



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2 прокручено

§ Найдем косинус угла
прилежащего к $\angle B$ и $\angle A$
 $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$
$$k = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{0,3}} =$$
$$= \frac{\sqrt{0,3}}{0,3}$$

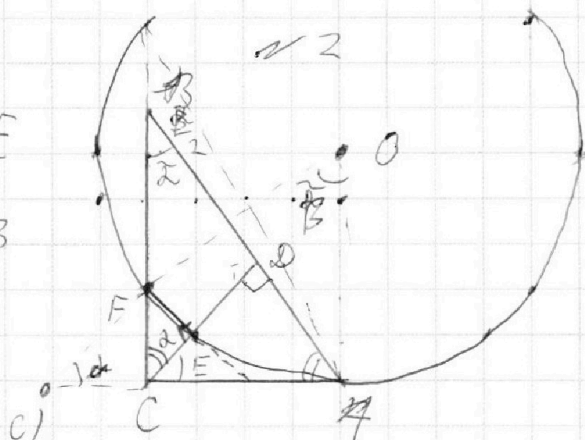
~~Найдем косинус угла прилежащего к $\angle B$ и $\angle A$~~
~~в $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$~~
~~по формуле косинуса~~
~~в $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$~~
~~по формуле косинуса~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AB \parallel FE$

$$\underline{AB} = 7,3$$

30

S4CQ

SUEF

$\angle CEF = \angle CDB$, так как соответственные при пересечении прямых.

$$\triangle CDB \sim \triangle ADC \sim \triangle ABC \text{ w/o boundary boundary}$$

8. Углубленное исследование.

$\triangle CEF \sim \triangle CDB$ по двум углам

$$4B = 7,3BD \quad BD + D4 = 7,3BD$$

$$AB = BQ + QA \quad \textcircled{1} \quad A = 0,3 BQ$$

$$t_{g2} = \frac{CD}{B_D} ; t_{g2} = \frac{D_A}{CD} \quad \frac{CD}{B_D} = \frac{D_A}{CD} \cdot (CD \cdot B_D)$$

$$t_{92} = \frac{3.8 \sqrt{0.3}}{0.9} = \sqrt{0.3}$$

$$CD^2 - DA \cdot BA$$

$$t_{g,t} = \frac{AC}{BC} \quad AC = BC \sqrt{0,3}$$

$$C_2^2 = 0,332^2$$

3. ^{13C} ~~annular~~ ^{inorganic} ~~triglyceride~~

$$CQ = BQ \sqrt{0,3}$$

$$AB^2 - BC^2 + AC^2$$

$$2, 3^2 B.D^2 = 2, 3 B.C^2$$

$$AB^2 = 0,3 BC^2 + BC^2$$

$$AC = \sqrt{0,39} \text{ B2}$$

$$A_B^2 = 7,3 \text{ BC}^2$$

$$B = \sqrt{1,3} B_L$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Определим

$$5 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

Размножим сумму, когда

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$$

$$\frac{\pi}{2} - x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k]$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{4\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - x \in [0; \pi]$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{\pi}{2} - x \in [-4\pi; -3\pi]$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5\left(4\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\pi = 6x$$

$$20\pi + \frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x = \frac{\pi}{6} \rightarrow \text{не подходит}$$

$$21\pi = 6x$$

$$\frac{\pi}{2} - x \in [-2\pi; -\pi]$$

$$x = \frac{21\pi}{6} = \frac{7\pi}{2}$$

$$5\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{2} = -3\pi \rightarrow \text{не подходит}$$

$$10\pi + \frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

*Вспомогательные функции еще больше
умножают количество
 x , но значение x будет отрицательным
и вылезет за ОДЗ.*

$$6x = 10\pi + \pi$$

$$x = \frac{11\pi}{6}$$

$$\text{Таким образом } \frac{\pi}{2} - x \in [2\pi; 3\pi]$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{6} = -\frac{8\pi}{6} \rightarrow \text{не подходит}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x - 2\pi\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 2\pi \rightarrow \text{не подходит}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 10\pi - \frac{3\pi}{2} = 6x$$

$$6x = -9\pi \Rightarrow x = \frac{-3\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



