МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$ab \vdots 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$

$bc \vdots 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$

$ac \vdots 2^{14} \cdot 3^{24} \cdot 5^{39}$

Пусть тогда $ab = \alpha \cdot (2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12})$, $bc = \beta \cdot (2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17})$, $ac = \gamma \cdot (2^{14} \cdot 3^{24} \cdot 5^{39})$, где α, β и γ – натуральные числа.

Тогда $ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = \alpha\beta\gamma \cdot 2^{34} \cdot 3^{58} \cdot 5^{68}$.

Пусть $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma < 3$. Тогда $\alpha\beta\gamma$ – не делится на 3. Но это значит, что в разложении на простые множители натурального числа $(abc)^2$ число 3 будет в нечетной степени, что противоречит факту, что $(abc)^2$ – полный квадрат.

Поэтому $\alpha\beta\gamma \geq 3$. Тогда $(abc)^2 \geq 2^{34} \cdot 3^{58} \cdot 5^{68}$.

Так как $abc > 0$, то верно $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{29} \cdot 5^{34}$.

Но известно, что $ac \vdots 5^{39}$. Поэтому $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{29} \cdot 5^{39}$.

Равенство достигается при $a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}$, $b = 2^3 \cdot 3^6$, $c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{27}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{29} \cdot 5^{39}$

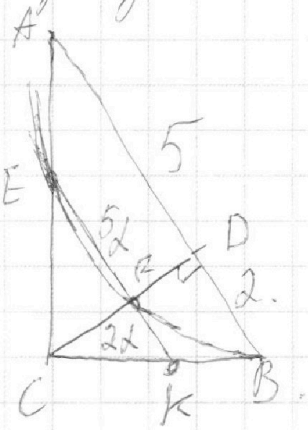
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2.

Не ограничивая общности предположим, что гипотенуза треугольника равна 7.



Тогда высота бьет ее на отрезки 5 и 2.

Найдем BC сначала.

$$\begin{cases} AB^2 + BC^2 = 49 \\ \frac{BC}{7} = \frac{\sqrt{10}}{BC} \end{cases}$$

— здесь я воспользовался фактом, что $CD^2 = AD \cdot BD$.

$BC = \frac{AC}{7\sqrt{10}}$

$BC^2 + \frac{10}{49} BC^2 = 49$

$\frac{59}{49} BC^2 = 49$

$CD^2 = BD \cdot AD$ — св-во вписан.

$CD = \sqrt{10}$.

$\frac{2}{BC} = \frac{BC}{7}$ — подобие $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$.

$BC^2 = 14$

$BC = \sqrt{14}$

~~Пусть CK = 2√14~~ где

Пусть $CK = 2\sqrt{14}$, где $K = EF \cap BC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Тогда $\frac{CK}{BK} = \alpha$.

$KB = (1-\alpha)\sqrt{14}$

$KF = 2\alpha$

$EF = 5\alpha$ } — из подобия $\triangle CEK$ и $\triangle ABK$.

Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть:

$2\alpha \cdot 7\alpha = ((1-\alpha)\sqrt{14})^2$.

$14\alpha^2 = 14(1-\alpha)^2$

$\alpha^2 = (1-\alpha)^2$

$\alpha = \frac{1}{2}$.

Тогда $\triangle CEK$ вдвое меньше $\triangle ABC$. Тогда $S_{\triangle CEK} = \frac{S_{\triangle ABC}}{4}$

Тогда $S_{\triangle CEF} = S_{\triangle CEK} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{28} S_{\triangle ABC}$

(по лемме об отношении площадей).

