МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1. $abc - ?$

$ab \vdots 2^{15} \cdot 7^{11}$

$bc \vdots 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow \quad b < a < c$

$ac \vdots 2^{23} \cdot 7^{39}$

$a \vdots 2$ и $a \vdots 7$
$b \vdots 2$ и $b \vdots 7$
$c \vdots 2$ и $c \vdots 7$

Также заметим, что:

$$\begin{cases} ab^2c \vdots 2^{32} \cdot 7^{29} \\ abc^2 \vdots 2^{40} \cdot 7^{58} \\ a^2bc \vdots 2^{38} \cdot 7^{50} \end{cases} \Rightarrow a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 \vdots 2^{32+40+38} \cdot 7^{50+58+29}$$

$$a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 \vdots 2^{110} \cdot 7^{137}$$

Т.к. $a, b, c \in N$, то $abc \geq 0$

Найдём целую часть с округлением в большую сторону от деления показателя на 4

$110 : 4 = 27,5$ ($110 - 8 = 30$; $30 - 28 = 2$; $20 - 20 = 0$)

$137 : 4 = 34,25$ ($137 - 12 = 17$; $17 - 16 = 1$; $10 - 8 = 2$; $20 - 20 = 0$)

$a \cdot b \cdot c \vdots 2^{27,5} \cdot 7^{\frac{137}{4}} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = 2^{28} \cdot 7^{35}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{35}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. $b \neq 0$, т.к. $a, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})} =$$

$$= \frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{b}+\frac{1}{b}}{\frac{a^2}{b^2}-7\frac{a}{b}+1} = \frac{\left(\frac{a}{b}+1\right)\cdot\frac{1}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2-7\left(\frac{a}{b}\right)+1} =$$

$$x = \frac{a}{b}$$

x^2-7x+1

$D = 49-4 = 45$

$\sqrt{D} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{(x+1)\frac{1}{b}}{x^2-7x+1} =$$

$\cancel{\frac{7-3\sqrt{5}}{2} \vee -1}$

$7-3\sqrt{5} \vee -2$

$9 \vee 3\sqrt{5}$

$81 \vee 9\cdot 5$

$81 > 9\cdot 5$

$$= \frac{(x+1)}{b\left(x-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{x+1}{b(x^2-7x+1)}$$

$\geqslant 1$ <1

#

$0 < \cancel{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} < 1$

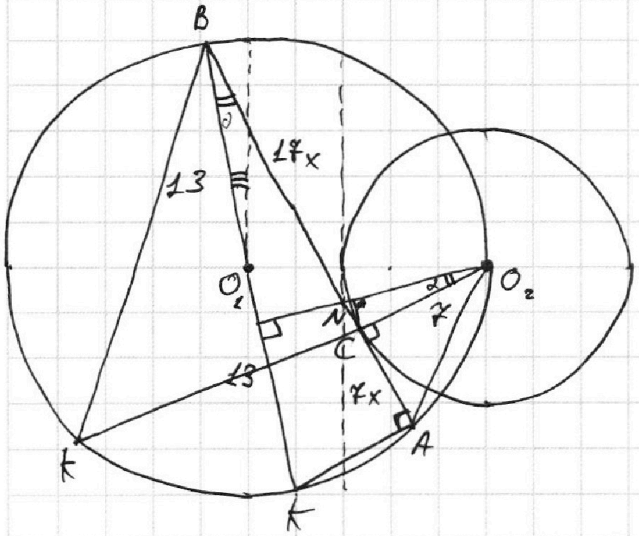
$$= \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{\left(\frac{a}{b}+1\right)}{b\left(\left(\frac{a}{b}+1\right)^2-9\frac{a}{b}\right)} =$$

$$= \cancel{\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}{}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$tg\alpha = \frac{AK}{AB} = \frac{NC}{O_2C}$

В $\triangle NCO_2$ и $\triangle AKB$:

$\frac{7}{24x} = \frac{O_2N}{26} \mid \cdot 2$

$\frac{7}{12x} = \frac{O_2N}{13}$

$AC \cdot BC = O_2C \cdot CK$

AO_2BK – трап. $O_2A \parallel BK$ (т.к. $KO_2 \perp AB$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = KO_2 \Rightarrow k = 1$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$$

$3x^2-6x+2=0$

$D=36-4\cdot3\cdot2=12$

$\sqrt{D}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$x_{1,2}=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{2\cdot3}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}=1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$3x^2+3x+1=0 \quad x\in R$

$D=9-4\cdot3<0$

ОДЗ:

$3x^2-6x+2\geqslant0$

$3x^2+3x+1\geqslant0$

$x\in\left(-\infty;1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[1+\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

