



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем t могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на t ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№

Рассмотрим $a^2 b^2 c^2$:

$$a^2 b^2 c^2 : a^2 c^2 = 2^{15+2} \cdot 7^{39+2} = 2^{17} \cdot 7^{41} \Rightarrow b(a^2 b^2 c^2) \text{ не содержит}$$

хотя бы 6 7^{41} -степеней

$$a^2 b^2 c^2 = ab \cdot bc \cdot ac : 2^{15+2} \cdot 2^{17+23} = 2^{55} \Rightarrow b(a^2 b^2 c^2) \text{ содержит}$$

хотя бы 6 55 степени. Т.к. $(abc)^2$ - квадрат натураль-

ного числа, то должно содержаться там в чётной сте-

пени, т.е. хотя бы $6 \cdot 56 = 6(abc)^2 \geq 2^{58} \cdot 7^{41}$, т.к. 24 не делится

$$\text{на } 6 \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{38}$$

Приведём пример, когда $abc = 2^{28} \cdot 7^{38}$:

$$a = 2^{10} \cdot 7^{21}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{18}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{21} : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{38}$$

$$bc = 2^{18} \cdot 7^{18} : 2^{18} \cdot 7^{18}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{38}$$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{38}$



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

Рассмотрим, что можно.

Найдём наименьшее m , на которое можно сократить дробь, обратную данной (это будет равно то все m , что и в условии, т.к. дроби $\frac{x}{y}$ и $\frac{y}{x}$ симметричны на одни и те же числа)

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b}, \text{ тогда}$$

$m = \text{НОД}(9ab, a+b)$. Если $m > 9$, то $\text{НОД}(ab, a+b) > 1$.

Покажем, что это невозможно.

$$\begin{aligned} \text{НОД}(ab, a+b) &= \text{НОД}(ab - b(a+b), a+b) = \text{НОД}(-b^2, a+b) \\ &= \text{НОД}(b^2, a+b) \end{aligned}$$

Пусть $\text{НОД}(b^2, a+b) > 1$, тогда p — общий простой делитель b^2 и $a+b \Rightarrow b^2 \mid p \Rightarrow b \mid p$ в силу простоты p . $(a+b) \nmid p$,
 $b \mid p \Rightarrow a \mid p \Rightarrow \text{НОД}(ab) = p \Rightarrow 1 - \text{вс}, \text{ т.е. тогда дробь} -$
 $\text{вс}, \text{ т.к. в этом случае дробь } \frac{a}{b} \text{ сократим на } p \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{НОД}(ab, a+b) = 1 \Rightarrow m \leq 9$. На $m=9$ есть пример:

$$a=7, b=11.$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{18}{369}, 18 \mid 9; 369 \mid 9$$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:
 $\omega(O_1; 7)$
 $\Omega_2(O_2; 13)$
 $AB \in \omega$
 $O_1 \in \omega$
 $AB \cap \omega = C$

$$AC : BC = 17 : 7$$

AB - ?

$\angle O_1CA = 90^\circ$, т. к. AB - касательная

$$JB = 7x, AC = 17x.$$

$$\angle BO_1A = \alpha, \angle CO_1B = \beta, \angle CO_1A = \gamma.$$

$$\text{По теореме синусов } \frac{AB}{\sin \alpha} = 2 \cdot R_2 = 26 = \frac{24x}{\sin \alpha}$$

По теореме Пифагора:

$$O_1A = \sqrt{49 + 289x^2}$$

$$O_1B = \sqrt{49 + 49x^2} = 7\sqrt{x^2 + 1}$$

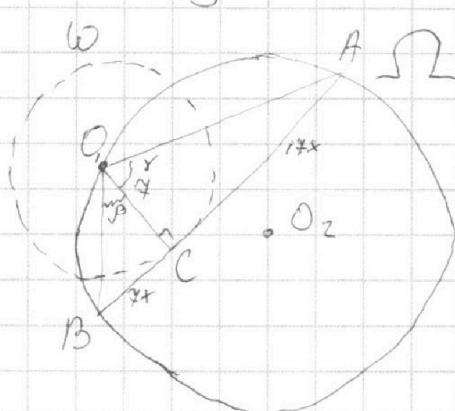
$$\sin \beta = \frac{7x}{7\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \cos \beta = \frac{1}{7\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \sin \gamma =$$

