



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc . ~~218~~ $2^{28} \cdot 7^{39}$
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно. ~~3438~~

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x. \quad 1/9, \dots$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$. ~~3481~~ 3481

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения. $\pm \sqrt{15}; \pm \frac{\sqrt{169}}{5}$

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1.

Дано:

$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$

$bc: 2^{11} \cdot 7^{13}$

$ac: 2^{23} \cdot 7^{29}$

Найти ~~наиб~~ наим abc .

Решение: ~~Пусть $a = 2^x \cdot 7^{x'}$, $b = 2^y \cdot 7^{y'}$, $c = 2^z \cdot 7^{z'}$~~

1) Очевидно, ~~что~~ чтобы abc было наименьшим число a, b, c должны состоять только из 2 и/или 7, т.к. иначе у нас будут дополнительные множители, которые не входят на фактность данному в условии, но увеличат произведение abc . Тогда, пусть $a = 2^x \cdot 7^{x'}$, $b = 2^y \cdot 7^{y'}$, $c = 2^z \cdot 7^{z'}$, тогда из условия задам получим систему неравенств (так же $x, y, z, x', y', z' \geq 0 \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{cases} x+y \geq 15 \\ y+z \geq 17 \\ x+z \geq 23 \\ x'+y' \geq 11 \\ y'+z' \geq 18 \\ x'+z' \geq 39 \end{cases}$$

2) Из этой системы получим, что $x+y+z \geq 27,5$ и $x'+y'+z' \geq 34$. Не трудно заметить, что наименьшая сумма $x+y+z$ будет при 28, т.к. меньше она быть не может (по условию $x+y+z \geq 27,5$ и то, что эти члены неотрицательные) и при $x+y+z = 28$ у нас есть решение, которое удовлетворяет системе $(x, y, z) = (10; 5; 13)$ и удовлетворяют условиям на $x, y, z \Rightarrow$ Наим $x+y+z = 28$.

3) Если мы будем действовать с числами x', y', z' аналогично пункту 2), то получим, что $x'+y'+z' \geq 34$ и ~~мы~~ знаем наим $x'+y'+z' = 34$, но это не так, т.к. при $x'+y'+z' = 34$ у нас как минимум одно из чисел отрицательно. Тогда взглянем на последнее неравенство ($x'+z' \geq 39$) и получим, что $x'+y'+z' \geq 39$ (т.к. $39 \leq x'+z' \leq x'+y'+z'$ при $x', z', y' \geq 0 \Rightarrow x'+y'+z' \geq 39$).

Теперь наим значение 39. Тогда подставим в систему значения x', y', z' удовл. неравенству $x'+y'+z' = 39$ и получим решение (К примеру: $(x', y', z') = (16; 0; 23)$) т.к. это решение удовлетворяет условиям на x', y', z' и системе ~~то~~ и мы доказали, что сумма $x'+y'+z'$ не может быть меньше 39, то значит ~~наим~~ $x'+y'+z' = 39$.

4) Теперь найдем наименьшее значение abc :
 $abc = 2^x \cdot 7^{x'} \cdot 2^y \cdot 7^{y'} \cdot 2^z \cdot 7^{z'} = 2^{(x+y+z)} \cdot 7^{(x'+y'+z')}$ - чтобы это значение стало минимальным нужно, чтобы $x+y+z$ было мин. и $x'+y'+z'$ было минимальным $\Rightarrow x+y+z = 28$ и $x'+y'+z' = 39$ И тогда наименьшее значение произведения $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

Дано:

$\frac{1}{2}$ - несократима
 $a, b \in \mathbb{N}$

$m_{\max} = ?$

Решение

1) П.К. Нам нужно сократить дробь $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ на максимальное значение m , то это значение будет $\text{НОД}(a+b; a^2-7ab+b^2)$, т.к. на большее значение нас не поделится хотя бы одно из чисел $a+b$ или $a^2-7ab+b^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