Ответ: $\frac{28}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$10\left(\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)\right) = \pi - 2x$

$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}$

$\sin\left(\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5} + 2\pi n \\ \frac{\pi}{2} - x = \pi - \left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) + 2\pi k \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \frac{4x}{5} + 2\pi n = \frac{2\pi}{5} \\ \frac{6x}{5} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = -\frac{2\pi}{5} \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi n}{2} \\ x = -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi k}{3} \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z}$$

$\cancel{\begin{cases} x = 2\pi\alpha \\ x = 2\pi\beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

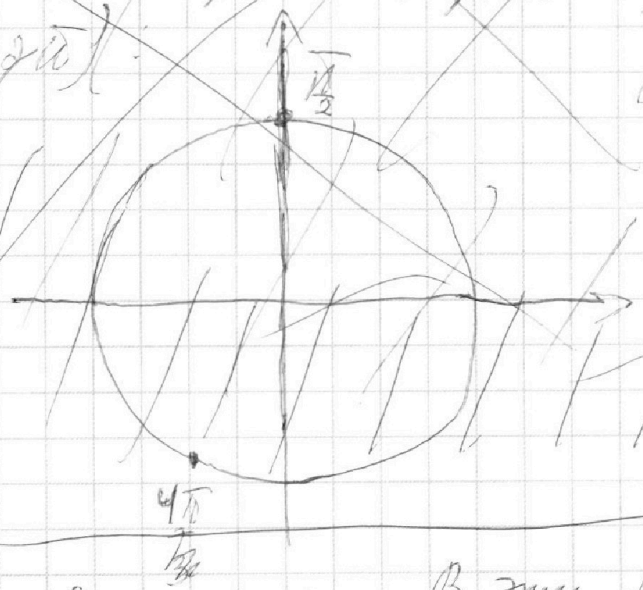
arcsin(x) принимает значения от $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Тогда надо отобрать корни,

такие, что $\pi - 2x \geq -\frac{\pi}{2}$ и $\pi - 2x \leq \frac{\pi}{2}$.

~~Тогда $\begin{cases} x \geq \\ x \leq \end{cases}$~~

~~Построим тригонометр. окружность и отметим серию корней, попадающих в $[0; 2\pi]$:~~



Тогда $\begin{cases} x \geq -2\pi \\ x \leq 3\pi \end{cases}$

В эти промежутки попадают только корни, соответствующие значениям $n=-1, n=0, n=-1$, $k=1, k=0, k=-1$

Ответ: $-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 4.

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ x^2+y^2-20y+64+36-36=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3} \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3} \\ x^2+(y-10)^2=36 \end{cases} \end{array}\right.$$

Такая запись означает, что решениями являются все точки пересечения прямой $y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3}$ и окружностей $x^2+y^2=1$ и $x^2+(y-10)^2=36$.

