



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1

$$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$\Rightarrow (abc)^2: 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53} \Rightarrow abc: 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

при делении показателя степени на 2 приходится округлять вверх т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$ и степени с ~~нечетными~~ не натуральными показателями быть не может

Погда $2^1, 2^1, 2^7$ — минимальные степени, проверим, что их возможно получить

$$x = 2^{m_x} \cdot 3^{n_x} \cdot 5^{k_x} \text{ (введем } m, n, k)$$

$$\text{при } m_a = 7, m_b = 2 \text{ и } m_c = 12 \quad \sum_{i=1}^3 m_i = 21, \quad m_a + m_b = 9 \geq 9, \quad m_b + m_c = 14 \geq 14$$

и $m_a + m_c = 19 \geq 19$

$$\text{также можно подобрать и } n_a = 8, n_b = 2, n_c = 11$$

$$\text{с } k \text{ будут проблемы, т.к. } \min(k_a + k_b + k_c) = 27, \text{ а } k_a + k_c \geq 30$$

$$\text{минимальное } k_a + k_c = 30, \text{ надо подобрать их так, чтобы } k_b = 0,$$

$$\text{например } k_a = k_c = 15$$

$$\text{итого } abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

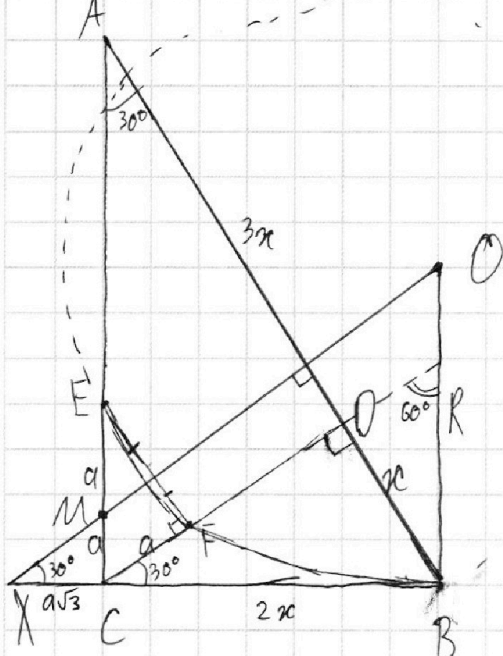
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 пусть $BD = x$
и $CF = a$



в $\triangle ACD$ $CD^2 = BD \cdot AD = 3x^2 \Rightarrow CD = \sqrt{3}x \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle A = 30^\circ \Rightarrow \angle DCB = 30^\circ = \angle CEF$
 (ABHEF)

OX - сев. перпендикуляр к $EF \Rightarrow O$ - центр окружности,
 где $OB \perp BC$, т.к. окружность кас BC

$CE = 2a$
 $OX \parallel CF \Rightarrow M$ - середина CE , $CM = a \Rightarrow$
 $\Rightarrow CX = a\sqrt{3}$ ($\angle OXB = \angle DCB$)

$R = \frac{a\sqrt{3} + 2x}{\sqrt{3}} = a + \frac{2x}{\sqrt{3}}$

$OE^2 = R^2$

$OE^2 = (R - CE)^2 + BC^2$
 $R^2 = R^2 - 4aR + 4a^2 + 4x^2$
 $4a^2 - 4aR + 4x^2 = 0$
 $4a^2 - 4a \cdot \frac{a\sqrt{3} + 2x}{\sqrt{3}} + 4x^2 = 0$

$4x^2 - \frac{8ax}{\sqrt{3}} + 4a^2 = 0$

$a = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

$S_{\triangle ABC} = x\sqrt{3} \cdot 4x \cdot \frac{1}{2} = 2x^2\sqrt{3}$

$S_{\triangle CFE} = a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CFE}} = \frac{4x^2}{a^2} = \left(\frac{2x}{a}\right)^2 = \left(\frac{2x \cdot 2}{x\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{16}{3}$