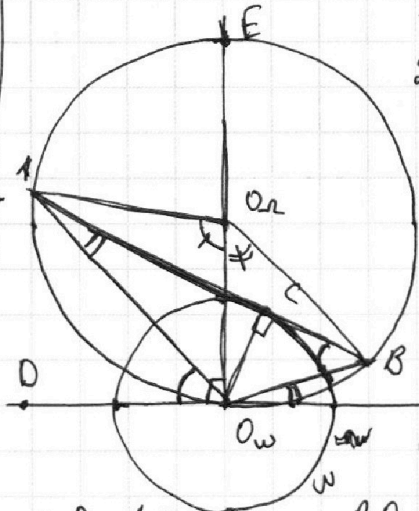


Задача №3

Дано:
 $AC : CB = 17 : 7$
 $O_\omega \in \Omega$
 $R_\omega = 7$
 $R_\Omega = 13$

$AB = ?$

Доказать:



- 1) $OC \perp AB$, т.к. это радиусы в точку касания к касательной.
- 2) $O_\Omega O_\omega \cap \Omega = (C) O_\omega$ и (E)
- 3) $O_\Omega A = O_\Omega B = O_\Omega O_\omega = R_\Omega = 13$.
- 4) Проведем касательную DF к окружности Ω в точке O_ω .
- 5) $\angle PO_\omega A = \angle AB O_\omega$, т.к. это угол между кас и хордой и вписанный угол опирающийся на одну и ту же дугу.
- 6) Аналогично пункту 5): $\angle BO_\omega F = \angle O_\omega AB$.

7) $\angle A O_\Omega O_\omega = 2 \angle A B O_\omega$ и $\angle B O_\Omega O_\omega = 2 \angle O_\omega A B$, т.к. это центральные и вписанные углы опирающиеся на одну и ту же дугу.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4.

Решить уравнение $\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} 3x^2-6x+2 \ge 0 \\ 3x^2+3x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty) \\ x \neq -\frac{1}{3} \end{cases}$

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$ | Введем замену: $a = 1-9x$
 $\sqrt{3x^2+3x+1+1-9x} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$
 $\sqrt{a+b} - \sqrt{b} = a$ Возведем обе части в квадрат:

$a+b+b - 2\sqrt{b(a+b)} = a^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{b(a+b)} = 2b+a-a^2$ Опять возведем в квадрат.

$a^2+4b^2+a^4+4ab - 2a^3-4a^2b = 4b^2+4ab \Leftrightarrow a^2(a^2-4b-2a+4) = 0 \Leftrightarrow a^2(a-1)^2-4b=0$

$\begin{cases} a^2=0 \\ (a-1)^2-4b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ (a-1)^2-4b=0 \end{cases} \begin{cases} 1-9x=0 \\ (-9x)^2-4(3x^2+3x+1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 81x^2-12x-4=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 69x^2-12x-4=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{D}{4} = \left(\frac{-12}{2}\right)^2 - (-4) \cdot 69 = 312 = 4 \cdot 78$
 $x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{4 \cdot 78}}{2 \cdot 69} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6-2\sqrt{78}}{69} \\ x = \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \end{cases}$

Мы получили три корня и осталось проверить их на ОДЗ:

$\frac{3+\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{1}{9}}$ $\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}$ $\frac{6-2\sqrt{78}}{69} \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$
 $3(3+\sqrt{3}) \sqrt{1}$ $2\sqrt{78} \sqrt{69+23\sqrt{3}}$ $6-2\sqrt{78} \sqrt{69-23\sqrt{3}}$
 $9-3\sqrt{3} \sqrt{1}$ $312 < 63^2+23^2 \cdot 3+2 \cdot 23 \cdot 63 \cdot \sqrt{3}$ $-2\sqrt{26} \sqrt{21\sqrt{3}-23}$
 $8 \sqrt{3\sqrt{3}}$ $\text{П.к. } 312 < 63^2$ $23 \sqrt{21\sqrt{3}+2\sqrt{26}}$
 $64 \sqrt{27}$ $\frac{6+2\sqrt{78}}{69} < \frac{3+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{6-2\sqrt{78}}{69} < \frac{3+\sqrt{3}}{3}$ $\frac{23 < 21\sqrt{3}+2\sqrt{26}}{69} < \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

$\frac{3-\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{9} \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \Rightarrow \frac{1}{9} \in \text{ОДЗ}$ Т.к. $23^2 < 21^2 \cdot 3 \Rightarrow 23 < 21\sqrt{3}$

$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \sqrt{\frac{6-2\sqrt{78}}{69} \frac{3-\sqrt{3}}{3}} < \frac{3-\sqrt{3}}{3}$ П.к. $\frac{6-2\sqrt{78}}{69} < \frac{3-\sqrt{3}}{3}$ то $\frac{6-2\sqrt{78}}{69} \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \Rightarrow \frac{6-2\sqrt{78}}{69} \in \text{ОДЗ}$

$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \sqrt{\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \frac{3-\sqrt{3}}{3}} < \frac{3-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \in \text{ОДЗ}$

\Rightarrow Все три ответа подходят.