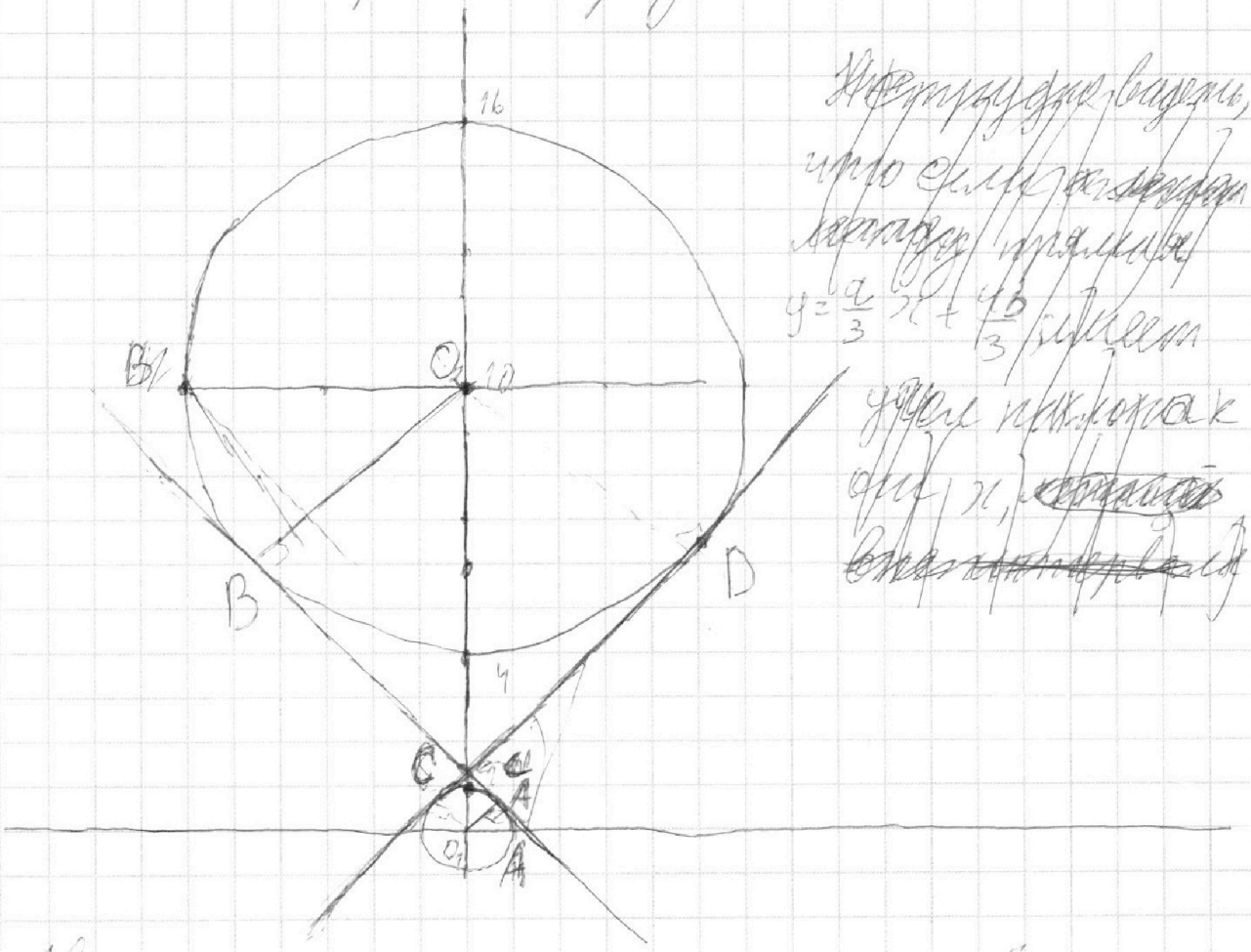
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Построим окружности:



~~Нетрудно видеть, что фигура лежит между прямыми~~ $y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3}$ ~~задает угол наклона к оси~~ x, ~~отрезок~~ ~~отрезок~~

Найдем точку пересечения общих касательных. Из подобия треугольников $\triangle AO_1C \sim \triangle BO_2C$. она делит отрезок между центрами в отношении, равном отношению радиусов. Тогда

$$\frac{C}{40-C}=\frac{1}{6}$$

$$6C=10-C$$

$$C=\frac{10}{7}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Заметим, что если угол наклона прямой $y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3}$ больше угла наклона CD и меньше угла наклона AB, то при $b=\frac{15}{14}$ $\left(\frac{3b}{4}=\frac{10}{7}\right)$ прямая $y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3}$ пройдет через точку пересечения общих касательных и пересечет каждую окружность в двух точках. Поэтому все $\frac{a}{b}$, соответствующие таким углам наклона, подходят. Если же угол наклона лежит между углами наклона касательных, то когда мы построим прямую $y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3}$, приняв $b=\frac{15}{14}$, одна окружность будет целиком выше прямой, а другая – целиком ниже. Тогда меняя b, т.е. сдвигая ~~окруж~~ прямую вверх или вниз, мы не сможем добиться пересечения с двумя окружностями сразу. А ~~и~~ с одной окружностью

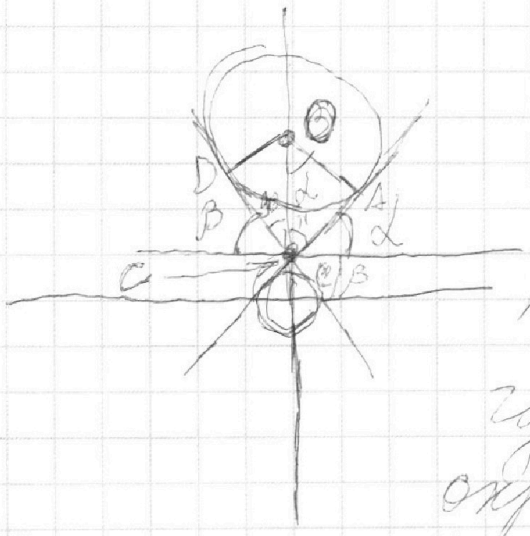
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

