МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^{14}7^{10}$, $bc$ делится на $2^{17}7^{17}$, $ac$ делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем $m$ могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на $m$?

3. [4 балла] Центр окружности $\omega$ лежит на окружности $\Omega$, хорда $AB$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $C$ так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину $AB$, если известно, что радиусы $\omega$ и $\Omega$ равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник $ABC$ вписан в окружность. Пусть $M$ – середина той дуги $AB$ описанной окружности, которая не содержит точку $C$; $N$ – середина той дуги $AC$ описанной окружности, которая не содержит точку $B$. Найдите расстояние от вершины $A$ до центра окружности, вписанной в треугольник $ABC$, если расстояния от точек $M$ и $N$ до сторон $AB$ и $AC$ соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1.

$a, b, c \in \mathbb{N}$, $ab \vdots 2^{14} 7^{10}$, $bc \vdots 2^{17} 7^{17}$, $ac \vdots 2^{20} 7^{37}$. $abc_{min}$ – ?

Чтобы $abc$ было наим., нужно, чтобы $a, b, c$ состояли только из степ. 2 и 7. : $a = 2^{k_1} 7^{n_1}$, $b = 2^{k_2} 7^{n_2}$, $c = 2^{k_3} 7^{n_3}$, $k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_0$, тогда $ab = 2^{k_1+k_2} 7^{n_1+n_2} \vdots 2^{14} 7^{10} \Rightarrow \begin{cases} k_1+k_2 \geq 14 & (1) \\ n_1+n_2 \geq 10. & (2) \end{cases}$ аналогично $\begin{cases} k_2+k_3 \geq 17 & (3) \\ n_2+n_3 \geq 17 & (4) \end{cases}$ и $\begin{cases} k_1+k_3 \geq 20 & (5) \\ n_1+n_3 \geq 37 & (6) \end{cases}$ требуется найти наим. сумму $k_1+k_2+k_3$ и $n_1+n_2+n_3$ для наим $abc$. $(1)+(3)+(5)$: $2(k_1+k_2+k_3) \geq 51 \Rightarrow k_1+k_2+k_3 \geq 25{,}5$, т.к. $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$, то $(k_1+k_2+k_3)_{min} = 26$, аналогично: $(2)+(4)+(6)$: $2(n_1+n_2+n_3) \geq 64 \Rightarrow (n_1+n_2+n_3)_{min} = 32$ т.е. $(abc)_{min} = 2^{26} 7^{32}$, но, т.к. $ac \vdots 2^{20} 7^{37}$, то $ac$ уже $\vdots 7^{37}$, а $7^{32} \not\vdots 7^{37}$, то есть минимальная степень у 7 будет 37. Ответ: $(abc)_{min} = 2^{26} 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2.

$\frac{a}{b}$ – несократима $(a, b \in \mathbb{N})$, т.е. НОД$(a;b)=1$.

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$, $m_{max}$ – ? $\quad a+b \vdots m$ и $a^2-6ab+b^2 \vdots m$

т.е. $a+b=km, k\in\mathbb{N}$, $a^2-6ab+b^2=\overset{\vdots m}{(a+b)^2}-8ab \Rightarrow$

$\Rightarrow$ требуется, чтобы $8ab \vdots m \Rightarrow 8ab=nm, n\in\mathbb{N}$.

Т.к. $m_{max}$, то ~~д~~ дробь получившаяся после сокращения ~~сокр~~ несократимая (иначе можно подобрать число $t$ на которое она сократится и такое значение $m$ будет $m_{max}t$).

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}=\frac{km}{k^2m^2-nm} \overset{:m}{=} \frac{k}{k^2m-n}$ НОД$(k;k^2m-n)=1$, а значит

НОД$(k;n)=1$. $m_{max}$ будет при наим. $k$, $=1$: $a+b=m$

тогда: $\cancel{(a+b)}$: $8ab \vdots (a+b)$, $8ab=t(a+b)$, $t\in\mathbb{N}$. $t\left(\frac{a+b}{8ab}\right)=1$

$= t\left(\frac{a}{8b}+\frac{b}{8a}\right)$ ~~несократимы~~ ~~и значит~~ ~~$\frac{a}{8b}+\frac{b}{8a}$ – несократима, чтобы~~

$t\in\mathbb{N}$ ~~требуется чтобы~~ $t=\frac{8ab}{a+b}$, т.к. НОД$(a;b)=1$,

то $\frac{ab}{a+b}$ – несократима, т.е. макс. $m$ при $a+b=m=8$.