Ответ: $\frac{1}{9}; \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №5.

$P(-13; 26)$ $O(0; 0)$
 $Q(3; 26)$ $R(16; 0)$

Решение:

1) Пусть y_1 как зафиксирована точка A , тогда наименькие координаты может иметь точка B :

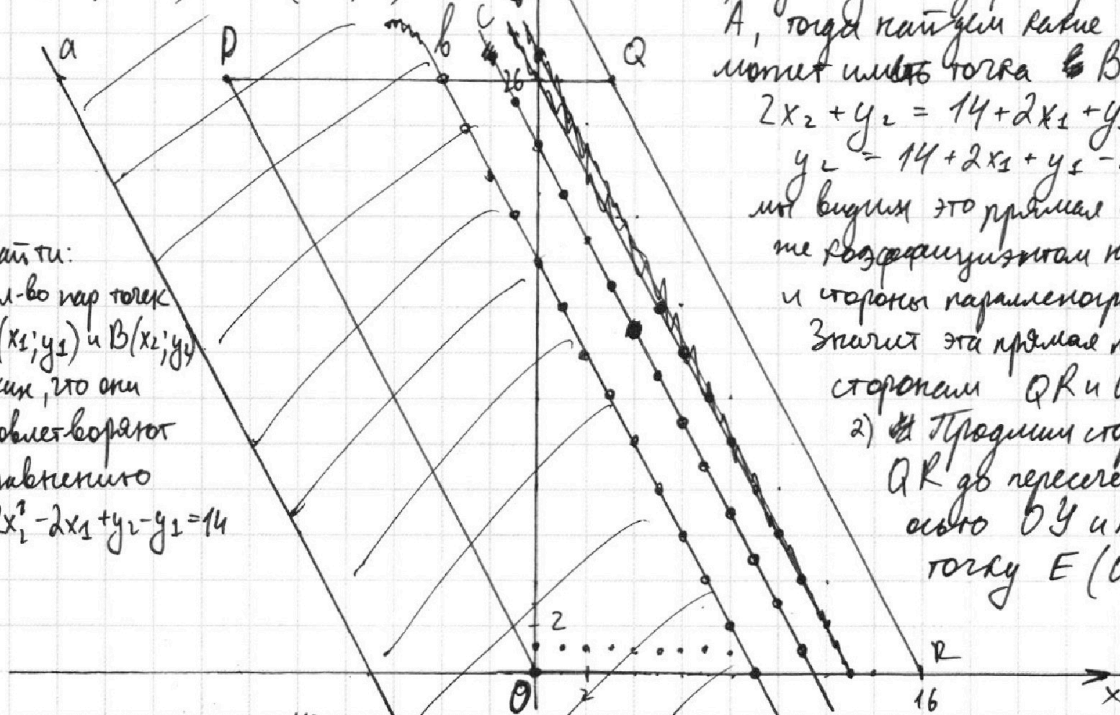
$$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 - 2x_2, \text{ как}$$

мы видим это прямая с таким же коэффициентом наклона, как и стороны параллелограмма (QR и OP)
 Значит эта прямая параллельна сторонам QR и OP

2) Продлим сторону QR до пересечения с осью OY и получим точку $E(0; 32)$.

Найти:
 Кол-во пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ таких, что они удовлетворяют уравнению $2x_1^2 - 2x_2 + y_2 - y_1 = 14$



3) П.к. точка B ^{не} должна лежать вне параллелограмма, то крайние для нее случаи это стороны PO и QR и значит вот значения для свободного члена:
 $0 \leq 14 + 2x_1 + y_1 \leq 32 \Leftrightarrow -14 - 2x_1 \leq y_1 \leq 18 - 2x_1$ Значит теперь мы получили ограничение на координаты точки $A \Rightarrow$ Точка A может лежать только между прямыми a и b (включая их), где прямая a имеет уравнение $y = -14 - 2x$, а прямая $b: y = 18 - 2x$. (Заштрихованная область это то, где может лежать точка A).

