



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $t$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $t$ ?

- [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.

$a b c - ?$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow b < a < c$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a : 2 \text{ и } a : 7$$

$$b : 2 \text{ и } b : 7$$

$$c : 2 \text{ и } c : 7$$

Также заметили, что:

$$\begin{cases} ab^2c : 2^{32} \cdot 7^{29} \\ abc^2 : 2^{40} \cdot 7^{58} \\ a^2bc : 2^{38} \cdot 7^{50} \end{cases} \Rightarrow a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 : 2^{32+40+38} \cdot 7^{50+58+29}$$
$$a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 : 2^{110} \cdot 7^{137}$$

Т.к.  $a, b, c \in N$ , то  $abc \geq 0$

Найдём

целую часть с ограничением  
дополнительную скорость от  
деления по разрядам на 9

$$\begin{array}{r} 110 \quad | \quad 4 \\ -8 \quad \quad | \quad 27,5 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 20 \\ -20 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 137 \quad | \quad 4 \\ -12 \quad \quad | \quad 34,25 \\ \hline 17 \\ -16 \\ \hline 10 \\ -8 \\ \hline 20 \\ -20 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$a \cdot b \cdot c = : 2^{27,5} \cdot 7^{\frac{137}{4}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = 2^{28} \cdot 7^{35}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{35}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

670, Г.Р.  $a, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{a+b}{(a+b - 3\sqrt{ab})(a+b + 3\sqrt{ab})}$$

$$= \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} + 1}{\frac{a^2}{b^2} - 7 \frac{a}{b} + 1} = \frac{\left(\frac{a}{b} + 1\right) \cdot \frac{1}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7\left(\frac{a}{b}\right) + 1}$$

$$x = \frac{a}{b} \quad \text{нек}$$

$$\mathcal{D} = 49 - 4 = 45$$

$$\sqrt{\mathcal{D}} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} \vee -1$$

$$-7 - 3\sqrt{5} \vee -2$$

$$-7 - 3\sqrt{5} / 3\sqrt{5}$$

$$\frac{x+1}{b(x^2 - 7x + 1)} = \frac{x+1}{b(x^2 - 7x + 1)} = \frac{81\sqrt{5} - 5}{81\sqrt{5}}$$

$$\geq 1 \quad \frac{(x+1)}{b\left(x - \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)}$$

#

$0 < \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} \neq k \in \mathbb{Z}$ .

$$= \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{\left(\frac{a}{b} + 1\right)}{b\left(\left(\frac{a}{b} + 1\right)^2 - 9\frac{a}{b}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}{b}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

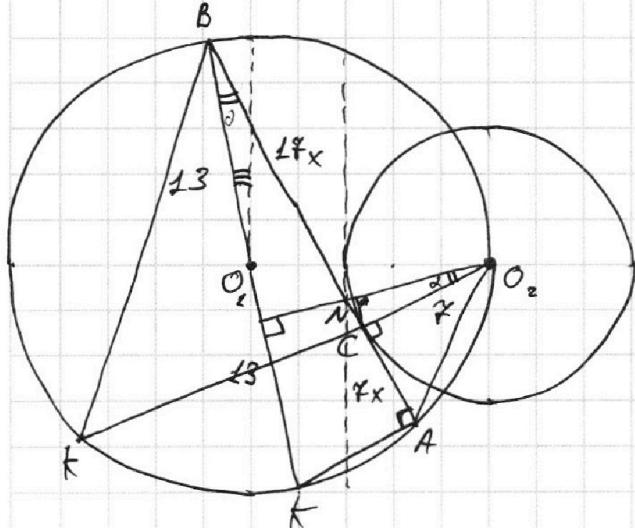
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AK}{AB} = \frac{NC}{O_2 C}$$

$B \in NCO_2$  и  
 $\triangle AKB$ :

$$\frac{x}{24x} = \frac{O_2 N}{26} \quad 1 \cdot 2$$

$$\frac{x}{12x} = \frac{O_2 N}{13}$$

$$AC \cdot BC = O_2 C \cdot CK$$

$AO_2 BK$  - грал.  $O_2 A \parallel BK$  (т.к.  $KO_2 \perp AB$ )  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AB = KO_2 \Rightarrow k = z$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 2} = 1 - g_x$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$\mathcal{D} = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

$$\sqrt{\mathcal{D}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Заметим, что } 3x^2 - 6x + 2 = (3x^2 + 3x + 2) -$$

$$= 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 2 = 1 - g_x$$

$$\text{Значит, } 1 - g_x = \left( (\sqrt{3x^2 - 6x + 2})^2 - (\sqrt{3x^2 + 3x + 2})^2 \right) = \\ = \left( \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 2} \right) \left( \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 2} \right)$$