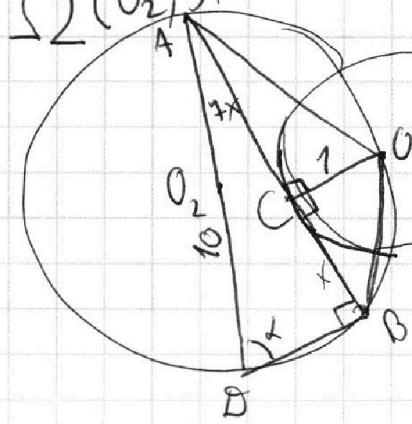
Ответ: $m=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\Omega(O_2;5)$




№3.

$w(O_1;1)$

т.к. $AC : BC = 7$, пусть $BC = x$ ⇒ $AC = 7x$.

$AD = 2\cdot 5 = 10$

Проведем диаметр $AD$, тогда $\angle ABD = 90^\circ$ (опир на диаметр).

Проведем $CO_1$ ($\perp AB$) и $O_1B$, $AO_1$

$CO_1 = 1$. Пусть $\angle ADB = \alpha$, тогда, т.к. $AO_1BD$ впис. в окружность, то $\angle AO_1B = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - \alpha$

$tg\angle AO_1C = 7x$, $tg\angle CO_1B = x$, $tg\angle AO_1B = tg(180^\circ - \alpha) = tg(\angle AO_1C + \angle CO_1B) = \frac{tg\angle AO_1C + tg\angle CO_1B}{1 - tg\angle AO_1C\, tg\angle CO_1B} = \frac{7x+x}{1-7x\cdot x}$ ⇒ $tg\,\alpha = \frac{8x}{7x^2-1}$, но из Δ-ка $ABD$ $tg\,\alpha = \frac{8x}{\sqrt{100-64x^2}}$ ⇒ $7x^2 - 1 = \sqrt{100-64x^2}$ $()^2$

$49x^4 - 14x^2 + 1 = 100 - 64x^2$ ⇒ $49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$, т.к. $49+50-99=0$, то $x_1^2 = 1$, а $x_2^2 = -\frac{99}{49}$ ∅ $x^2 = 1$ ⇒ $x = 1$. $AB = 8x = 8$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4. $\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$ ОДЗ: $2x^2-5x+3\geq 0$; $2x^2+2x+1=x^2+(x+1)^2\geq 0$ всегда

$x\leq 1$ и $x\geq\frac{3}{2}$

$2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$, $2x^2+2x+1$ – не раскл на мн, т.к. этот многочлен не им. корней

т.е. $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}>0$ всегда. Умножим левую и правую часть на $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}$.

$$\cancel{2x^2}-5x+3-\cancel{2x^2}-2x-1=(2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$$

$$2-7x=(2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$$

$$(2-7x)\left(1-\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)\right)=0$$

1. $x=\frac{2}{7}$. $2\cdot\frac{4}{49}-5\cdot\frac{2}{7}+3=\frac{8}{49}-\frac{10}{7}+3=-\frac{62}{49}+3>0$ подходит под О.Д.З.

2. $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1\Rightarrow\sqrt{2x^2-5x+3}=1-\sqrt{2x^2+2x+1}\ |^2$

$\cancel{2x^2}-5x+3=1-2\sqrt{2x^2+2x+1}+\cancel{2x^2}+2x+1\Rightarrow$

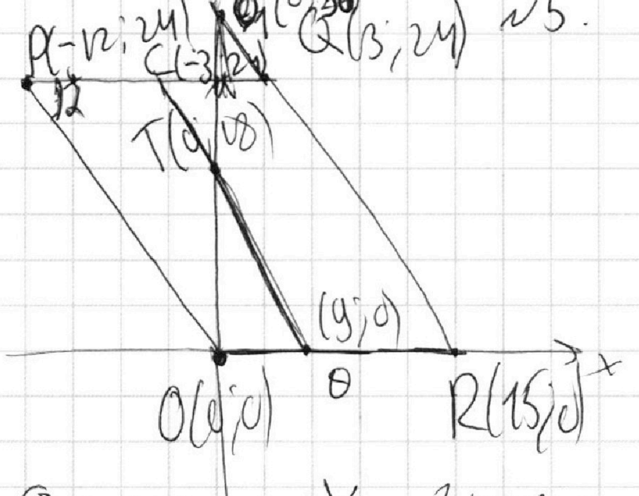
$\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+2x+1}=7x-1\ |^2$ и $7x-1\geq 0\Rightarrow x\geq\frac{1}{7}$.