Ответ: $16/3$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

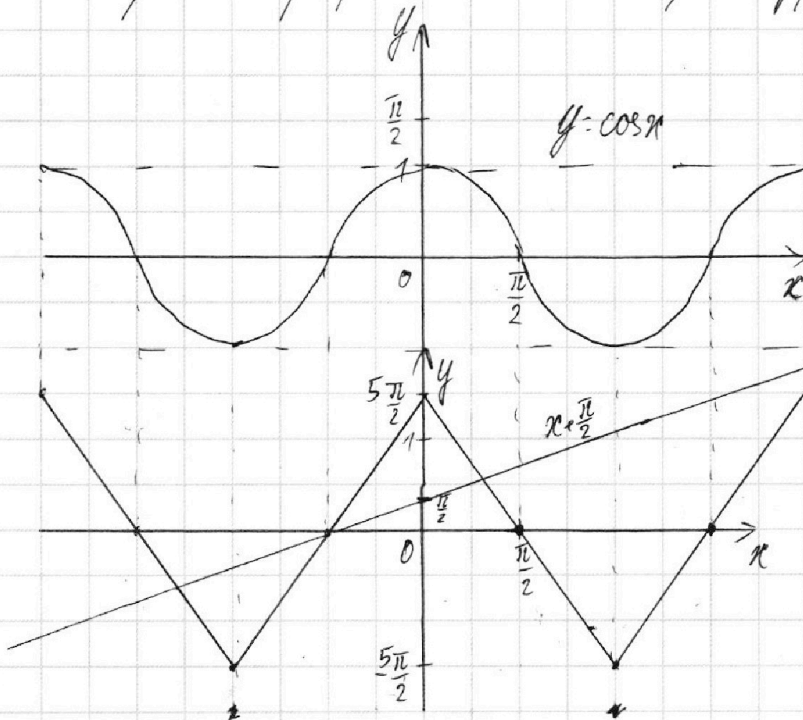
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3

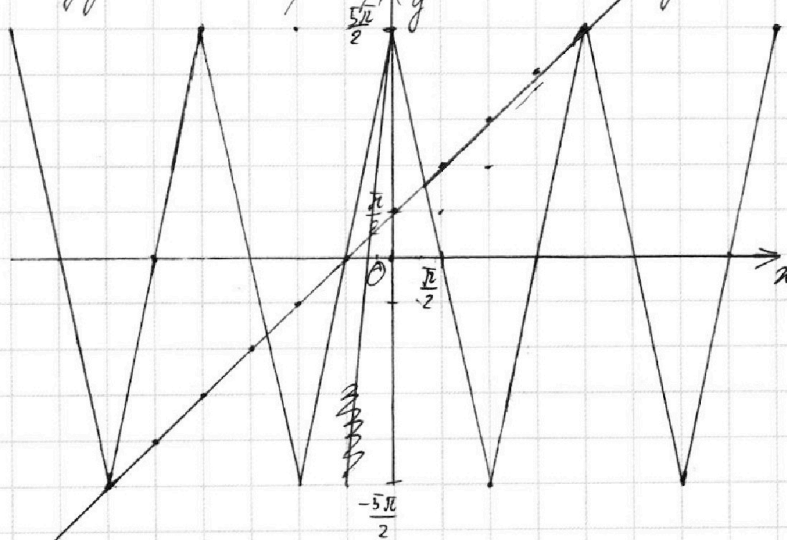
Построим графики обеих сторон ур-ия



графикам
 $y = \arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2}))$
 будет множество отрезков
 от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, параллельных
 $y = x + \frac{\pi}{2}$ и $y = -x + \frac{\pi}{2}$

для упрощения задачи
 из $y = \arcsin(\cos x)$
 получим $y = \arcsin(\cos x) \cdot 5$,
 изменив масштаб в 5 раз
 теперь построим $x + \frac{\pi}{2}$

для удобства перенершим, чтобы одна клетка по y была $\frac{\pi}{2}$



Точки $x = 2\pi, -\frac{\pi}{2}$ и -3π
 очевидны по графику
 найдем еще две, решив:

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{2} = -5x + \frac{5\pi}{2} \\ x + \frac{\pi}{2} = -5x - \frac{15\pi}{2} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{4\pi}{3} \end{array} \right.$$

Ответ: $-3\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$x > 0; x \neq 1, y > 0; y \neq \frac{1}{5}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 8$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y}^2(3^{11}) - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x^2 3 - 8$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y}^2 3 - 8$$

$$f(x) = \log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 + 8 = 0$$

$$g(y) = \log_3^4(5y) - 3,5 \log_{5y} 3 + 8 = 0$$

разница между двумя уравнениями только в лицеве. Устраним его,

заменяя $5y$ на $\frac{1}{x}$ без потери ОДЗ, т.к. $x \neq 0$

$$\text{получим: } g\left(\frac{1}{x}\right) = \log_3^4\left(\frac{1}{x}\right) - 3,5 \log_x 3 + 8 = 0$$