4) Для каждой точки A может быть либо 13 точек B , либо 14. Если координаты y_1 пересечение прямой $y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 - 2x_2$ и оси OY нечетные, то вариантов 13, а если четные, то 14 (пример прямой b и c , черные точки - точки в которых может быть точка B). Чтобы это пересечение было четным, сумма $2x_1 + y_1$ должна быть четной, значит y_1 - четный.

5) Кол-во точек A с четным y_1 - это $n_1 = 13 \cdot 9$ (принимать рядов по 9 точек) А кол-во точек с четным ~~кратным~~ y_1 - это $n_2 = 14 \cdot 10$ (14 рядов по 10 точек) А значит кол-во пар точек A и B это $N = 14n_2 + 13n_1 = 14^2 \cdot 10 + 13^2 \cdot 9 = 1521 + 1960 = 3481$

Ответ: 3481 пара.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



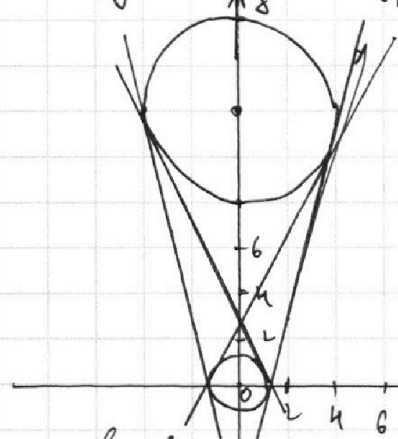
Задача №6.

Найти все значения параметра a , при которых найдется b и будет 2 решения системы

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 16 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

Первое уравнение в системе это прямая, а второе неравенство равносильно: уравнение $x^2 + y^2 = 1$ - уравнение окружности с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 1, а неравенство $x^2 + y^2 \leq 1$ - это окружность и круг внутри нее. Аналогично с уравнением окружности $x^2 + (y - 12)^2 = 16$



Т.к. у нас должно быть 2 решения, значит прямая $ax + y - 8b = 0$ должна касаться обеих окружностей, т.к. если она касается только одной, а другую не касается и не пересекает, то решение 1 - и это точка касания. Если прямая пересекает хотя бы одну окружность, то там получится бесконечно много решений (отрезок лежащий внутри окружности) значит у нас 4 варианта для коэффициента наклона прямой (a) - это 4 касательных (общих) две внешних и две внутренних.

Теперь найдем параметр a при котором это так. Сделаем это через расстояние от точки до прямой:

$$\begin{cases} d = \frac{|1a \cdot 0 + 12 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ 4 - d = \frac{|1a \cdot 0 + 0 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{a^2 + 1} = |12 - 8b| \\ \sqrt{a^2 + 1} = | - 8b | \end{cases}$$

Теперь рассмотрим 3 случая для разн. значений b и отброшим лишнее

При $b \in (-\infty; 0]$ $\begin{cases} 4\sqrt{a^2 + 1} = 12 - 8b \\ \sqrt{a^2 + 1} = -8b \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 1} = 4 \Rightarrow a^2 + 1 = 16 \Rightarrow a = \pm\sqrt{15}$

При $b \in (0; \frac{3}{4}]$ $\begin{cases} 4\sqrt{a^2 + 1} = 12 - 8b \\ \sqrt{a^2 + 1} = 8b \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 1} = \frac{12}{5} \Rightarrow a^2 + 1 = \frac{12^2}{5^2} \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{12^2 - 5^2}{5^2}}$

При $b \in (\frac{3}{4}; +\infty)$ $\begin{cases} 4\sqrt{a^2 + 1} = +8b - 12 \\ \sqrt{a^2 + 1} = 8b \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 1} = -4 \Rightarrow$ решений нет, т.к. $\sqrt{a^2 + 1} > 0$.

Вот мы и получили 4 различных варианта для параметра a , что соответствует 4 различным касательным (с различными коэффициентами наклона).