$$= \frac{17x}{\sqrt{49 + 289x^2}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{49 + 289x^2}} \Rightarrow \sin \alpha = \sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma +$$

$$+ \sin \gamma \cos \beta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{49 + 289x^2}} + \frac{17x}{\sqrt{49 + 289x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{24x}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{49 + 289x^2}}$$

$$\frac{24x}{\sin \alpha} = 26 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{24x}{26} = \frac{24x}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{49 + 289x^2}}$$

$$\sqrt{(x^2 + 1)(289x^2 + 49)} = 26$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x^2 + 1)(289x^2 + 49) = 676$$

$$289x^4 + 338x^2 + 49 = 676$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$\text{Dy} = x^2$$

$$289\cancel{x^2} + 338\cancel{x^2} - 627 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 169^2 + 627 \cdot 289 = 209764$$

$$y = \frac{-169 + \sqrt{209764}}{289}$$

$$y = \frac{-169 - \sqrt{209764}}{289} < 0 \rightarrow \text{н.т.к. } y \text{ - квадрат единого отр.}$$

$$y = \frac{458 - 169}{289} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \rightarrow \text{н.т.к. } x -$$

$$\text{длина отрезка} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 2x = 2$$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$a = 3x^2 - 6x + 2$, $b = 3x^2 + 3x + 1$, $c = 1 - 9x$, тогда:

$$a - b = c$$

$$\text{Заметим, что } a^2 - b^2 = 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 =$$

$$= 1 - 9x = c$$

$$\begin{cases} a - b = c \\ a^2 - b^2 = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = c \\ c(a+b) = c \end{cases}$$

Пусть $c \neq 0$, случай $c = 0$ рассмотрим отдельно.

$$1 - 9x = 0$$

$$x = \frac{1}{9} \quad \text{Рассмотрим в маш. ур-е: } \sqrt{\frac{3x^2 - 6}{9} + 2} - \sqrt{\frac{3}{9} + \frac{3x+1}{9}} = \\ = \sqrt{\frac{3x^2}{9}} - \sqrt{\frac{3x+1}{9}} = 0 = 1 - \frac{9}{9} \Rightarrow x = \frac{1}{9} \text{ корень.}$$

если $c \neq 0$:

$$a + b = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1 \quad (*)$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} \geq 3(2x^2 - x + 1) =$$

$$= 3 \left(\left(x\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{3}{8} \right) \geq 3 \cdot \frac{7}{8} > 1 \Rightarrow (*) \text{ не имеет корней.}$$

$\Rightarrow a + b = 1$ не имеет корней $\Rightarrow x = \frac{1}{9}$ - ед. корень. Ответ: $\frac{1}{9}$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} x \cdot a + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1) (x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

решение

Чтобы решить систему неравенств на коорд. плоскости.
т.к. $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + (y-12)^2 = 16$ задают окружности с центрами $(0; 0)$ и $(0; 12)$ соответственно \Rightarrow эти окружности не пересекаются \Rightarrow неравенства задаются 2 круга, ограниченные этими окружностями.