и 3 (продолжение)

Если мы еще увеличим x , то x станет еще меньше, а значит войдем из ОДЗ.

$$\text{Пусть } \frac{\pi - x}{2} \in [-\pi + 2\pi k; 0 + 2\pi k]$$

$$\frac{\pi - x}{2} \in [-\pi; 0]$$

$$\frac{\pi - x}{2} \in [-3\pi; -2\pi]$$

$$5\left(-\left(\frac{\pi - x}{2}\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5\left(\frac{\pi - x}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5\frac{\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5x - 10x - 5\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x = -14\pi$$

$$4x = -4\pi$$

$$x = -\pi \rightarrow \text{не входит}$$

$$x = \frac{-4\pi}{2} \rightarrow \text{не входит. Тогда}$$

увеличим x !
не войдем, тогда x войдет из ОДЗ

$$\frac{\pi - x}{2} \in [\pi; 2\pi]$$

$$5\left(-\left(\frac{\pi - x - 2\pi}{2}\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$70\pi + 5x - 5\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x = -68\pi$$

$$4x = -68\pi$$

$$x = -\frac{17\pi}{2} \rightarrow \text{не входит. Тогда увеличим } x \text{ еще больше, тогда}$$

x войдет из ОДЗ.

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{11\pi}{6}; x = \frac{5\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}; x = \pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2 ч 40 минут

~~Уравнение~~ ~~Уравнение~~ ~~Уравнение~~

$x = -3a\gamma + 4b \rightarrow$ уравнение прямой, где $4b$ — свободный член, $0 \leq a - 3a \rightarrow$ значение угла наклона прямой $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{4}$.

~~Уравнение~~ ~~Уравнение~~ ~~Уравнение~~

Уравнение на уравнение
сигналы, которые будут приняты
Китайским углом наклона α , $\tan \alpha = -3a$

$$\sin \alpha = \frac{3}{4b} \quad \cos \alpha = \frac{2a}{\sqrt{4-28}} = \frac{6a}{27a-36}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4b} = \frac{6a}{27a-36}$$

$$-3a = \frac{3}{4b \cdot 60} = \frac{3}{270-36}$$

$$-3a = \frac{(27a-36) \cdot 3}{4b \cdot 60}$$

Получим $a < 0$

$$-42a^2b = 27a-36$$

$$42a^2b + 27a - 36 = 0 \quad | : 6$$

$$7a^2b = 4 - \frac{27a}{b}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

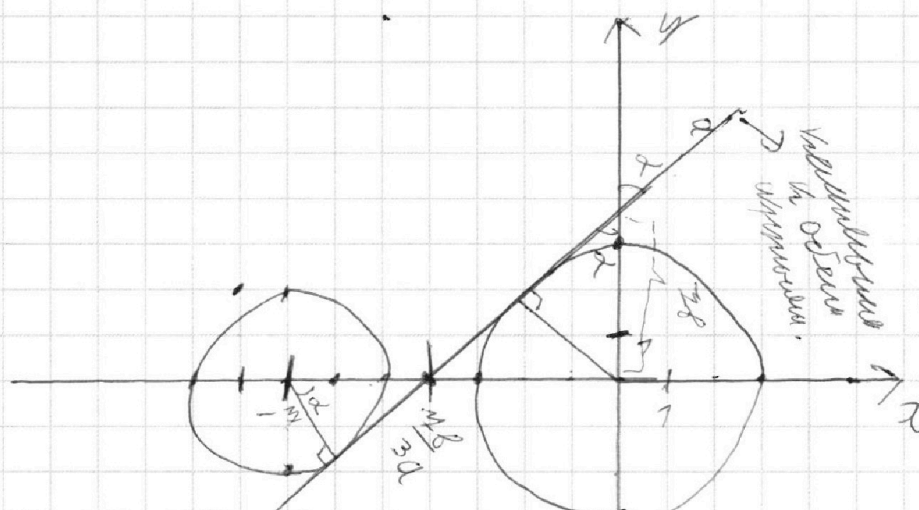
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x + 3ay - 2b = 0 \\ (x^2 + 74x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 74x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 74x + 49 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + \frac{7}{2})^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Окружность с центром в точке $(-\frac{7}{2}; 0)$ и радиусом 2.