Заметим, что $3x^2-6x+2-(3x^2+3x+1)=$

$=\cancel{3x^2}-6x+2-\cancel{3x^2}-3x-1=1-9x$

Значит, $1-9x=\left(\left(\sqrt{3x^2-6x+2}\right)^2-\left(\sqrt{3x^2+3x+1}\right)^2\right)=$

$=\left(\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}\right)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)$

Подставим

$\left(\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}\right)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}-1\right)=0$

Тогда

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{3x^2-6x+2}=\sqrt{3x^2+3x+1}\\ \sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1\end{array}\right.\\ x\in\left(-\infty;1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{3}}+1;+\infty\right)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow -6x+2+\cancel{3x^2}=\cancel{3x^2}+3x+1$

$9x=1$

$x=\frac{1}{9}$

$1-\frac{1}{\sqrt{3}}\vee\frac{1}{9}$ $\qquad \left(\frac{8}{9}\right)^2\vee\frac{1}{3}$

$\frac{8}{9}\vee\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad \frac{64}{81}>\frac{1}{3}\Rightarrow1-\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{9}\Rightarrow x=\frac{1}{9}$ - корень

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{3x^2} - 6x + \cancel{2} = \cancel{1} - 2\sqrt{3x^2+3x+1} + \cancel{3x^2} + 3x + \cancel{1}$$

$$2\sqrt{3x^2+3x+1} = 9x$$

$9x \geq 0$

$x > 0$

$$4(3x^2+3x+1) = 81x^2$$

$$12x^2+3x+1 = 81x^2$$

$$69x^2 - 3x - 1 = 0$$

$69 \cdot 4 = 276$

$285 \mid 5$

57

$$D = 9 + 4\cdot 69 = 285$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{285}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{285}}{2\cdot 69} = \frac{3 \pm \sqrt{285}}{138}$$

$$1 - \sqrt{3x^2+3x+1} > 0$$

$$\sqrt{3x^2+3x+1} < 1$$

$$3x^2+3x+\cancel{1} < \cancel{1} \quad | : 3$$

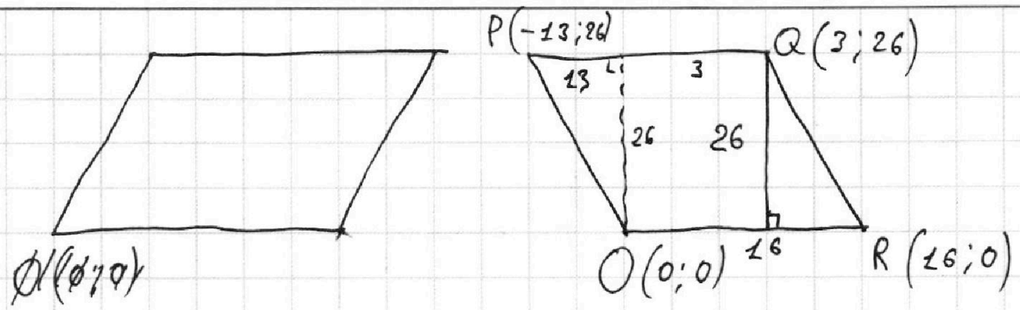
$$x^2 + x < 0$$

$$x(x+1) < 0$$

$$\begin{cases} x \in (-1;0) \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$$

Значит, реш. уравнения является ед. корень $x = \frac{1}{9}$

Ответ: $\frac{1}{9}$



$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$

$y_2 - y_1 = 14 + 2x_1 - 2x_2$

$\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}$

$\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1;\ 14 + 2(x_1 - x_2)\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

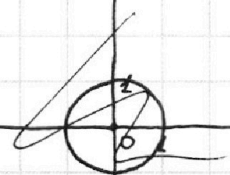
6.

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \Rightarrow y=-ax+8b \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\leq 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-1\geq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2-1\leq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ x^2+(y-12)^2 \leq 16=4^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+(y-12)^2 \geq 4^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \cancel{y=-ax+8b} \\ \cancel{x^2+y^2=1} \end{cases}$$

$\cancel{y=(\pm\sqrt{1-x^2}}$ ..



$$\begin{cases} \cancel{y=-ax+8b} \\ \cancel{x^2+(y-12)^2=4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+(-ax+8b)^2=1 \\ x^2+(-ax+8b-12)^2=16 \end{cases}$$