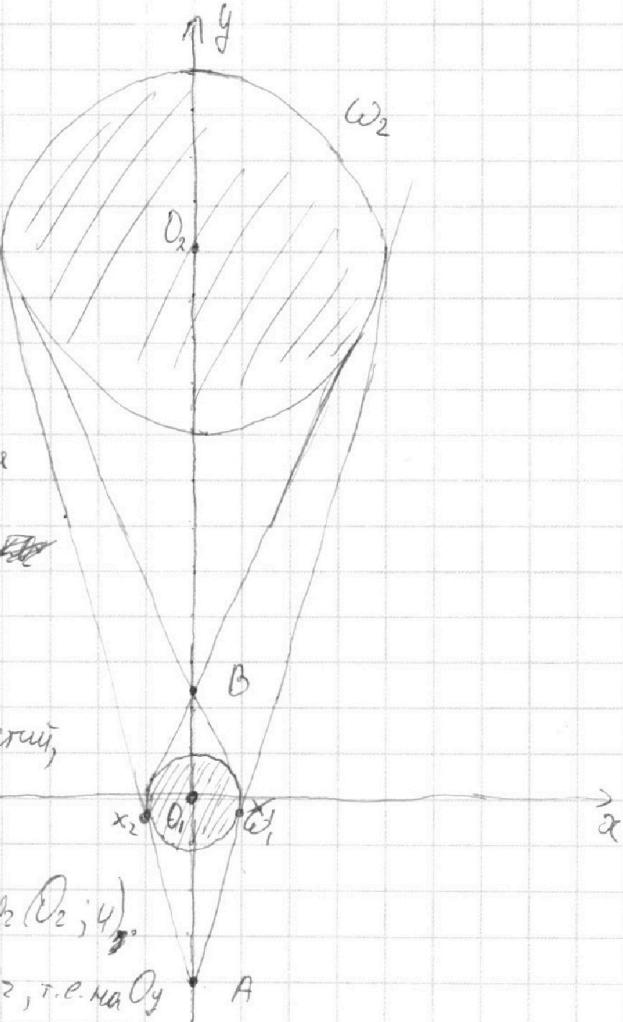
Еще $y = 8b - ax$ задает прямую, при этом, она будет пересекать отмеченную зону в 2-х точках только если будет иметься общая касательность.

Решение А и В - точки пересечения

боковых, внешних и внутр. касат. соотв. При этом

А, В будут центрами гомотезий, переводящих один круг в другой, обозначим круги за $\omega_1(O_1; 1)$, $\omega_2(O_2; 4)$.

Решение А и В лежат на O_1O_2 , т.е. на Оу



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найдём координаты А и В. $\exists A(0; y_1), B(0; y_2)$

By гипотезам:

$$\frac{AO_1}{AD_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{4} = \frac{-y_1}{-y_1 + 12}$$

$$y_1 = -4$$

$$\frac{BO_1}{BD_2} = \frac{y_2}{12 - y_2} = \frac{1}{4}$$

$$y_2 = \frac{12}{5} = 2,4.$$

Рассмотрим $X_1(x; y)$ - точка касания ω_1 с внеш. кас., тогда
 $X_2(x; -y)$ - точка кас. со второй внеш. кас. из симметрии
относит. $Og.$ Решение ~~показано~~.

$\angle OAH \angle XA = 90^\circ$ в силу касания $\Rightarrow \vec{OX}_1 \cdot \vec{AX}_1 = 0$

$$\vec{OX}_1(x; y), \vec{AX}_1(x; y+4)$$

$$\vec{AO} \cdot \vec{OX}_1 = x^2 + y^2 + 4(y-4) = x^2 + y^2 + 4y = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1, \text{ т.к. } X \in \omega_1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4y = 1 + 4y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt{1-y^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$x = -\sqrt{1-y^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Найдём уравнение $(OX)_2 \subset \omega_2 (AX_1)$:

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{y+4}{-\frac{1}{4} + 4}$$

$$y + 4 = \frac{15}{4} x \cdot \frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$y = x\sqrt{15} - 4$$

Аналогично, $(AX_2): y = -x\sqrt{15} - 4$. Таким образом,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Мы получили, что $a = \pm \sqrt{157}$, если $y = 8b - ax$ -
внешняя касательная.

Рассмотрим случай, если $y = 8b - ax$ - внутр. общ. кас.

Пусть $X_3(x; y)$, $X_4(-x; y)$ - точки касания ω , с

2-м лн внутр. кас. Тогда $\vec{BX_3} \cdot \vec{OX_3} = 0$.

$$\vec{BX_3}(x; y - 2, 4), \vec{OX_3}(x; y).$$

$$\vec{BX_3} \cdot \vec{OX_3} = x^2 + y(y - 2, 4) = x^2 + y^2 - 2, 4y = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 1 - 2, 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2, 4} = \frac{5}{12} \Rightarrow \cancel{x^2 + y^2 = 1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{1 - \frac{25}{144}} = \frac{12}{13} \\ x = -\sqrt{\frac{25}{144}} = -\frac{12}{13} \end{cases} \quad \Rightarrow X_3\left(\frac{12}{13}; \frac{5}{12}\right), X_4\left(-\frac{12}{13}; \frac{5}{12}\right).$$

(BX_3) :

$$\frac{x+2, 4}{12} = \frac{y-2, 4}{5-2, 4}$$

$$y - 2, 4 = -\frac{154x}{720} x$$

$$y = -\frac{154x}{720} x + 2, 4$$

(BX_4) :

Аналогично, (BX_4) : $y = \frac{154x}{720} x + 34 \Rightarrow$ Если $y = 8b - ax$

внутренняя общая касательная, то $a = \pm \frac{154x}{720}$.