$4(2x^2+2x+1)=49x^2-14x+1=8x^2+8x+4\Rightarrow$

$\Rightarrow 41x^2-22x-3=0$ $\frac{D}{4}=121+123=244=(2\sqrt{61})^2$.

$x_1=\frac{11-2\sqrt{61}}{41}<\frac{1}{7}$ $\varnothing$. $x_2=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}\geq\frac{1}{7}$ и $\leq 1$ подход. под О.Д.З.

Ответ: $x=\left\{\frac{2}{7};\ \frac{11+2\sqrt{61}}{41}\right\}$.




№5.

$A(x_1;y_1), B(x_2;y_2) \in OPQR$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$tg\alpha = 2$. (~~т.к.~~ ~~А и В~~ варианты $A(x_1,y_1)$

Выразим через $x_1, x_2, y_1 \to y_2$

$y_2 = -2x_2 + 2x_1 + y_1 + 12$ (1)

Относительно $x_2$ график этой ф-ции — прямая ∥ ~~стороне~~ PO и QR графика параллелограмма, т.е. если хотя бы одна т. принадлежит параллелограмму, то ей принадлежат сразу 13 (целочисленных) точек ~~значит~~ всего в параллелограмме таких точек 13·16, а прямая, задаваемая этим графиком принадлежит параллелограмму, если $2x_1+y_1+12 \le 30$ и $2x_1+y_1+12 \ge 0$.

графики параллельны PO и QR $\begin{cases} y_1 \le -2x_1+18 \\ y_1 \ge -2x_1-12 \end{cases}$ т.к. $(x_1,y_1) \in OPQR$, то $y_1 \ge -2x_1-12$ выполняется.

$y_1 \ge -2x_1$ и $\begin{cases} y_1 \le -2x_1+18 \\ y_1 \ge -2x_1 \end{cases}$, т.е. подходят все точки ограниченные CD (∥ PO и ∥ QR и проходящей через T(0;18). C(-3;24) D(9;0)), PQ, PC, OD. Всего таких точек 13·10=130 и для каждой из этих точек можно выбрать т. $B(x_2,y_2)$ 13 ~~·10 способами~~ 13·10 способами ~~13·16 способами~~

Всего 130·13=1690 способов, но, для каждой прямой ∥PO с целой координатой (0; x(x∈Z)) ~~найдется~~ из промежутка x∈[0;9]. найдется точка с целочисл координатами, что она совпадет с (1). общее число вариантов: 2(1690−13·10) = 3120

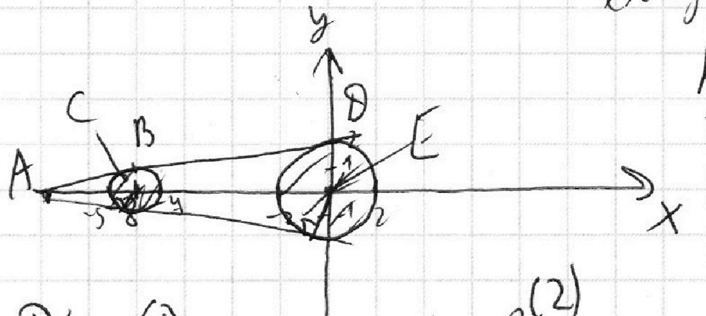
A,B и B,A равносильны

Ответ: 3120.

№ 6.

$$\begin{cases} ax-y+10b=0 \text{ и} \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases} \to \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+8)^2+y^2\le 1\\ x^2+y^2 \ge 4\end{cases}\\ \begin{cases}(x+8)^2+y^2\ge 1\\ x^2+y^2\le 4\end{cases}\end{array}\right.$$

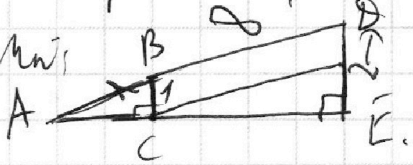
нарисуем графики ф-ций $(x+8)^2+y^2=1$ – окр. (центр $(-8;0)$ радиус 1
$x^2+y^2=4$ – окр. центр $(0;0)$ радиус 2