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = \log_3^4(x) + 3,5 \log_x 3 + 8 = 0$$

таким образом, $f(x)$ функционально равно $g\left(\frac{1}{x}\right)$ ($y = f$), тогда

каждому решению $5y_0$ в паре можно поставить $\frac{1}{x_0}$

$$x_0 = \frac{1}{t_0} \Rightarrow t_0 = \frac{1}{x_0} \Rightarrow 5y_0 = \frac{1}{t_0} = x_0, \text{ то есть в } g(5y) \text{ } 5y \text{ можно заменить на } x$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow 4 \log_x^2 3 = 0$$

$$\text{если } 5y_0 = \frac{1}{x_0}, \text{ то } y_0 = \frac{1}{5x_0} \text{ и } y_0 \cdot x_0 = \frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{1}{5}$



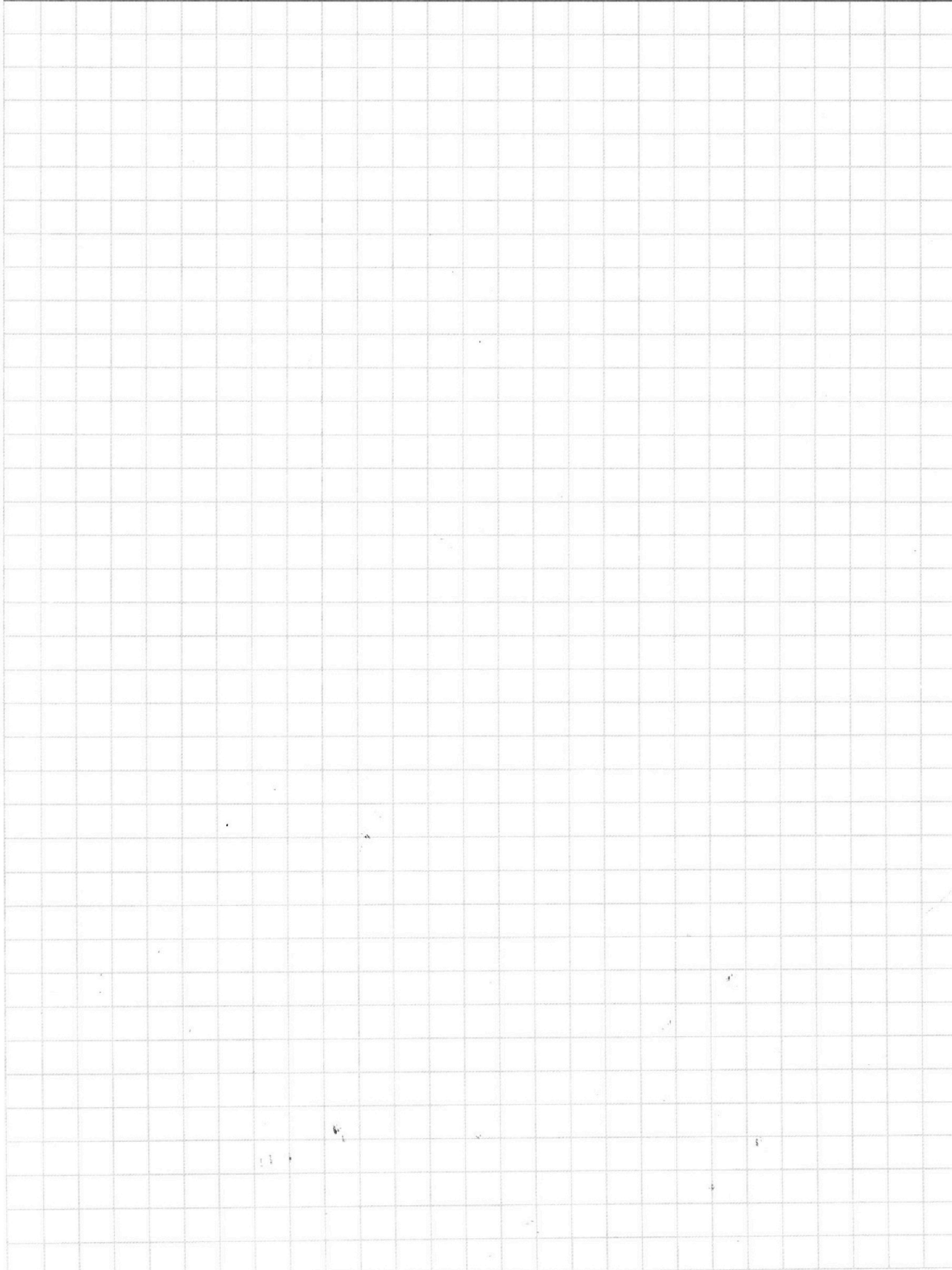
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{42} 3^{41} 5^{53}$$