Второе условие:

$$\begin{cases} a = \sqrt{157} \\ a = -\sqrt{157} \\ a = \frac{154x}{720} \\ a = \frac{800}{720} - \frac{154x}{720} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{157}, -\sqrt{157}, \frac{154x}{720}, -\frac{154x}{720}$$



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

n 7

DANO:

$\triangle ABC$ вписан в ω

M - сер. $\angle AIB$

N - сер. $\angle ACB$

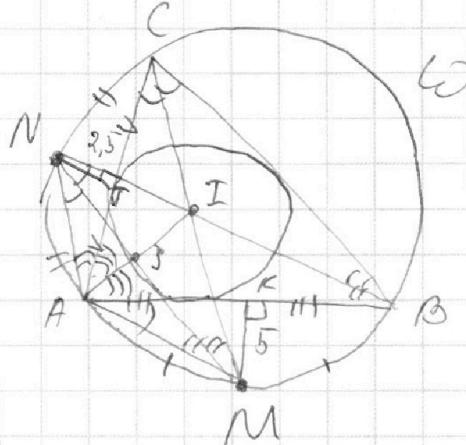
$\overline{NT} \perp \overline{AC}$, $T \in AC$

$$NT = 2,5$$

$K \mid MK \perp AB$, $K \in AB$

$$MK = 5. I - \text{инциент}$$

$$AT - ?$$



CM, BN - биссектрисы, т.к.

M, N - серед. угл. Гакуне.

M лежит на середине \overarc{AB} .

$AB \xrightarrow{\text{т.к. } M\text{-середина}} AR = KB$, аналогично

$$CT = AT$$

$I \in NB, I \in CM$, т.к. I -точка

пересеч. биссектрис. Получим о треугольнике:

$$MI = AM, NI = AN \rightarrow AB = a, AC = b, \text{ тогда } AR = \frac{a}{2}$$

$$AT = \frac{b}{2} \Rightarrow AM = MI = \sqrt{25 + \frac{a^2}{4}}, AN = NI = \sqrt{25 + \frac{b^2}{4}}$$

$$= \sqrt{6,25 + \frac{b^2}{4}}$$

MN - сер. лнр. к $AI \Rightarrow \angle AMN = \angle NMI = \angle AIB$

$= \angle NBC = \beta, \angle ANM = \angle INM = \angle ACM = \angle ABC$

$= \angle BCM = \alpha, AM = \frac{5}{\sin \alpha}, AN = \frac{2,5}{\sin \beta}, \exists MN \cap AI = S$

$$AS = AM \cdot \sin \beta = \frac{5 \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Rightarrow AI = \frac{10 \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}}{\sin \beta} = \frac{10 \cdot \frac{5}{2,5}}{\sin \beta} = 20$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 ab &\geq 2^{15} \cdot 7^4, \quad bc \geq 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39} \\
 ab &\geq 2^{15} \cdot 7^4 \\
 bc &\geq 2^{17} \cdot 7^{18} \\
 ac &\geq 2^{23} \cdot 7^{39} \\
 abc &\geq 2^{15+17+23} \cdot 7^{4+18+39} = 2^{55} \cdot 7^{61} \\
 ab^2c^2 &\geq 2^{45} \cdot 7^{68} \\
 ab &\geq 2^{15} \cdot 7^4 \\
 b &\geq 2^5 \cdot 7^4 \\
 a &\geq 2^{10} \\
 1) ac &\leq 2^{23} \cdot 7^{34} \\
 a &= 2^5 \cdot 7^4 \\
 c &= 2^3 \cdot 7^{35} \\
 abc &\geq 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot b \\
 abc &\geq 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot 2^5 \cdot 7^4 = 2^{28} \cdot 7^{39} \cdot mk \\
 b^2 \cdot n &= \frac{mk}{2 \cdot 7^{10}} \\
 b^2 &= \frac{mk}{2 \cdot 7^{10} \cdot n} \\
 (abc)^2 &\geq mnk \cdot 2^{55} \cdot 7^{68} \\
 ab &\geq b \cdot (abc)^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{28} \\
 a &\geq 2^{17} \cdot 7^{18} \\
 abc^2 &\geq 2^{40} \\
 a &\geq 2^{15} \cdot 7^4 \\
 abc^2 &\geq 2^{46} \cdot 7^{48} \cdot b^2 \\
 abc &\geq 2^{46+23} \cdot 7^{39+48} \cdot b \geq 2^{69} \cdot 7^{87} \\
 \sqrt{3x^2 + 3x + 1} &= \sqrt{3x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 + (3-2\sqrt{3})x} \\
 2x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 &= 4x + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