у прямой не может быть больше двух общих точек. Если же наклон прямой $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$ совпадает с наклоном одной из касательных, то по аналогичным соображениям мы никогда не получим больше 3х общих точек. Тогда ответом будет интервал с границами, равными углам наклона общих касательных



Из рисунка видно, что если принять угол одной касательной за α, а другой – за $(-\beta)$, то $\alpha = \beta$ и $tg\alpha = \frac{AC}{AO}$, где O – ~~[illegible]~~ центр большей окружности, A – точка касания с ней, C – точка пересечения общих касательных.

По теореме Пифагора $AC^2 = OC^2 - OA^2 =$

$$= \left(10 - \frac{10}{7}\right)^2 - 6^2 = \frac{3600}{49} - 36 = \frac{36 \cdot 51}{49}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$AC = \frac{6}{7}\sqrt{51}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{AO} = \frac{\sqrt{51}}{7}$.

$\frac{a}{3} \in \left(-\frac{\sqrt{51}}{7}; \frac{\sqrt{51}}{7}\right)$

$a \in \left(-\frac{3\sqrt{51}}{7}; \frac{3\sqrt{51}}{7}\right)$

Ответ: $a \in \left(-\frac{3\sqrt{51}}{7}; \frac{3\sqrt{51}}{7}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 5

Пусть $f(t) = \log_5^4 t - \frac{13}{3}\log_t 5$.

тогда $f'(t) = \frac{4\log_5^3 t}{t\ln 5} + \frac{13\ln 5}{3t\ln^2 t}$, при $t \neq 1$ она

определена и строго возрастает.

Заметим, что первое равенство равносильно

$f(2x) = -3$.

действительно,

$\log_5^4 2x - 3\log_{2x}5 = \log_{2x}^3 625 - 3$

$\log_5^4 2x - 3\log_{2x}5 = \frac{4}{3}\log_{2x}5 - 3$

$\log_5^4 2x - \frac{13}{3}\log_{2x}5 = -3$.

Второе равенство равносильно

$f(\frac{1}{y}) = -3$. действительно:

~~$\log_5^4(\frac{1}{y}) = \log_5$~~

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_y^3 0{,}2 - 3$

$\log_y^5 y + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3$

$\log_y^5 y + \frac{13}{3}\log_y 5 = -3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4\left(\frac{1}{9}\right) - \frac{13}{3}\log_{\frac{1}{9}}5 = -3.$

Последний переход верен, поскольку

$\log_5\frac{1}{9} = -\log_5 9 \Rightarrow \log_5^4\frac{1}{9} = \log_5 9$

и $\log_{\frac{1}{9}}5 = -\log_9 5.$

Кроме того, так как в точках ~~$\frac{1}{9}$~~ $2x$ и $\frac{1}{9}$ $f(x)$ принимает отрицательные значения, то ~~$2x > \frac{1}{9}$~~, $2x > 1$ и $\frac{1}{9} > 1$.

Действительно, если $\log_5^4 t - \frac{13}{3}\log_t 5 < 0$, то $-\frac{13}{3}\log_t 5 < 0$, тогда $\log_t 5 > 0$, $t > 1$.

Но при аргументах, больших 1, f строго возрастает. Поэтому из равенства ~~аргументов~~ значений следует равенство аргументов:

$f(2x) = f\left(\frac{1}{9}\right) = -3 \Rightarrow 2x = \frac{1}{9}$. $xy = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

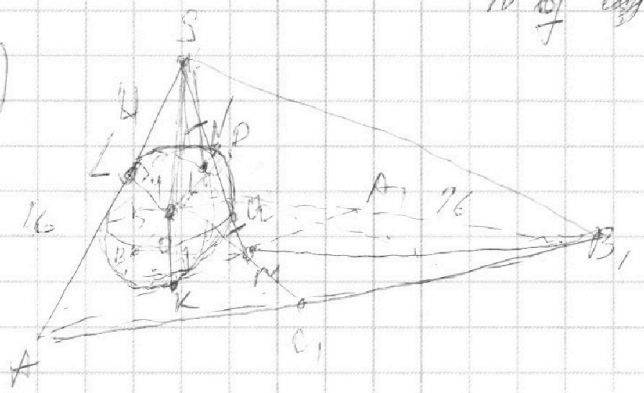
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 7