Заметим, что эта совокупность равносильна:

$$\left[\begin{array}{l}(x+8)^2+y^2\le 1\\ x^2+y^2\le 4\end{array}\right.$$

Р/С (1): $y=ax+10b^{(2)}$ – прямая, т.к система должна иметь ровно 2 решения, то подходит только 2 прямые, изобр. на графике, они касаются окружностей т/к конструкции:




проведем через C прямую $\parallel AD$ и перес. DE в т. T, BCTD – параллелограмм $\Rightarrow CT=8$, $DT=1 \Rightarrow TE=1 \Rightarrow CE=\sqrt{63}$

$$\operatorname{tg}\angle ABC=\frac{BC}{AC}=\frac{DE}{AE}=\frac{DE}{AC+CE}=\frac{1}{AC}=\frac{2}{AC+\sqrt{63}} \Rightarrow 2AC=AC+\sqrt{63}\Rightarrow AC=\sqrt{63}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\angle ABC=\frac{1}{\sqrt{63}}$. В уравнении (2) $y=ax+10b$ $a=\operatorname{tg}$ угла наклона, т.е либо $a=\operatorname{tg}\angle ABC=\frac{1}{\sqrt{63}}$, либо $a=-\operatorname{tg}\angle ABC=-\frac{1}{\sqrt{63}}$.

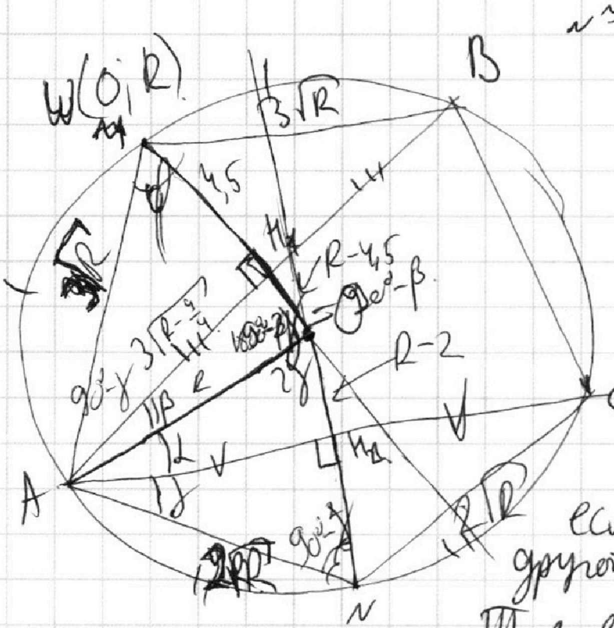
Для каждого из этих случаев подбирается единственная b (взяв т. этой прямой). Ответ: $a=\frac{1}{\sqrt{63}}$ или $a=-\frac{1}{\sqrt{63}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7.




$MH_1 = 4,5$, $NH_2 = 2$.

т.к. дуги $\breve{AM}$ и $\breve{MB}$ равны, то равны и стягивающие их хорды, т.е $AM = MB$, тогда из равенства Δ-ков $AMH_1$ и $MH_1B$ $AH_1 = H_1B$, аналогично $AH_2 = H_2C$.

Воспользуемся теоремой: если хорда окружности ⊥ другой и делит её пополам, то эта хорда - диаметр. Т.е если продлить $MH_1$ и $NH_2$, то они будут диаметрами. Из Δ-ка $AH_1O$: $AH_1^2 = R^2 - (R-\frac{9}{2})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AH_1 = \sqrt{9R - \frac{81}{4}}$, аналогично из Δ-ка $AOH_2$: $AH_2 = 2\sqrt{R-1}$
$3\sqrt{R-\frac{9}{4}}$

из Δ-ка $AMH_1$: $AM = \sqrt{9R - \frac{81}{4} + \frac{81}{4}} = 3\sqrt{R}$, из Δ-ка $AH_2$: $AN =$

$= \sqrt{4R-4+4} = 2\sqrt{R}$. ~~$\cos\angle OAH_2$~~ $\angle OAH_2 = \alpha$, $\angle OAH_1 = \beta$.