$$abc = 2^{21} 3^{20} 5^{27}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

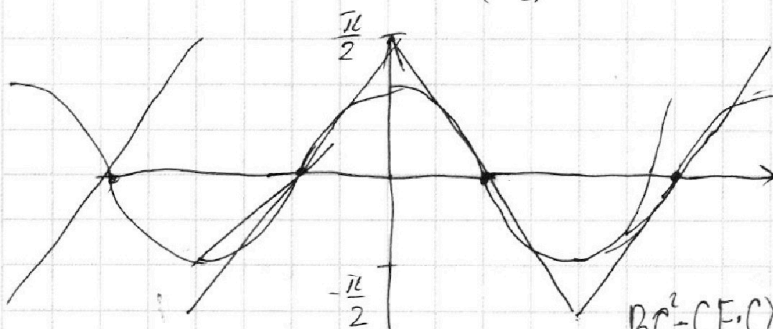
$$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = 4 \left(\frac{R}{a} \right)^2$$

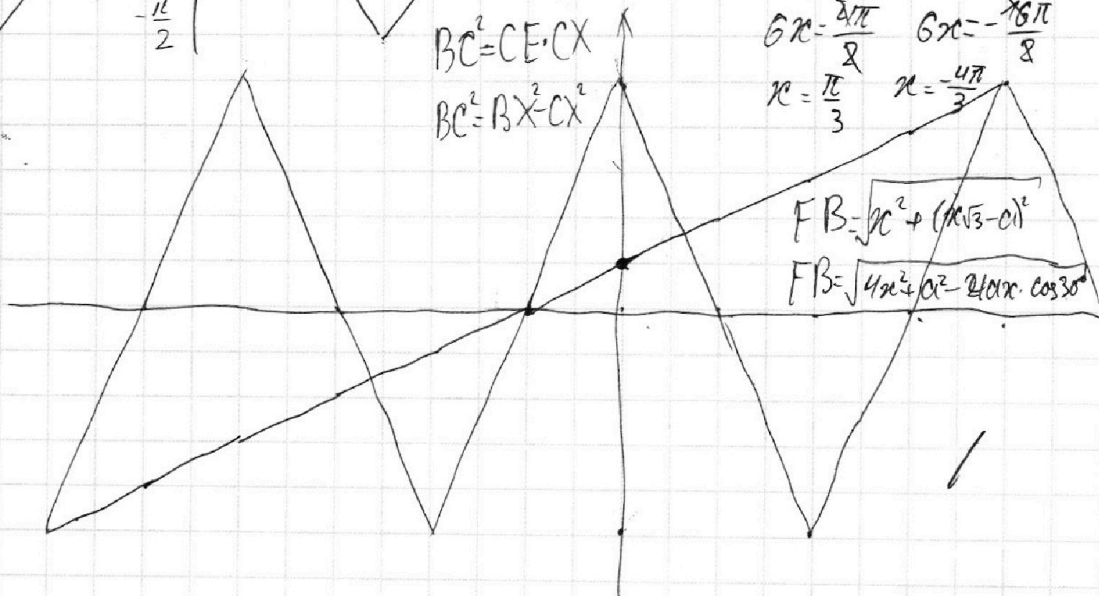
$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$