а)



заметим, что сечение плоскостью SAA_1 сферы Ω – это окружность, касающаяся AS и AA_1.
Квадрат хордальной линии пересечения секущей на внешнюю часть:

$SL^2 = PS \cdot (PS + PQ)$

$MK^2 = MQ(MQ + PQ)$.

$MQ = PS \Rightarrow SL = MK$.

$AL = AK$ – как отрезки касательных из A.

Тогда $AM = AS = 16$. Тогда $AA_1 = \frac{3}{2} AM = 24$

Тогда $MA_1 = \frac{AM}{2} = 8$.

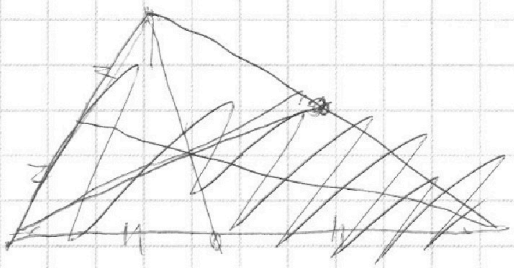
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

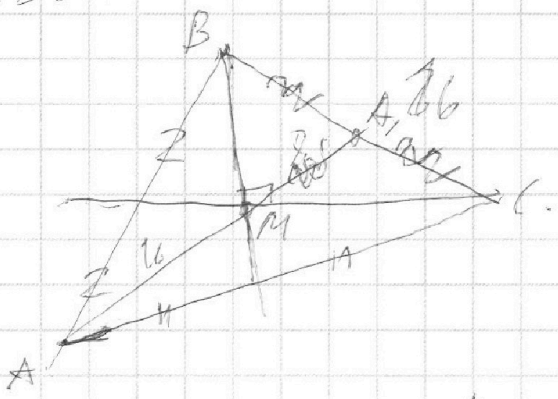
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Рассмотрим $\triangle ABC$





В $\triangle BMC$ MA_1 – медиана, $MA_1 = \frac{BC}{2}$.

Тогда $\angle BMC = 90°$.

$\frac{S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AM}{AA_1} = \frac{1}{3}$ – по лемме об отношении площадей.

Но $\Rightarrow S_{\triangle BMC} = \frac{100}{3}$.

Но $S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} BB_1 \cdot \frac{2}{3} CC_1$

Тогда $BB_1 \cdot CC_1 = \frac{75}{2}$

Тогда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{75}{2} \cdot 24 = 75 \cdot 12 = 900$

Ответ: 900.

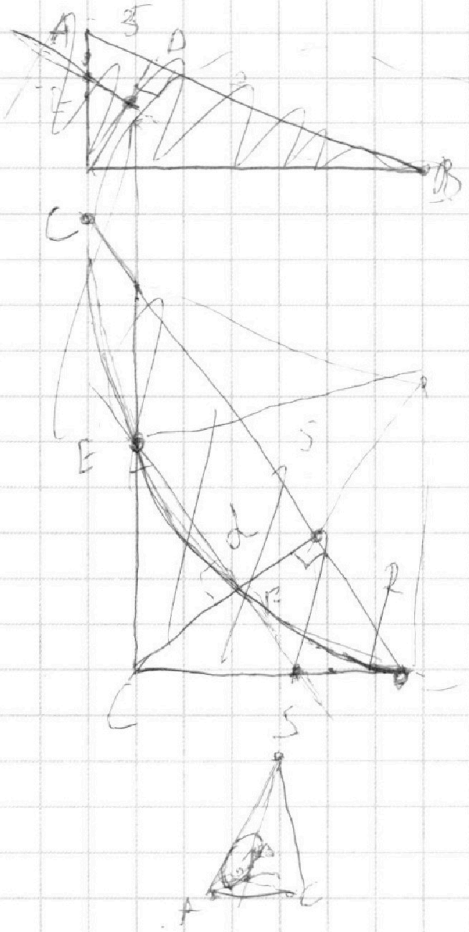
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