~~Ответ: $\pm\sqrt{15}$~~ Ответ: $\pm\sqrt{15}; \pm\frac{\sqrt{119}}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

Задача 4/5

ОДЗ: $3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

Решить уравнение $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

Решение: $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$ Введем замену: $a = 1 - 9x$

$b = 3x^2 + 3x + 1$

$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$\sqrt{a+b} - \sqrt{b} = a$ Возведем обе части в квадрат:

$a+b - 2\sqrt{b} \cdot \sqrt{a+b} + b = a^2 \Leftrightarrow a+2b-a^2 = 2\sqrt{b}(b+a)$ Опять возведем в квадрат:

$a^2 + 4b^2 + a^4 + 4ab - 2a^3 - 4a^2b = 4b^2 + 4ab \Leftrightarrow a^4 - 4a^2b - 2a^3 + a^2 = 0$

$a^2(a^2 - 4b - 2a + 1) = 0$ Теперь перейдем к равносильной совокупности:

$\begin{cases} a^2 = 0 \\ a^2 - 4b - 2a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ (a-1)^2 - 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 9x = 0 \\ (-9x)^2 - 4(3x^2 + 3x + 1) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 9x = 1 \\ 81x^2 - 12x^2 - 12x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 69x^2 - 12x - 4 = 0 \end{cases}$

Из этой системы найдем значение где $x = \frac{1}{9}; \frac{12 - \sqrt{312}}{69}; \frac{12 + \sqrt{312}}{69}$

Теперь нужно проверить подпадают ли эти значения под ОДЗ:

$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{2}{3} \geq 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$

~~$x = \frac{1}{9}$~~ $x = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$

$6 \pm 2\sqrt{78} \vee \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} \cdot 23$

$6 + 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 39} = 2 \cdot 39 = 2 \cdot 3 \cdot 13$

$6 \pm 2\sqrt{78} \vee 69 \pm 23\sqrt{3}$
 $\pm 2\sqrt{78} \vee 63 \pm 23\sqrt{3}$
 $\# 312 \vee 63^2 \# 23^2 \cdot 3 \pm 2 \cdot 63\sqrt{3} \cdot 23$

21
 $\begin{array}{r} \times 21 \\ 21 \\ + 42 \\ \hline 441 \\ \times 21 \\ \hline 882 \end{array}$

$6 + 2\sqrt{78} \vee 69 - 23\sqrt{3}$
 $+ 2\sqrt{78} \vee 63 - 23\sqrt{3}$
 $+ 2\sqrt{26} \vee 21\sqrt{3} - 23$
 $23 \vee 21\sqrt{3} - 2\sqrt{26}$
 $23^2 \vee 21^2 \cdot 3 + 2 \cdot 26 - 2 \cdot 21\sqrt{26} \cdot 21\sqrt{3}$

$\begin{array}{r} 1323 \\ 104 \\ \hline 1427 \\ \times 59 \\ \hline 898 \end{array}$

$6 + 2\sqrt{78} \vee 69 - 23\sqrt{3}$
 $23^2 \vee 21^2 - 3 + 2 \cdot 26$

13
 $\begin{array}{r} 48 \\ 449 \\ \times 449 \\ \hline 1996 \\ 1796 \\ \hline 201601 \end{array}$

$\begin{array}{r} 441 \\ \times 324 \\ \hline 1764 \\ 882 \\ \hline 10564 \\ + 3528 \\ \hline 14092 \\ \times 137592 \end{array}$



