overline{) 25} \\
 50 \\
 \hline
 52 \\
 50 \\
 \hline
 25
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 221 \overline{) 2} \\
 21 \\
 \hline
 11
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 221 \overline{) 13} \\
 13 \\
 \hline
 91 \\
 91 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 14 \\
 24 \\
 25 \\
 \hline
 49
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4851 \\
 625 \\
 \hline
 5476
 \end{array}$$

$$625 + 49 \cdot 99$$

$$\begin{array}{r}
 1848 \\
 \hline
 968 \\
 \hline
 968 \\
 \hline
 189 \\
 \hline
 69 \\
 \hline
 69 \\
 \hline
 8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 151 \\
 01 \\
 \hline
 12
 \end{array}$$

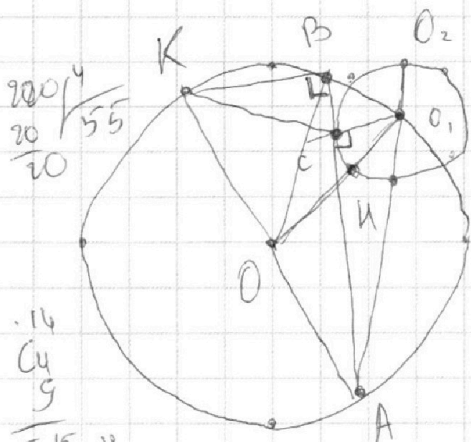
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1}$$

$$r_1 = 5$$

$$r_{\text{вн}} = 1$$

$$AB = ?$$

$$\frac{49}{a^2} = \frac{1}{1024}$$

$$\frac{49}{a^2} = \frac{1}{2^{10}}$$

$$a^2 = 49 \cdot 2^{10}$$

$$a = 7 \cdot 2^5 = 224$$

$$AU \cdot (AU + 2) = AC^2 = AO_1^2 - 1$$

$$AU^2 + 2AU = (AU + 1)^2 - 1$$

$$AU^2 + 2AU = AU^2 + 2AU$$

$$49a^2 = 64 \cdot 49a^2 + 64a^2 = 10000$$

$$49a^2 + 49a^2 + 49a^2 + 49a^2 = 196a^2$$

$$49a^2 + 50a^2 - 36 = 0$$

$$(49a^2 + 64)(a^2 + 64) = 6400$$

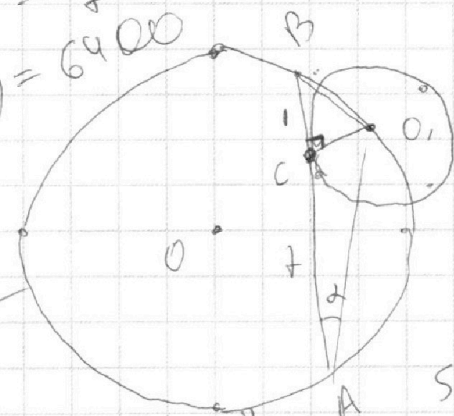
$$384a^2 = 6400 - 64a^2 - 4096$$

$$384a^2 = 64a^2 - 4096$$

$$320a^2 = 4096$$

$$a^2 = \frac{4096}{320} = \frac{256}{20} = \frac{64}{5}$$

$$a = \frac{8}{\sqrt{5}}$$



$$\sin \alpha = \frac{1}{AO_1} = \frac{1}{10}$$

$$AC = \frac{7}{8} a$$

$$BC = \frac{1}{8} a$$

$$AC^2 + 1 = AO_1^2$$

$$BC^2 + 1 = BO_1^2$$

$$(x - o)^2 + (y - o)^2 = r^2$$

$$\frac{1}{64} a^2 + 1 = BO_1^2$$

$$\left(\frac{49}{64} a^2 + 1\right) \left(\frac{1}{64} a^2 + 1\right) = 100$$

$$\frac{32}{64} = \frac{134}{288}$$

$$\frac{32}{64} = \frac{3 \times 2}{288}$$

$$\frac{96}{1024} = \frac{4}{256}$$

$$\frac{1024}{96} = \frac{256}{24}$$

$$\frac{1024}{96} = \frac{384}{24}$$

$$\frac{1024}{96} = \frac{384}{24}$$

На одной странице можно оформить **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.
Решение которой представлено на странице.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порядк ОК-кода неопустима!



МФТИ

$$a^2 = b^2 \cdot 2$$

$$a = b \cdot \sqrt{2}$$

$$b = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$a^2 + b^2 = 25$$

$$a^2 + \frac{a^2}{2} = 25$$

$$\frac{3a^2}{2} = 25$$

$$a^2 = \frac{50}{3}$$

$$a = \sqrt{\frac{50}{3}}$$

$$b = \sqrt{\frac{25}{3}}$$

$$a^2 = 2b^2$$

$$a = b\sqrt{2}$$

$$a^2 + b^2 = 25$$

$$2b^2 + b^2 = 25$$

$$3b^2 = 25$$

$$b^2 = \frac{25}{3}$$

$$b = \sqrt{\frac{25}{3}}$$

$$a = \sqrt{\frac{50}{3}}$$

abc?

$$ab_{\text{min}} = 2 \cdot 10 = 20$$

$$bc_{\text{min}} = 2 \cdot 14 = 28$$

$$ca_{\text{min}} = 2 \cdot 20 = 40$$

$$b^2 = 2a^2$$

$$b = a\sqrt{2}$$

$$a^2 + b^2 = 25$$

$$a^2 + 2a^2 = 25$$

$$3a^2 = 25$$

$$a^2 = \frac{25}{3}$$

$$a = \sqrt{\frac{25}{3}}$$

$$b = \sqrt{\frac{50}{3}}$$

$$a^2 + b^2 = 25$$

$$a^2 + 2a^2 = 25$$

$$3a^2 = 25$$

$$a^2 = \frac{25}{3}$$

$$a = \sqrt{\frac{25}{3}}$$

$$b = \sqrt{\frac{50}{3}}$$