Поставим

$$\left( \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 2} \right) \left( \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 2} - 1 \right) = 0$$

Тогда

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 2} & \sim -6x + 2 + 3x^2 = 3x^2 + 3x \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 2} = 1 & g_x = 1 \\ x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty) & x = \frac{1}{g} \end{cases}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cup \frac{1}{g}$$

$$\left(\frac{8}{9}\right)^2 \cup \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cup \frac{1}{g} \quad \frac{64}{81} > \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{g} \Rightarrow x = \frac{1}{g} - \text{непр.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 - 6x + 2 = \cancel{x} - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 2} + 3x^2 + 3x + \cancel{2}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 2} = 9x$$

$$9x \geq 0$$

$$285 \mid 5 \\ 88$$

$$x > 0$$

$$\frac{3}{69}$$

$$\frac{9}{276}$$

и.

$$4(3x^2 + 3x + 2) = 81x^2$$

$$12x^2 + 3x + 2 = 81x^2$$

$$69x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Delta = 9 + 4 \cdot 69 = 285$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{285}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{285}}{2 \cdot 69} = \frac{3 \pm \sqrt{285}}{138}$$

$$1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 2} > 0$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 2} < 1$$

$$3x^2 + 3x + 2 < 1 : 3$$

$$3x^2 + 3x + 2 < 0$$

$$x(x+1) < 0$$

$$\begin{cases} x \in (-1; 0) \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

Значит, реш. уравнения является  
т.к.  $x = \frac{2}{9}$

Ответ:  $\frac{2}{9}$



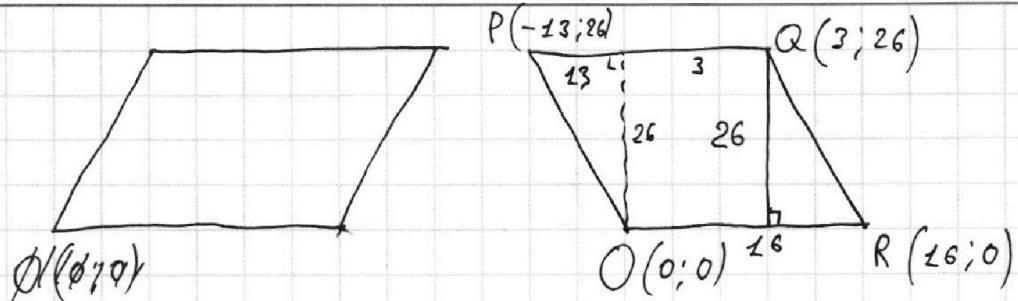
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_e + y_2 - y_e = 14 \quad 2(x_2 - x_e) + (y_2 - y_e) = 14$$

$$\vec{AB} \{x_2 - x_e; y_2 - y_e\} \quad y_2 - y_e = 14 + 2x_e - 2x_2$$

$$\vec{AB} \{x_2 - x_e; 14 + 2(x_e - x_2)\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 & \sim y = -ax + 8b \\ (x^2 + y^2 - 1) \left( x^2 + (y-12)^2 - 16 \right) \leq 0 \end{cases}$$

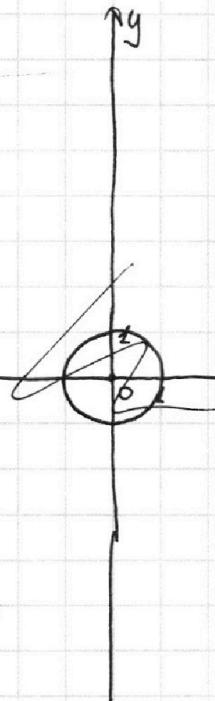
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$y = (\pm \sqrt{1-x^2}) \dots$$

$$\begin{cases} -\sqrt{1-x^2} + 8b = ax \\ \sqrt{1-x^2} = ax - 8b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2} = 8b - ax \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \leq 16 = 4^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 4^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + (y-12)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (-ax + 8b)^2 = 1 \\ x^2 + (-ax + 8b - 12)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & (-ax + 8b - 12 + ax - 8b) \cdot \\ & \quad (-2ax + 16b - 12) = 16 \end{aligned}$$

$$-2ax + 16b - 12 = \frac{16}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