Окружность с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 3.

$$x + 3ay - 2b = 0$$

Проверим случай $a = 0$, тогда на графике

это будет точка пересечения прямых параллельных Oy - линии мы хотим и решить, но не можем

они пересекаются $\neq O$ очевидно, но линия параллельна Oy , но тогда невозможна

$$a = 0 \text{ не подходит}$$

$$3ay = -x + 2b \quad | : 3a \quad a \neq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

003

$$\log_2^4(6x) - 2 \log_2^4 6x = \log_2^4 343 - 4$$

270

470

471

476

$$6x = t$$

$$\log_2^4 t + 6 \log_2^4 t = \log_2^4 (3^3) - 4$$

$$\log_2^4 t - 2 \log_2^4 t = \log_2^4 (3^3) - 4$$

$$\log_2^4 t = \frac{3}{2} \log_2^4 (3) + 2 \log_2^4 (3) - 4$$

$$\log_2^4 t = \frac{7}{2} \log_2^4 (3) - 4$$

$$\log_2^4 4 = \frac{5}{2} \log_2^4 (3) - 6 \log_2^4 (3) - 4$$

$$\log_2^4 4 = -\frac{7}{2} \log_2^4 (3) - 4$$

Получим систему

$$\begin{cases} \log_2^4 4 = -\frac{7}{2} \log_2^4 (3) - 4 \\ \log_2^4 t = \frac{7}{2} \log_2^4 (3) - 4 \end{cases}$$

$$\log_2^4 t = \frac{7}{2} \log_2^4 (3) - 4$$

⇓

$$\log_2^4 t - \log_2^4 4 = \frac{7}{2} (\log_2^4 (3) + \log_2^4 (3)) = (\log_2^4 t + \log_2^4 4) \cdot$$

$$\cdot (\log_2^4 t - \log_2^4 4) (\log_2^4 t + \log_2^4 4) = \log_2^4 (ts) (\log_2^4 \frac{t}{4}) \cdot$$

$$\cdot (\log_2^4 t + \log_2^4 4)$$

$$\log_2^4 (3) + \log_2^4 (3) =$$

$$\log_2^4 (3) + \log_2^4 (3) =$$

$$= \frac{1}{\log_2^4 3} + \frac{1}{\log_2^4 3} =$$

$$= \frac{\log_2^4 (3) + \log_2^4 (3)}{\log_2^4 (3) \log_2^4 (3)} =$$

$$= \frac{\log_2^4 (3)}{\log_2^4 (3) \log_2^4 (3)}$$

$$\log_2^4 t - \log_2^4 4 =$$

$$= (\log_2^4 t - \log_2^4 4) \cdot$$

$$\cdot (\log_2^4 t + \log_2^4 4) =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



и 5 вариантов

$\log_2(t) + \log_2(y)$

$$\log_2(t) \log_2\left(\frac{t}{y}\right) (\log_2^2 t + \log_2^2 y) = \frac{\log_2(t)}{\log_2(t) \log_2(y)}$$