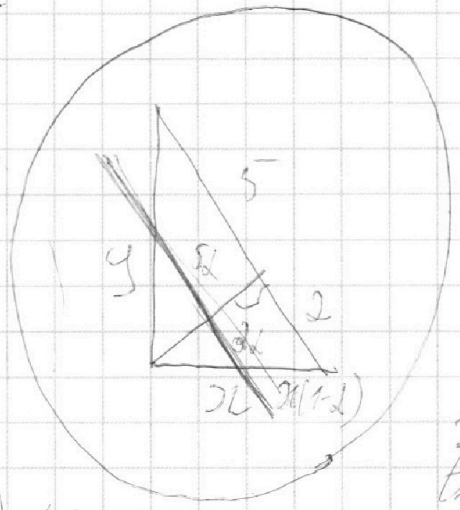
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2





$f(x,y) - f(x_2,y_2)$

$10\alpha^2 = x(1-\alpha)$

$5(x_2-x_1)+(y_2-y_1)$

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$

$5(x_2, y_1)$

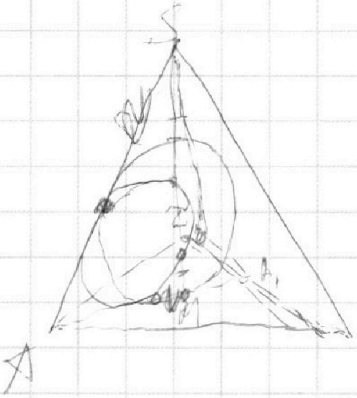
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

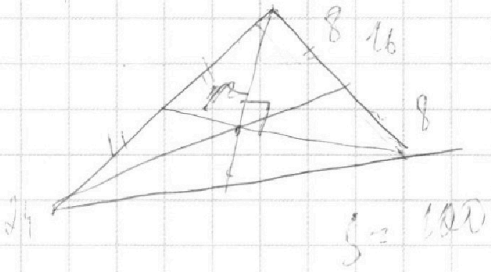
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

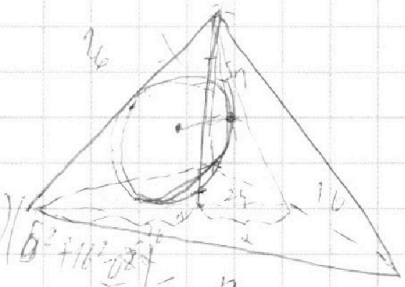
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

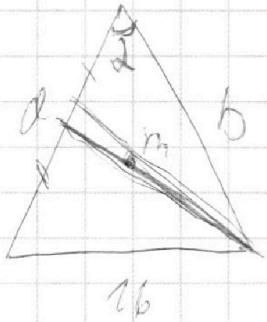
№





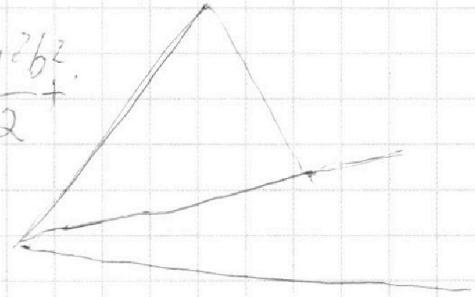


№2



$\frac{1}{4}\left(a^2+16^2-\frac{b^2}{2}\right)\left(b^2+16^2-\frac{a^2}{2}\right) = BC$