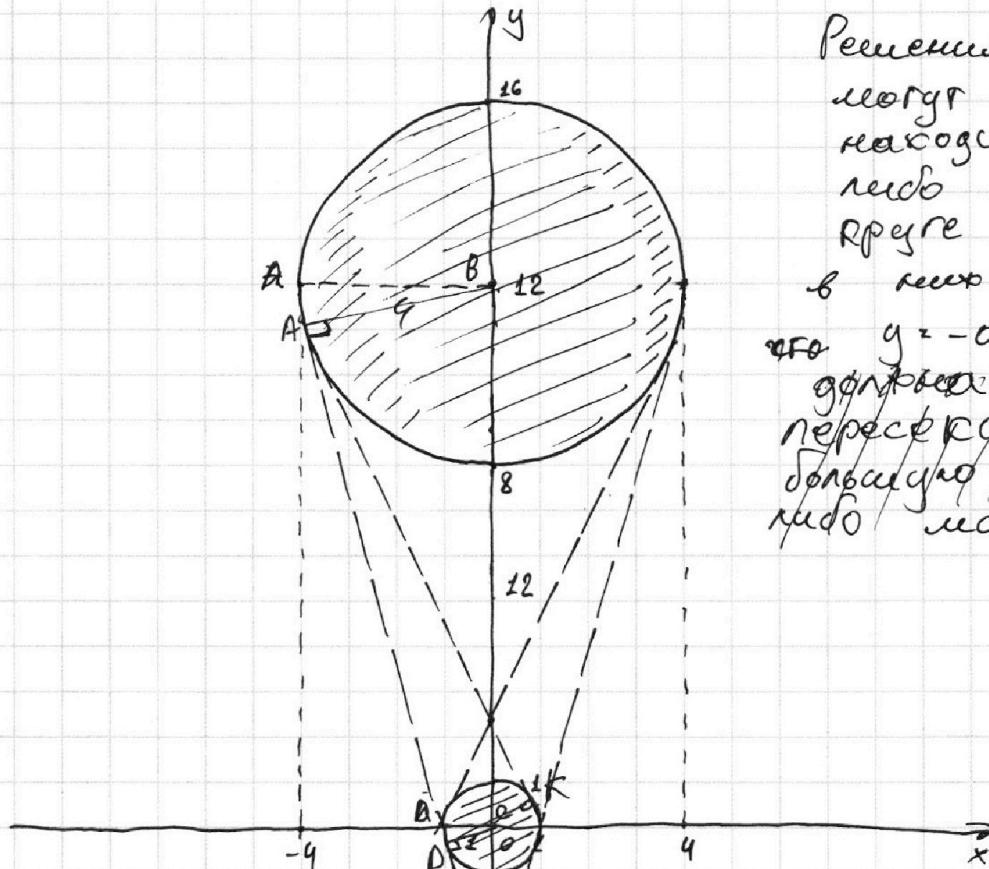
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение

Логотип  
находится в  
левой верхней  
половине, либо  
в левом краю  $\Rightarrow$

$$\text{УФО } y = -ax + b \text{ б}$$

должна  
пересекать, либо  
большую окружность  
либо маленькую

Значит, единственныему  
предмету соответствуют  
кассирующиеся  
2 решения.

Так как:

Если прямая  
кассирует окружность  
одно решение.

Если прямая  
ходит между  
окружностями  
пересекает  
окружности - 2 решения

$$*\left\{\begin{array}{l} y = -ax + b \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-12)^2 = 16 \end{array}\right.$$

$$y = kx + b$$

$$x^2 + kx^2 + b^2 + k^2 x^2 = 1$$

$$x^2 + (-ax + b)^2 = 1$$

$$y^2 - 24y + 144 - y^2 = 1 \quad x^2 + (-ax + b - 12)^2 = 16$$

$$24y = 120 \quad y = \frac{48}{8}$$

$$8y = 43$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

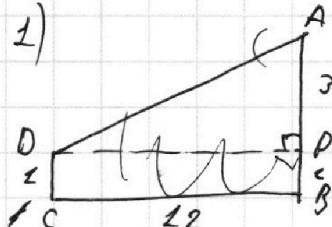
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

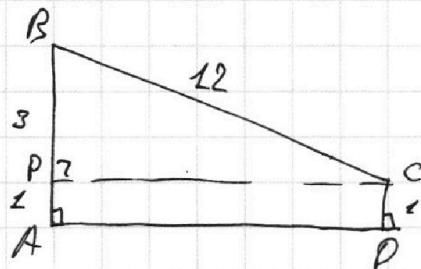
Рассл.