~~$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{2\sqrt{R-1}}{R}\cdot\frac{3\sqrt{R-\frac{9}{4}}}{R} - \frac{R-2}{R}\cdot\frac{R-4,5}{R} = \frac{6\sqrt{R-1}\sqrt{R-\frac{9}{4}}-}{R^2}$~~

~~$\cos(90^\circ-\beta) = \sin\beta = \frac{R-4,5}{R}$. По т. косинусов из Δ-ка $AMO$:~~

~~$9R = R^2 + R^2 - 2R^2\cdot\frac{R-4,5}{R} = 2R^2 - 2R^2 + 9R$~~

$\angle H_2AN = \gamma$, $\angle AH_2N = 90^\circ - \gamma$. $\cos(90^\circ-\gamma) = \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{R}}$

$\angle AMO = \varphi$ $\cos\varphi = \frac{1,5}{\sqrt{R}}$ из т. косинусов Δ-ка $AMO$ и $AON$:

$R^2 = 9R + R^2 - 2\cdot 3\sqrt{R}\cdot R\cdot\frac{1,5}{\sqrt{R}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

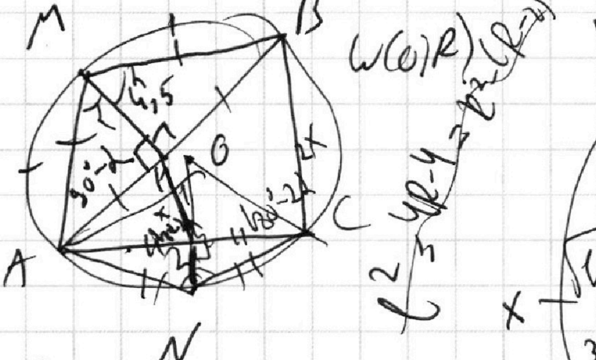
$\underbrace{\sqrt{2x^2-5x+3}}_{a}+\underbrace{\sqrt{2x^2+2x+1}}_{b}=1 \quad \uparrow 2.$ $\begin{cases} a^2+b^2=1 \Rightarrow (a-b)^2+2ab=1 \\ a-b=2-7x. \quad (2-7x)^2+2ab=1. \end{cases}$

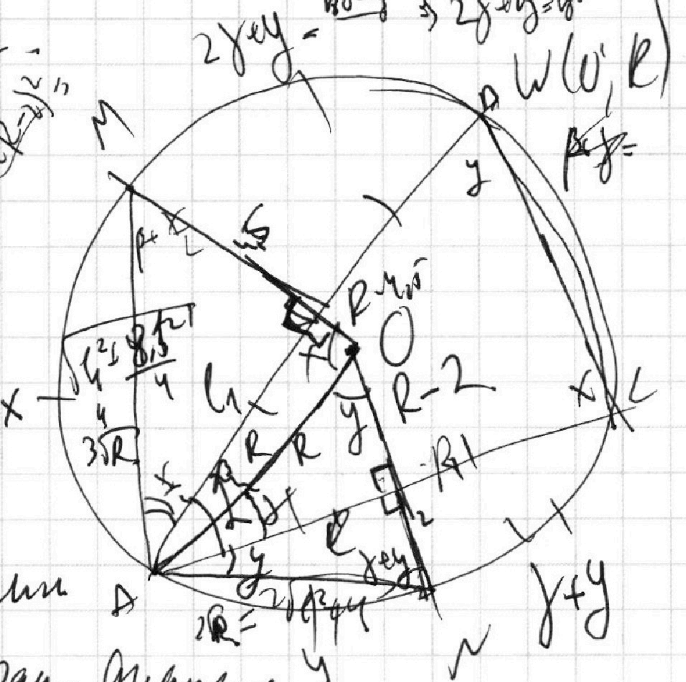
$\cancel{2x^2}-5x+3=1-2\sqrt{2x^2+2x+1}+\cancel{2x^2}+2x+1$

$x \geqslant +\frac{1}{5}$

$2\sqrt{2x^2+2x+1}=-1+5x \quad \uparrow 2$ $\quad 4(2x^2+2x+1)=25x^2-10x+1$

$8x^2+8x+4=25x^2-10x+1, \ldots$ $\quad 2\gamma+y=180^\circ-y \Rightarrow 2\gamma+2y=180^\circ$





Лемма. Если хорда перп. другой хорде и делит её пополам, то эта хорда — диаметр.