$\log_2(t) \neq 0$ (мод3); $\log_2(y) \neq 0$ (мод3)

$$\log_2(t+y) (\log_2(\frac{t}{y}) \log_2(t) \log_2(y) (\log_2^2 t + \log_2^2 y) - 7) = 0$$

$$\log_2(t+y) = 0 \text{ или } \log_2(\frac{t}{y}) \log_2(t) \log_2(y) (\log_2^2 t + \log_2^2 y) = 7$$

$$\log_2(t+y) = 0 \Rightarrow t+y = 7 (\log_2(t) - \log_2(y)) \log_2(t) \log_2(y)$$

$$6xy = 7 \cdot (\log_2^2 t + \log_2^2 y) = 7$$

$$xy = \frac{1}{6} \quad \text{Экстремальный принцип}$$

Проверим

$$x = \frac{7}{6y}$$

$$-\frac{7}{2} \log_2(2) - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{7}{2} - 4 \geq 0$$

$$\frac{7}{2} \log_2(2) - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{7}{2} - 4 \geq 0$$

$$\log_2 t > 0$$

$$\log_2 y < 0$$

$$\log_2 y = -\frac{7}{2} \log_2(2) - 4$$

$$\log_2(\frac{1}{y}) = +\frac{7}{2} \log_2(2) + 4$$

$$\log_2(y) = -\frac{7}{2} \log_2(2) - 4 \rightarrow \text{работает}; x = \frac{1}{6y} \text{ возможно}$$

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{6}$$

$$\log_2(t) = a > 0$$

$$\log_2(y) = b < 0$$

$$(a-b) \cdot a \cdot b \cdot (a^2 + b^2) = 7$$

знаем, что $a > 0$, $b < 0$, значит $a^2 + b^2 > 0$, значит $a \cdot b < 0$, значит $a - b > 0$, значит $(a-b) \cdot a \cdot b \cdot (a^2 + b^2) < 0$, значит $7 < 0$, что невозможно.



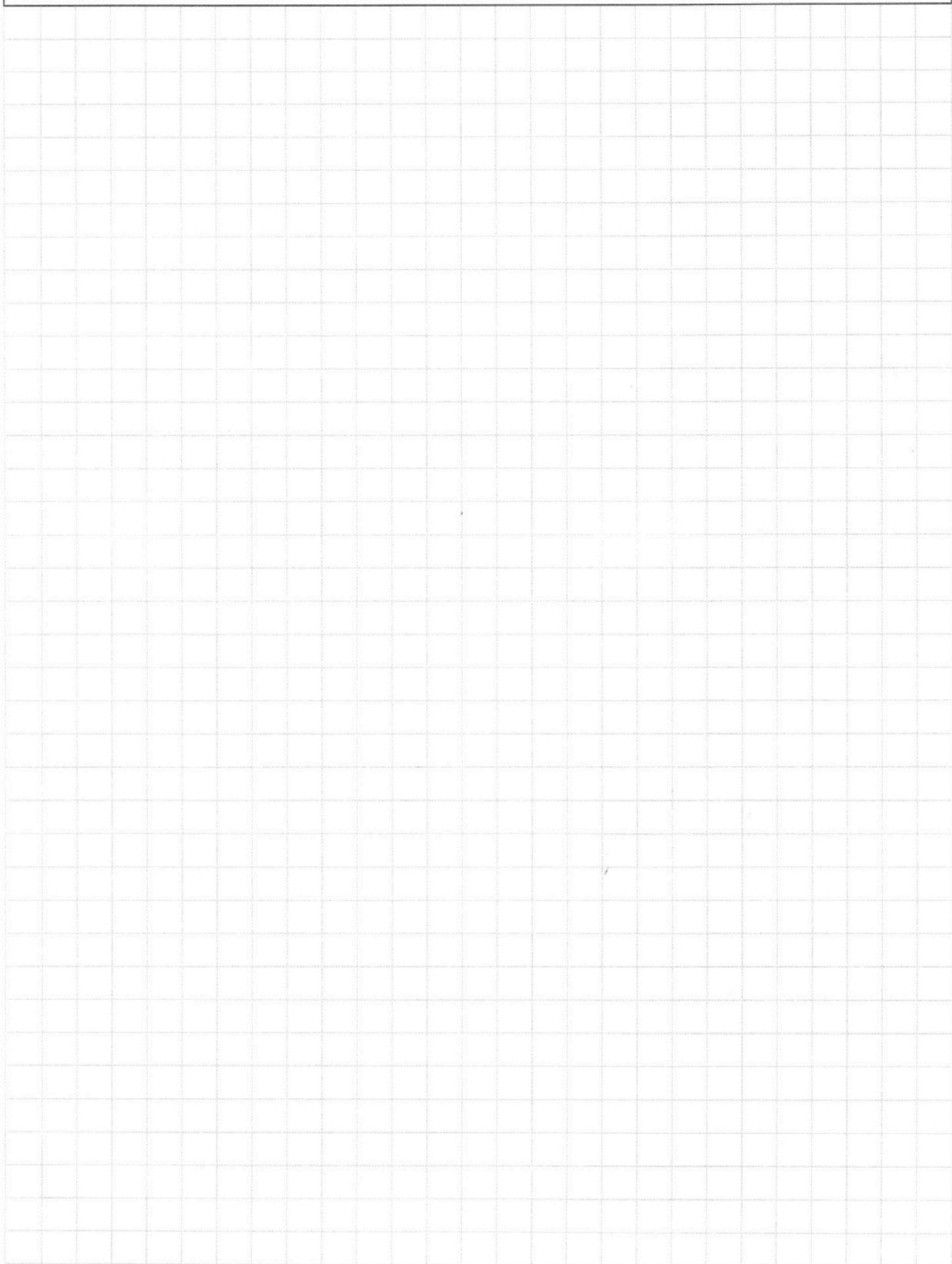
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Угрюмов