$(-\cancel{ax}+\cancel{8b}-12+\cancel{ax}-\cancel{8b})\cdot(-2ax+16b-12)=15$

$-2ax+16b-12=\frac{15}{-12}$ $\frac{5}{4}$

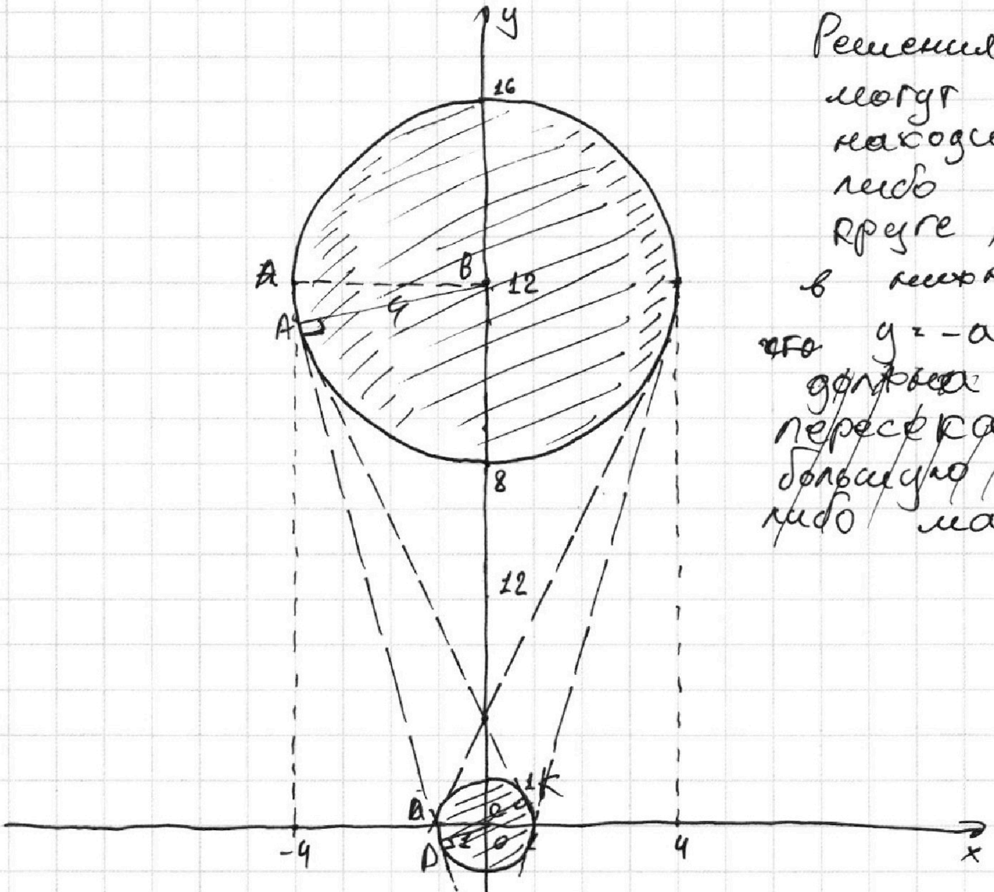
$$\left[\begin{array}{l} -\sqrt{1-x^2}=8b-ax \\ \sqrt{1-x^2}=ax-8b \end{array}\right.$$

$\cancel{1-x^2=8b-ax}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решения могут находиться, либо в верхнем круге, либо в нижнем => ~~что~~ $y = -ax + 8b$ ~~должна~~ ~~пересекать, либо большую окружность либо маленькую~~

Значит, единственными возможными прямыми будут, прямые касающиеся обеих окружность, – 2 реш.

Так как:

Если прямая касается одной окружности – 1 реш.

Если ~~р~~ прямая пересекает хотя бы одну окружность – интервал

$$*\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-12)^2 = 16 \end{cases} \qquad y = kx + b \qquad x^2 + kx^2 + bkx + b^2 = 1$$

$$\begin{cases} x^2 + (-ax + 8b)^2 = 1 \\ x^2 + (-ax + 8b - 12) = 16 \end{cases}$$

$\cancel{y^2} - 24y + 144 - \cancel{y^2} = 15$

$24y = 129 \quad | :3$

$8y = 43 \qquad y = \frac{48}{8}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

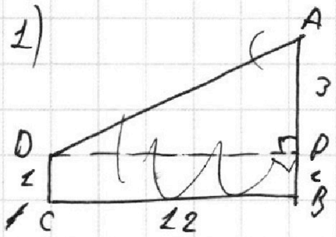
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

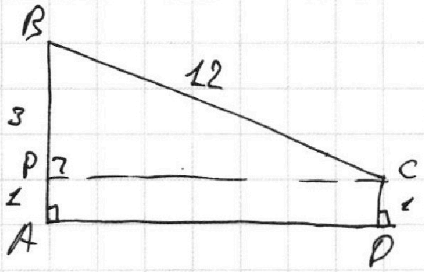
Рассм. $ABCD$:

~~$AB = 4$, $BC = 12$, $CD = 1$~~

1)



Найдём $tg\angle BCP$ - ?