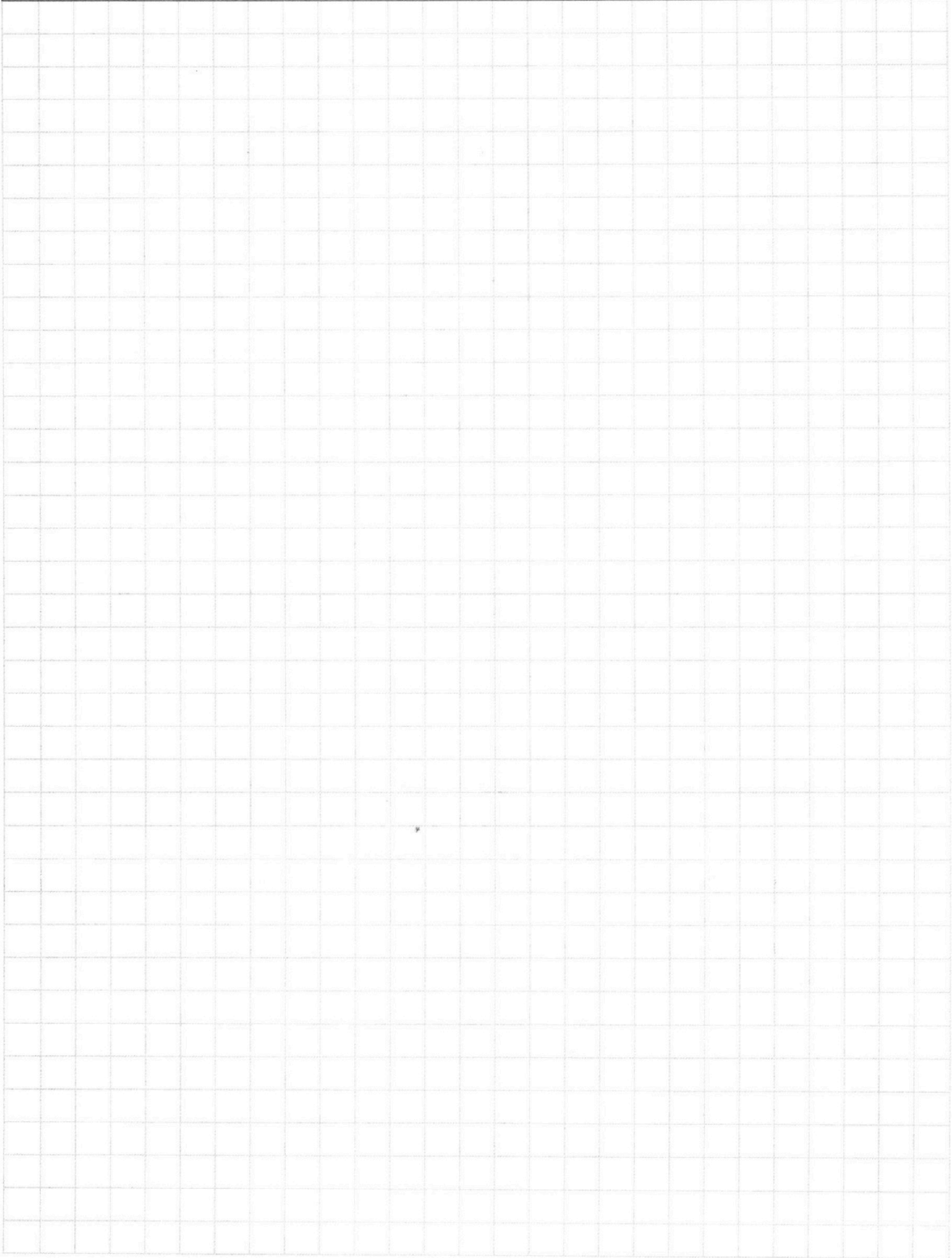
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+3x+1+(1-9x)} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$a = 3x^2+3x+1 \quad \sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \quad 2\sqrt{a(a+b)} = (2a+b-b^2)$$

$$b = 1-9x \quad a+b+a-2\sqrt{a^2+ab} = b^2 \quad 4a(a+b) = 4a^2+b^2+b^4+2ab-2ab^2-2b^3$$

$$4ab^2-2b^3 \Leftrightarrow 0 = b^2(1+b^2+4a-2b)$$

Если $b=0$, то a -любое $\Rightarrow b=0 \Leftrightarrow 1-9x=0 \Rightarrow x=1/9$

$$1+b^2+4a-2b=0 \Leftrightarrow 4a+(b-1)^2=0 \Leftrightarrow 12x^2+12x+4+81x^2=0$$

$$93x^2+12x+4=0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 93 < 0 \Rightarrow \text{решений нет}$$

Ответ: $1/9$.