ABCD:

$$\begin{aligned}AB &= 9 \\BC &= 12 \\CD &= 1\end{aligned}$$



Найдём  $\operatorname{tg} \angle BCP - ?$



$$\sin \angle BCP = \frac{1}{\sqrt{145}} = \frac{1}{\sqrt{145}}$$

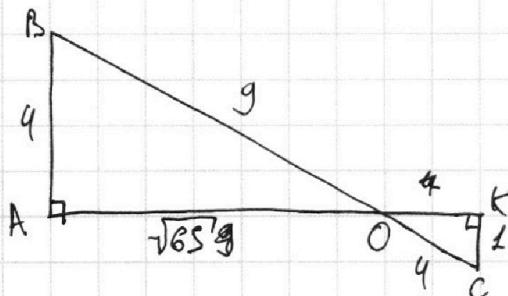
$$\cos \angle BCP = \frac{\sqrt{145}}{12} = \sqrt{1 - \frac{1}{145}}$$

$$\operatorname{tg} \angle BCP = \frac{1}{\sqrt{145}} = \pm \alpha$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{145}} = \pm \frac{\sqrt{145}}{145}.$$

$$\alpha = \pm \frac{\sqrt{145}}{145}.$$

2) KCAB



$\operatorname{tg} \angle BOA - ?$

$$\cos \angle BOA =$$

$$\operatorname{tg} \angle BOA = \frac{8}{\sqrt{65}} = \frac{8}{\sqrt{65}} = \pm \alpha$$

$$\alpha = \pm \frac{9}{\sqrt{65}}$$

Ответ:  $\alpha \in \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{145}}, \pm \frac{9}{\sqrt{65}} \right\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} &= \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{a+b}{(a+b - 3\sqrt{ab})(a+b + 3\sqrt{ab})} \\ &= \frac{a+b + 3\sqrt{ab} - 3\sqrt{ab}}{(a+b - 3\sqrt{ab})(a+b + 3\sqrt{ab})} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

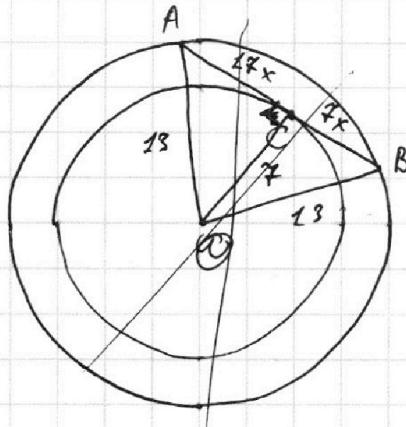
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



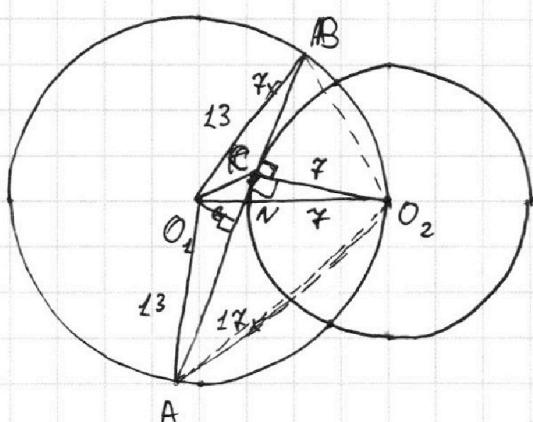
$$\frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{17}{7} \quad AB = 24x - ?$$

$$R_w = 7$$

$$R_y = 13$$

$OC \perp R_w \wedge AB \perp R_y$ .

$AB$  / ~~пифагор~~



$$O_1N = R_y - R_w =$$

$$= 13 - 7 = 6$$

Рассматривая  $\triangle O_1O_2K$ :

$$O_1O_2 = 13$$

$$KO_2 = 7$$

Проведём  $KO_2 \perp AB$

$$KO_2 \wedge AB = C$$

$$\angle ACO_2 = \angle KCB = 90^\circ.$$

$$= \frac{\angle CAO_2 + \angle KBC}{2} = >$$

$$\Rightarrow \angle CAO_2 + \angle KOB = 180^\circ$$

$$CO_2 \cdot KC = AC \cdot BC$$

$$KC = 17x^2$$

$$\angle CAB = \angle KO_2B, \text{ (поскольку вписанное)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle O_2BC \sim \triangle ACK \text{ (по острому углу)}$$

$$\Rightarrow \frac{CO_2}{AC} = \frac{BC}{KC} \quad \frac{7}{17x} = \frac{7x}{9}$$