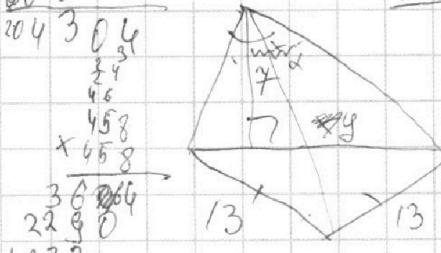
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} & 468 \\ \times & 469 \\ \hline & 44 \\ & 13 \\ & 36 \\ \hline & 438 \\ \times & 438 \\ \hline & 3504 \\ & 1314 \\ & 1462 \\ \hline & 191844 \end{array}$$

$$(191844) \cancel{\sqrt{x^2 + (17x^2 + 7)^2}} = 1964$$

$$\begin{array}{r} 576x^2 + 452 \\ \times 452 \\ \hline 2904 \\ 23588 \\ \hline 1808 \\ \frac{304}{516g} = 13 \end{array}$$

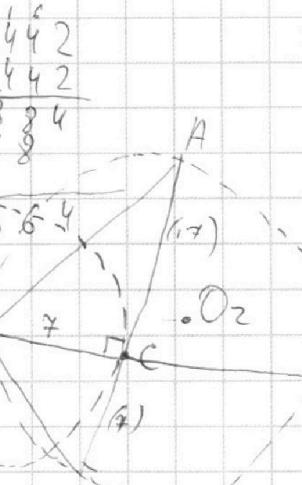


$$209764 \quad 2 \cdot 169 - 2 \cdot 169 \cdot \cos 2\alpha$$

$$17^2 + 9^2 = 2 \cdot 17 \cdot 9 \quad \frac{-958}{289}$$

$$17^2 - 9^2 = 0$$

$$209764$$



$$7x + 19x + 119x^2$$

$$4 \cdot 49 = 196$$

$$704$$

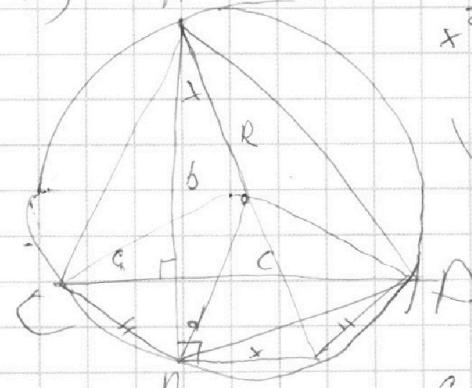
$$198$$

$$17x^2 + 7$$

$$x^2 + (b+d)^2 =$$

$$\sqrt{99 + 17^2 x^2}$$

$$x^2 + y^2$$



$$a, R \rightarrow \frac{b}{d}$$

$$b+d = 2R \cdot \sin \alpha$$

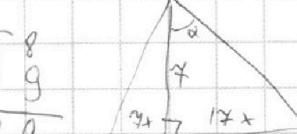
$$a \cdot c \cancel{+ b} = bd$$

$$\sin \alpha = \sqrt{17 +}$$

$$\sqrt{99 + 2297}$$

$$627$$

$$289$$



$$\frac{33912}{17} + 169$$

$$\begin{array}{r} 169 1254 \\ + 169 181203 \\ \hline 1014 28561 \\ \hline 28561 \end{array}$$