$$BC^2 = CE \cdot CX$$

$$BC^2 = BX^2 - CX^2$$

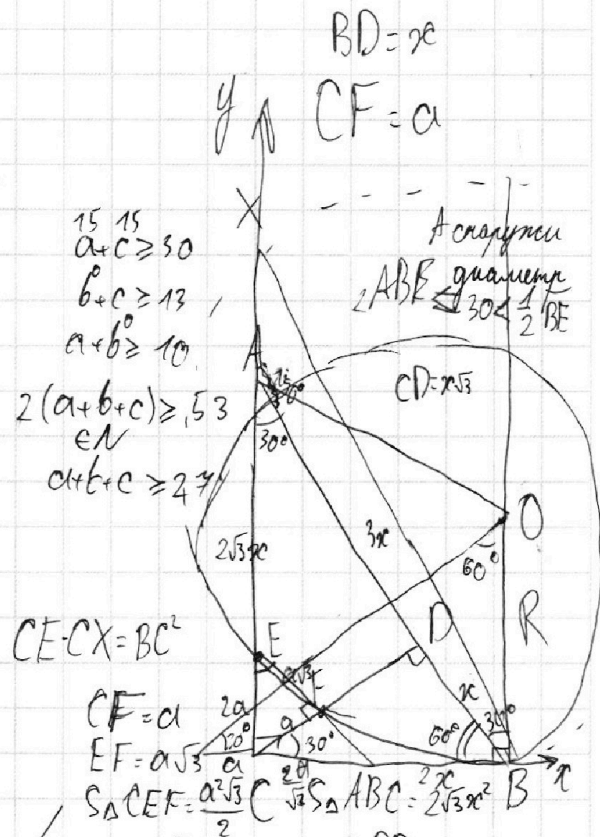


$$6x = \frac{3\pi}{2} \quad 6x = -\frac{15\pi}{8}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \quad x = -\frac{4\pi}{3}$$

$$FB = \sqrt{x^2 + (x\sqrt{3} - a)^2}$$

$$FB = \sqrt{4x^2 + a^2 - 4ax \cos 30^\circ}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

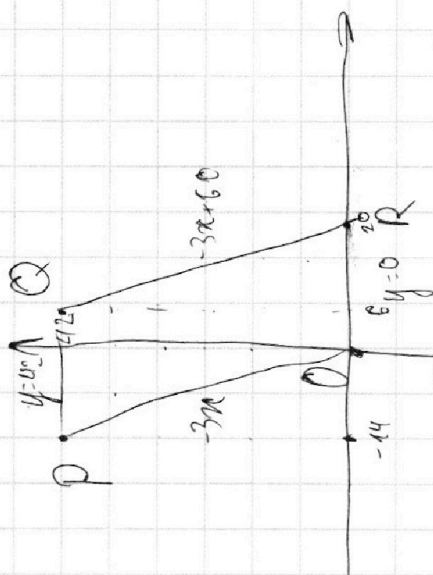
5

6

7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3(x_2 - x_1) = 33 - (y_2 - y_1)$$

$$x_2 - x_1 = 11 - \frac{(y_2 - y_1)}{3}$$

$\mathcal{K}_2 \mathcal{K}_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$
 $\frac{23}{23} > \frac{2}{3}$
 $\frac{230}{-204} \frac{134}{10, 6 > 6}$

$$\frac{\alpha + 2\pi}{\cos 30^\circ} = R \frac{2\alpha + 4\pi}{\sqrt{3}}$$

$$u_x^2 + (y-R)^2 = R^2 \quad u_x^2 + y^2 - 2yR = 0$$

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{2\alpha + \sqrt{1+2\sqrt{3}}}$$

$$Q = \frac{2\sqrt{3}x + 2\sqrt{3+6\sqrt{3}}}{8-2\sqrt{3}}$$

$$x^2(3-2\sqrt{3}) - 4x\sqrt{3} + 3x^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 9x^2 + 6\sqrt{3}x^2 = x^2(3x\sqrt{3})$$

$$\begin{aligned}
 4a^2 + 16ac + 4c^2 &= 16a^2 - 16ac(\sqrt{3}-1) + 4a^2(4-2\sqrt{3}) & 2a+4ac &= \frac{2a+4ac}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4a^2}{3}} \\
 12a^2 - 16acac\sqrt{3} + 4a^2(3-2\sqrt{3}) &= 0 & 2a(\sqrt{3}-1) + 4ac &= -\sqrt{\frac{4a^2}{3}} \\
 \sqrt{\frac{4a^2}{3}} &= \frac{\sqrt{4a^2}}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