$$\begin{array}{r} + 77 \\ 75 \\ \hline 72 \\ \hline + 28 \\ 75 \\ \hline 43 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 78 \\ 74 \\ \hline + 32 \\ 43 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & 2 & 20 \\ 48 & 2 & 2 \\ & 2 & 6 \end{array}$$

$$a = z^2$$

$$x = 2^3$$

224

$$q = 2^4$$

$$a_1 = 34$$

$$C = 2^{7.6}$$

$$\phi^2 = 28$$

$$h = 5^{-6}$$

$P = 2 \times 10^8$

$$d = 6^{20}$$

$$C = 5$$

$$6 \div 3 = 2$$

$$C = 3^{70}$$

$$a = 3$$

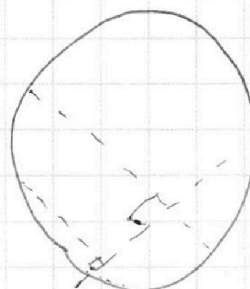
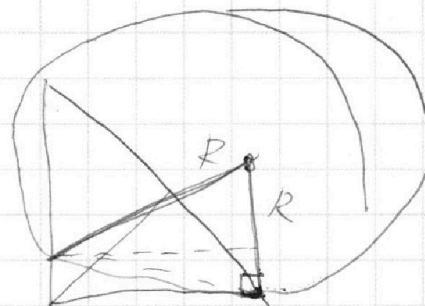
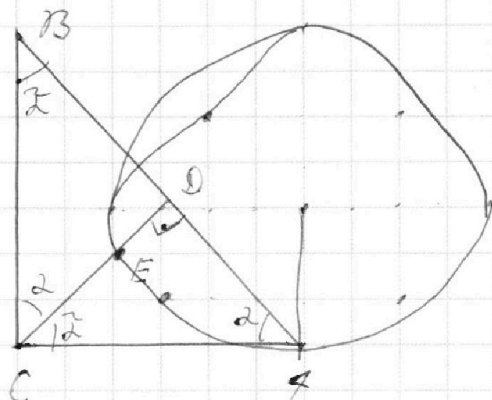
$$a = 2 \cdot 5 \cdot 20$$

$$A C^2 = (E - E_D)$$

$$A^2 = CF \cdot F\beta'$$

$$\gamma = \frac{CE}{CF} \cdot \frac{ED}{FD}$$

$$\frac{F_{B1}}{F_{D1}} = \frac{CF}{CF}$$



$$\sin x = \cos \frac{\pi}{2} - x$$