$\alpha = 180^\circ - x - y.$ $\quad \frac{x}{2}+\alpha+\frac{y}{2}=180^\circ-\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)$ $\quad tg\frac{y}{2}=\frac{2}{l}$ $\quad tg\gamma=\frac{R-2}{l}$

$=\frac{\sqrt{R^2-l^2}}{l} \Rightarrow (R-2)^2=R^2-l^2 \quad \cancel{R^2}-4R+4=\cancel{R^2}-l^2 \Rightarrow l^2=4R-4.$

$tg\, x=\frac{4{,}5}{l_1}, \quad tg\beta=\frac{R-4{,}5}{l_1}=\frac{\sqrt{R^2-l_1^2}}{l_1} \quad \cancel{R^2}-9R+\frac{81}{4}=\cancel{R^2}-l_1^2$

$l_1^2=9R-\frac{81}{4}$

$\cos y=\frac{l}{\sqrt{\ldots}}$ $\quad \cancel{l^2+4=R^2-R^2-4R+4}$

$\cancel{\gamma+y=180^\circ-\gamma-y} \quad \cancel{2(\gamma+y)=\frac{180^\circ-y}{2}} \quad \gamma+y=90^\circ-\frac{y}{2} \quad \gamma=\frac{\pi}{2}-\frac{3y}{2}$

$\cancel{tg(\gamma)=ctg\left(\frac{3y}{2}\right)=\frac{1}{tg\left(\frac{3y}{2}\right)}=\frac{1+\cos 3y}{\ldots}} \quad tg\left(90^\circ-\frac{y}{2}\right)=\frac{1}{tg\left(\frac{y}{2}\right)}=\frac{\sin y}{1-\cos y}$

$\cos\left(90^\circ-\frac{y}{2}\right)=\sin\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos y}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{l}{\sqrt{\ldots}}}{2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик $a,b,c \in N$, $ab \vdots 2^{14}7^{16}$, $bc \vdots 2^{17}7^{17}$, $ac \vdots 2^{20}7^{37}$.

abc $\frac{ab^2c}{ac}$ $a=2^{k_1}7^{n_1}$, $b=2^{k_2}7^{n_2}$, $c=2^{k_3}7^{n_3}$.

$ab=2^{k_1+k_2}7^{n_1+n_2}$, $bc=2^{k_2+k_3}7^{n_2+n_3}$, $ac=2^{k_1+k_3}7^{n_1+n_3}$

$abc=2^{k_1+k_2+k_3}7^{n_1+n_2+n_3}$

$\begin{cases} k_1+k_2 \geq 14 \\ k_2+k_3 \geq 17 \\ k_1+k_3 \geq 20 \end{cases}$ $+$ $2(k_1+k_2+k_3) \geq 51 \Rightarrow k_1+k_2+k_3 \geq 25{,}5$, т.е. наим $k_1+k_2+k_3=26$, аналогично с

$n_1+n_2+n_3$: $2(n_1+n_2+n_3) \geq 64 \Rightarrow n_1+n_2+n_3 \geq 32$, min $=32$

Ответ $abc_{min}=2^{26}7^{32}$

$\frac{a}{b}$ - несократима, $a\in N$, $b \in N$ (т.е. НОД$(a,b)=1$)

$k\cdot m$ $(a+b)^2=k^2m^2$.

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}=\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$. $a+b=m^2$ $8ab=km$. m наиб, что дробь мы сократим на m? $k(a+b)=8ab$. $4a+4b=8ab$.

$\frac{a+b}{m} \in N$ и $\frac{8ab}{m}\in N$. $a+b=km$, $8ab=nm$, $k,n \in N$

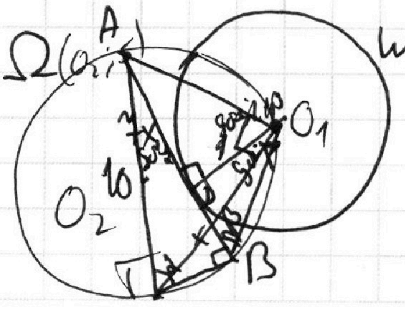
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=k^2m^2$ $k^2m^2 \geq \frac{nm}{2}$ $2ab=\frac{nm}{4}$ $6ab=\frac{3}{4}nm$

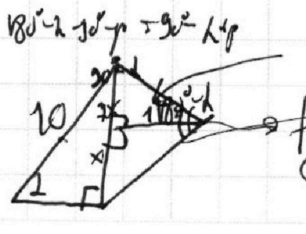
$a^2+b^2=k^2m^2-\frac{nm}{4}=m(k^2m-\frac{n}{4})$ $m(km-\frac{n}{2})\geq 0$

$\frac{km}{k^2m^2-\frac{nm}{4}-\frac{3}{4}nm}=\frac{km}{k^2m^2-nm}=\left(\frac{k}{k^2m-n}\right)$ $\frac{\frac{a+b}{m}}{\frac{k(a+b)^2}{m}-\frac{8ab}{m}}$. $tg\,\alpha=\frac{8x}{\sqrt{100-64x^2}}$

$tg(\alpha)=\frac{8x}{7x^2-1}$

$\Omega(O_2,1)$ $\omega(O_1,1)$ $AO_1BT$ впис. в окр.