$= \frac{1}{4}\left(a^2b^2+\frac{a^2b^2}{2}+\right.$



$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-16^2}{2ab}$

$m^2 = b^2+\frac{a^2}{4}-ab\frac{a^2+b^2-16^2}{2}$

$\frac{b^2+a^2}{2} = 24^2-\frac{16^2}{4}$

$\frac{b^2}{2}+\frac{16^2}{2}-\frac{a^2}{4}$

$b^2+a^2 = 2\cdot 24^2-\frac{16^2}{2}$

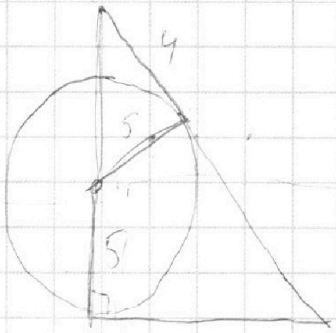
$\frac{1}{4}\left(\cancel{a^2+\frac{b^2}{2}+\frac{16^2}{2}}\right)\left(\cancel{-a^2}+\frac{16^2}{2}\right.-2$

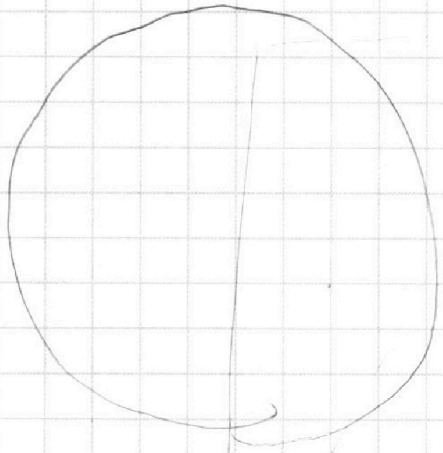
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

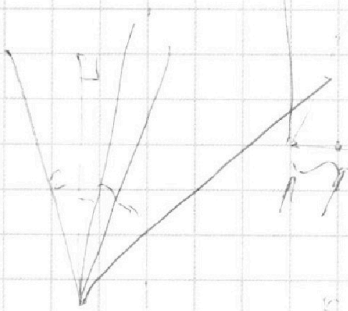
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

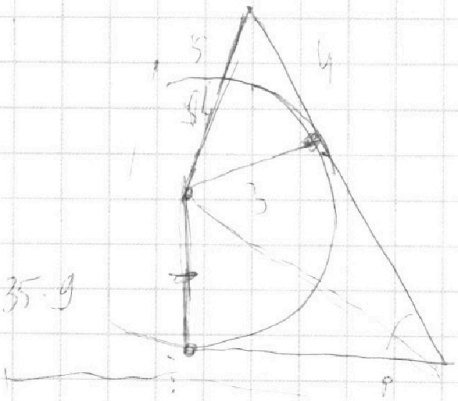
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ









На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

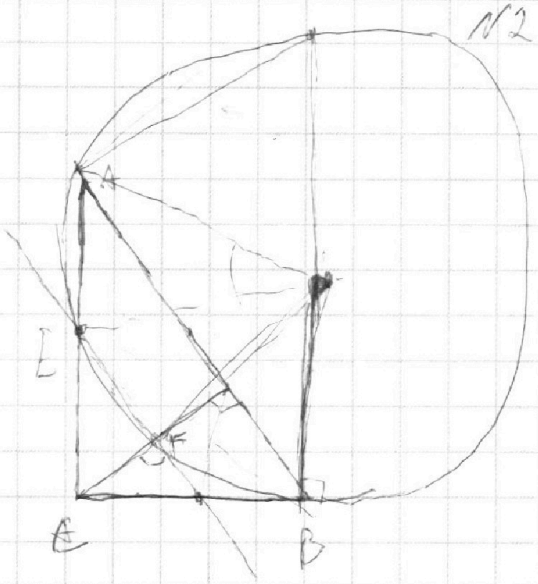
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2



$\frac{d}{dt}\log_5^4 t = \log_5^3 t \cdot \frac{1}{t\ln 5}$

$\frac{\log_5^3 t}{t}$

$\Rightarrow 1\log_{\frac{1}{2x}} t = -1\log$

$$\begin{cases} \log_5^4 2x - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3 \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3 \end{cases}$$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}}$

$$\begin{cases} \log_5^4 2x - 3\log_{2x} 5 = \frac{4}{3}\log_{2x} 5 - 3 \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \frac{-1}{3}\log_y 5 - 3 \end{cases}$$