или: $3x^2+3x+1 \geq 0$ - всегда

$$3x^2-6x+2 \geq 0 \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{9} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3} > 0$$

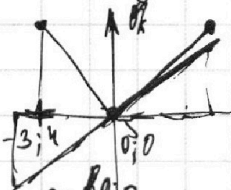
или $x^2+y^2=1$ - окружность центр $(0,0)$ $R=1$

$x^2+(y-12)^2=16$ окружность центр $(0,12)$ $R=4$

даны две окружности

$D = ax + y - 8b$ - уравнение касательной к окружности (вн. и внутр.)

$$D = \frac{ax_0 + y_0 - 8b}{\sqrt{a^2+1}}$$



$0 = 8b \Rightarrow b = 0$

$b = 4k \Rightarrow k = \frac{3}{4}$

$y = \frac{3}{4}x$

$y - \frac{3}{4}x = 0$

$D = \frac{4 + \frac{3}{4} \cdot 0}{\sqrt{\frac{16}{16} + 1}} = 5$

$D = \frac{16 + 0}{\sqrt{16 + 1}} = 5$

$$\begin{cases} 4 = \frac{|a \cdot 0 + 0 - 8b|}{\sqrt{a^2+1}} \\ 1 = \frac{|a \cdot 0 + 12 - 8b|}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{a^2+1} = |12-8b| \\ \sqrt{a^2+1} = |12-8b| \end{cases}$$

$$16(a^2+1) = 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 2b + 64b^2$$

$$a^2+1 = 64b^2 \Rightarrow 15a^2+15 = 144 - 64 \cdot 3b$$

$$\begin{cases} 4c = |12-8b| = 8|\frac{3}{4} - b| \\ c = |1-8b| \end{cases}$$

при $b \in (\frac{3}{4}, 1]$ $\begin{cases} 4c = 12-8b \\ c = -8b \end{cases} \Rightarrow 3c = 12 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow \sqrt{a^2+1} = 4 \Rightarrow a^2+1 = 16$

при $b \in [0, \frac{3}{4}]$ $\begin{cases} 4c = 8b-12 \\ c = -8b \end{cases} \Rightarrow 5c = 12 \Rightarrow c = \frac{12}{5} \Rightarrow \sqrt{a^2+1} = \frac{12}{5} \Rightarrow a^2+1 = \frac{144}{25} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{143}}{5}$

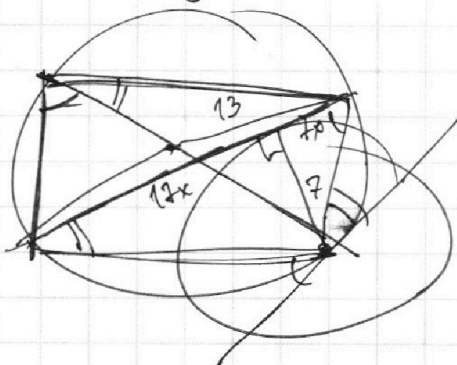
при $b \in (\frac{3}{4}, 1)$ $\begin{cases} 4c = 8b-12 \\ c = 8b \end{cases} \Rightarrow 3c = -12$ - невозможно

Ответ: $\pm \sqrt{15}, \pm \frac{\sqrt{143}}{5}$

НОД $(a+b; a^2-7ab+b^2)$

НОД $(a+b; -9ab)$

$(a-b)^2 = 5ab$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

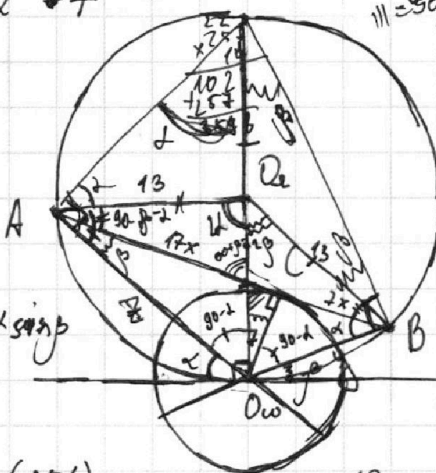
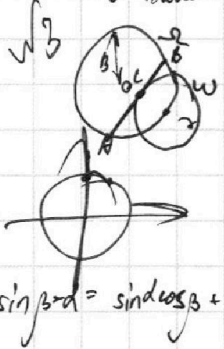
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a = 2^x 7^y$
 $b = 2^z 7^t$
 $c = 2^u 7^v$

$\begin{cases} x+y \geq 15 \\ y+z \geq 17 \\ x+z \geq 23 \end{cases}$
 $\begin{cases} x'+y' \geq 11 \\ y'+z' \geq 18 \\ z'+x' \geq 39 \end{cases}$