$tg\,\gamma=7x$, $tg\,\beta=x$.

$tg(\beta+\gamma)=\frac{tg\beta+tg\gamma}{1-tg\beta\, tg\gamma}=\frac{8x}{1-7x^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{100-64x^2}=7x^2-1$ $\;100-64x^2=49x^4-14x^2+1$. $t=x^2,\ t\geq 0$.

$49x^4+50x^2-99=0$ $\;t_1=1,\ t_2=-\frac{99}{49}$ $\Rightarrow AB=8$.

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x \;\Big|\cdot\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$

$(2x^2-5x+3-2x^2-2x-1)=(2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$.

$(2-7x)\left(1-\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$

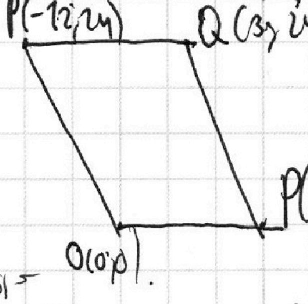
проверить О.Д.З.

$1.\ x=\frac{2}{7}$, $\;2\;\; \sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$ → мин: $x_{1,5}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

$\frac{25}{8}-\frac{25\cdot 2}{4}+3\;\; \frac{-25}{8}+3\;\; \frac{5}{4}\;\; \frac{\sqrt{3}}{2}>1+0.\;\; \frac{25}{2}+\frac{25}{9}+3\;\; \frac{1}{4}-1+1.$

$\frac{a+b}{2}\geq 2\sqrt{ab}$

$a^2-b^2=2-7x$



$A(x_1;y_1),\ B(x_2;y_2)$. $\;AB(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$

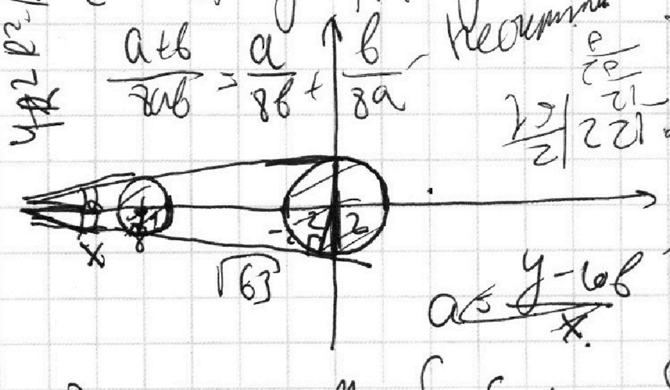
$x_1+y_2-y_1=12$

$2(x_2-x_1)+y_2-y_1=12$

$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\leq 0. \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\left[\begin{cases}(x+8)^2+y^2\leq 1\\ x^2+y^2\geq 4\end{cases} \quad \begin{cases}(x+8)^2+y^2\geq 1\\ x^2+y^2\leq 4\end{cases}\right.$ $\to (x+8)^2+y^2\leq 1$, $\;\to x^2+y^2\leq 4$

$\frac{a+b}{8ab}=\frac{a}{8b}+\frac{b}{8a}$ неоктим

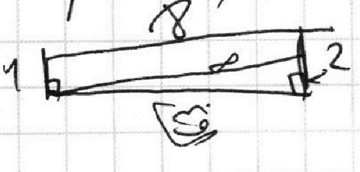
$ax-y+10b=0$



$ax=y-10b.\ x=0;\ y=10b.$

$a=\frac{y-10b}{x}$ $\;\;y=ax+10b\;\;$ $x\neq 0$ $\;\;x,y=$ уд. толи единствен

2 прямые, чтобы система имела 1 решение:



$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{x}=\frac{2}{\sqrt{63}+x}\Rightarrow \sqrt{63}+x=2x\Rightarrow x=\sqrt{63}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{63}}.\;\; 10b=\pm 2.$