$\frac{-13}{3\log_5 2x}$

$$\begin{cases} \log_5^4 2x - \frac{13}{3}\log_{2x} 5 = -3 \\ \log_5^4 y + \frac{13}{3}\log_y 5 = -3 \end{cases}$$

$t = \frac{1}{2x}$

$2x > 1$

$\frac{1}{y} > 1$

$\frac{d}{dt}\log_\alpha t = \frac{\frac{d}{dt}\log t}{\ln\alpha}$

$y = \frac{1}{5x}$

$\frac{d}{dx}\log_x 5 = \frac{\log 5}{\ln x} = \frac{\ln 5}{x(\ln x)^2}\frac{d}{dt}\frac{\ln 5}{\ln x} = \frac{-5}{x(\ln x)^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 5.

Рассмотрим $f(t) = \log_5^4(t) + \frac{13}{3}\log_t 5$

При $t > 0, t \neq 1$ $\log_5(t)$ возрастает,

t^4 возрастает, поэтому $\log_5^4(t)$ возрастает.

Также $-\frac{13}{3}\log_t 5$ уб.

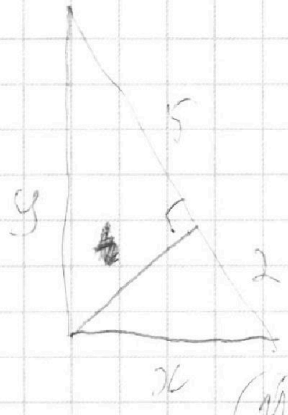
$ax - 3y + 4b = 0$

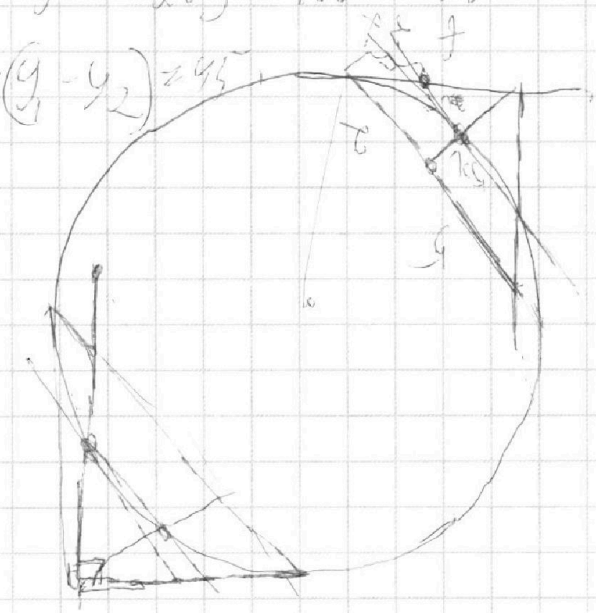
$(x^2 + y^2 - 1) = 0$

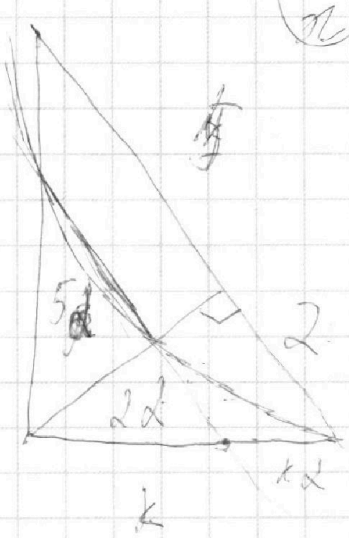
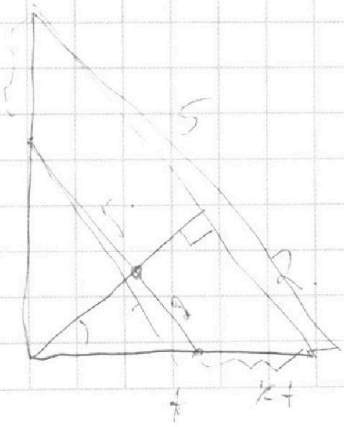
$x^2 + y^2 - 20y + 100 = 36$

$5(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 45$

x_1 и x_2







$k\alpha = 10\alpha^2$