$$9209764$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 + 3x + 1 = \left(x\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0,25 \geq \frac{3}{4} + 0,25$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3x^2 + 3x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{(3x^2 + 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1$$

$$3(2x^2 - x + 1)$$

$$2x^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot x + 1 = \left(x\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \frac{x}{8}$$

$$4, 7$$

$$\text{НОД}(ab, a+b) =$$

$$\frac{4+89}{16-7 \cdot 89} = \frac{11}{131}$$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{98} + \frac{1}{49}$$

$$4+89 \quad 16-7 \cdot 89 = 131$$

$$ab = k(a+b)$$

$$(a+b)(a+b+1) - 1 = \frac{15}{16-28 \cdot 11 + 121}$$

$$ab = ka + kb$$

$$\frac{18}{2490 - 7 \cdot 7 \cdot 11 + 121} = 121$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ - 308627 \\ \hline - 286427 \end{array}$$

$$ab - ak = kb \quad 170 - 539$$

$$a(b-k) = kb$$

$$\begin{array}{r} 539 \\ 170 \\ \hline 369 \end{array}$$

$$\frac{a(b-k)}{b-k} = \frac{k}{b-k}$$

$$ab - b(a+b) =$$

$$= -b^2, \quad a+b$$

$$b^2, \quad a+b$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2(x_1 - x_2) + y_1 - y_2 = 14$$

$$y = 26$$

$$y = 0$$

$$\frac{x - 16}{3 - 16} = \frac{4x}{26}$$

$$-y = 20x - 32$$

$$26x - 16 \cdot 26 = -13y$$

$$y = 32 - 2x$$

$$(-13; 26)$$

$$(3; 26)$$

$$9x + y - 8b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2)$$

$$0; 0$$

$$16; 0$$

$$\frac{x}{-13} = \frac{y}{26}$$

$$B_2$$

$$A(7; 3)$$

$$y = -2x$$

$$2x_1 + y_1 = 14 \quad 3 = 0_{12}$$

$$C(3, 0)$$

$$y = -2x + 32$$

$$2x_2 + y_2 = B$$

$$\begin{cases} y \geq -2x \\ y \leq -2x + 32 \\ y \leq 26 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$2x_1 + y_1 > 0$$

$$2x_1 + y_1 - (2x_2 + y_2) = 14$$

$$2x_1 + y_1 \geq 0 \quad -(2x_2 + y_2) \leq 0$$

$$-32$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

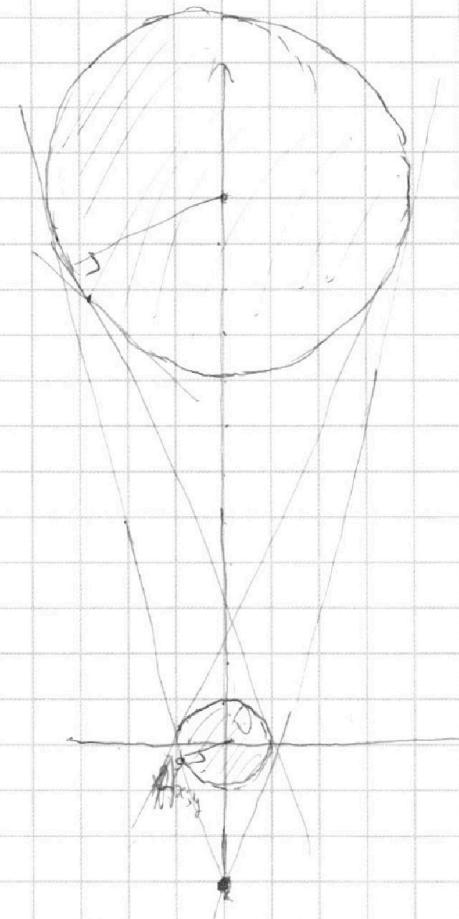
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~AOB~~
 $\vec{OA}(x; y)$

$$y =$$

$$\frac{5}{12} - \frac{12}{5} = \frac{25 - 144}{60} = \frac{-119}{60} \cdot \frac{13}{12}$$

420

$$\begin{array}{r} & 2 \\ \times & 119 \\ \hline 119 \\ \hline 1547 \end{array}$$