$\sin\angle BCP = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$\cos\angle BCP = \frac{\sqrt{15}}{4} = \sqrt{1-\frac{1}{16}}$

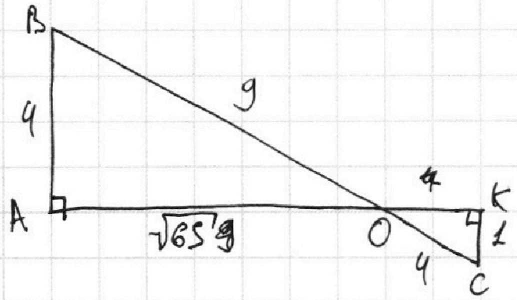
$tg\angle BCP = \frac{1}{\sqrt{15}} = \pm a$

$a = \pm\frac{1}{\sqrt{15}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{15}$

$a = \pm\frac{\sqrt{15}}{15}$

2) $KCAB$

$tg\angle BOA$ - ?



~~$\cos\angle BOA =$~~

$tg\angle BOA = \frac{4}{\sqrt{65}} = \pm a$

$a = \pm\frac{4}{\sqrt{65}}$

Ответ: $a \in \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{15}};\ \pm\frac{4}{\sqrt{65}}\right\}$

2.

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}=\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}=\frac{a+b}{\left(a+b-3\sqrt{ab}\right)\left(a+b+3\sqrt{ab}\right)}=$$

$$=\frac{a+b+3\sqrt{ab}-3\sqrt{ab}}{\left(a+b-3\sqrt{ab}\right)\left(a+b+3\sqrt{ab}\right)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

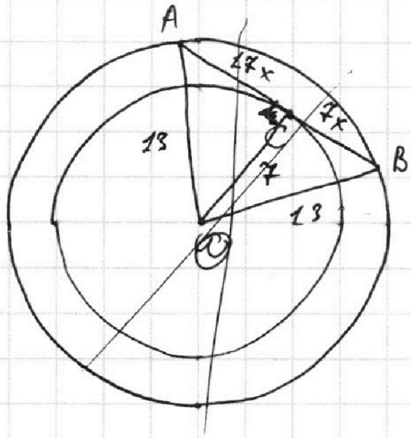
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$ $\qquad AB = 24x$ – ?

$R_\omega = 7$

$R_\gamma = 13$

~~$OC = R_\omega \perp AB$, т.к.~~

~~AB касается~~

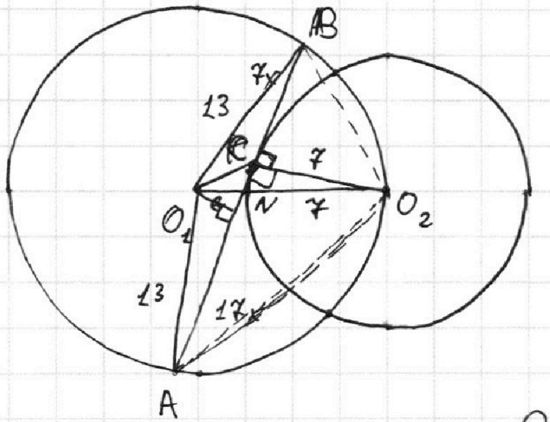
$O_1N = R_\gamma - R_\omega =$

$= 13 - 7 = 6$

~~Рассм. ΔO_1O_2K:~~

~~$O_1O_2 = 13$~~

~~$KO_2 = 7$~~



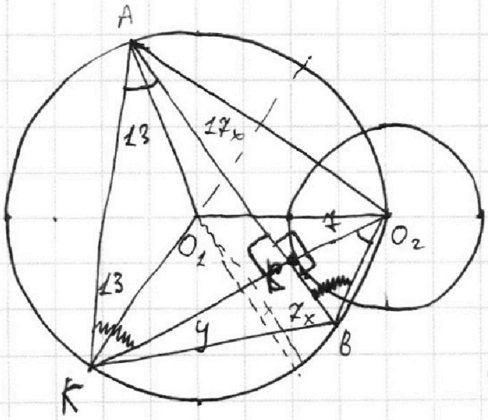
Проведём $KO_2 \perp AB$

$KO_2 \cap AB = C$

$\angle ACO_2 = \angle KCB = 90° =$

$= \frac{\cup AO_2 + \cup KB}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AO_1O_2 + \angle KO_1B = 180°$



$CO_2 \cdot KC = AC \cdot BC$

$KC = 17x^2$

$\angle KAB = \angle KO_2B$, (как углы вписанные) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta O_2BC \sim \Delta AKC$ (по острому углу) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CO_2}{AC} = \frac{BC}{KC} \qquad \frac{7}{17x} = \frac{7x}{y}$