$ac: 2^{13} 7^{39}$
 $2x+2y+2z \geq 15+17+23$
 $x+y+z \geq 22,5 \Rightarrow x+y+z_{\min} = 23$



$y^2 = (7x)^2 + 49$
 $z^2 = 7^2 + (7x)^2$

$\frac{4}{\sin 2\beta} = \frac{13}{\sin(90-\beta)}$
 $\frac{13}{\sin 2\alpha} = \frac{13}{\sin(90-\alpha)}$

$13 = \frac{\sin 90^\circ \cdot y}{\sin \beta} = \frac{\cos \beta}{2 \sin \beta \cos \beta} = \frac{1}{2 \sin \beta}$

$13 = z / 2 \sin \alpha$
 $y \cdot 2 \sin \alpha = z \cdot 2 \sin \beta = 7$

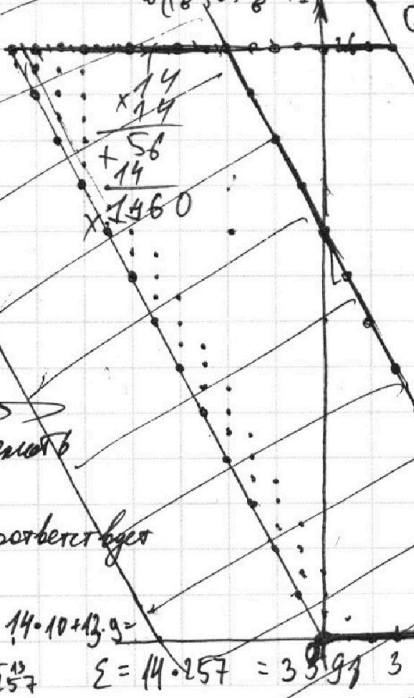
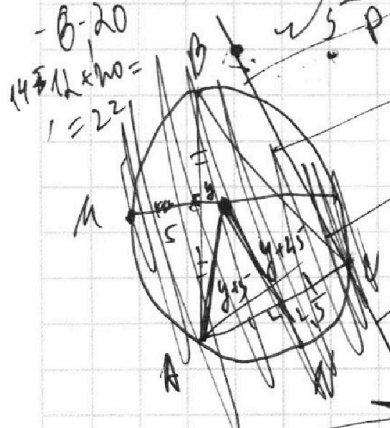
$\frac{24x}{\sin(2\alpha+\beta)} = \frac{13}{\sin(90-\beta\alpha)}$

$13 = 24x \cdot \frac{\cos(\beta+\alpha)}{2 \sin(\beta+\alpha) \cos(\beta+\alpha)} \Rightarrow 13 = \frac{24x}{2 \sin(\beta\alpha)}$

$24x \sin \alpha = z \sin \alpha \cos \beta + z \cos \alpha \sin \beta = z \sin \alpha \cos \beta + y \sin \alpha \cos \alpha$

$24x = z \cos \beta + y \cos \alpha$

$\frac{z}{\sin \alpha} = \frac{24x}{\sin(90-\alpha-\beta)} = \frac{24x}{\sin(\beta\alpha)} = \frac{z}{\sin \beta}$



$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_2 + y_2$
 $y_2 = 14 + 2x_2 + y_2 - 2x_2$

$(0, 14 + 2x_2 + y_2)$
 $(7 + x_2 + \frac{y_2}{2}, 0)$

$0 \leq 14 + 2x_2 + y_2 \leq 32$
 $-14 \leq 2x_2 + y_2 \leq 18$

$-14 - 2x_2 \leq y_2 \leq 18 - 2x_2$

Области где может лежать точка (x_2, y_2)
 Каждая точка (x_2, y_2) соответствует двум точкам (x_1, y_1)
 Каждая точка (x_2, y_2) : $14 \cdot 10 + 13 \cdot 9 = 140 + 90 + 27 = 230 + 27 = 257$

$\Sigma = 14 \cdot 257 = 3598$

$x+y = 15, 32$
 $z = 5$

$y+z = 17$
 $z = 12, 5$

$x+z = 23$
 $z = 5$

$32 - 2y = 23 \Rightarrow y = 4, 5$

$x = 10, 5$
 $z = 12, 5$