



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $ab \cdot bc \cdot ac : 2^{6+14+16} \cdot 3^{13+21+25} \cdot 5^{11+13+28}$
но $a^2 b^2 c^2 = (abc)^2 \Rightarrow (abc)^2 : 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52}$, т.к. все
простые входят в квадрат в четной степени.
 $\Rightarrow abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ Но $ac : 5^{28} \Rightarrow abc : 5^{28}$
 $\Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$

$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$

$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$

$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

$ab : 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14} : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14} : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

пример подходит

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(2)

$$\begin{cases} \bar{y} = \frac{a+1-y}{a} \\ x = \frac{y-\bar{y}+a+\frac{1}{a}}{2} = \frac{y-\frac{a+1}{a}+\frac{y}{a}+a+\frac{1}{a}}{2} = \frac{(a+1)y+a^2-a}{2a} \\ \bar{x} = \frac{\bar{y}-y+a+\frac{1}{a}}{2} = \frac{\frac{a+1}{a}-y-\frac{y}{a}+a+\frac{1}{a}}{2} = \frac{a^2+a+2-(a+1)y}{2a} \end{cases}$$

из равенства условий ВАР и ЕАС получаем:

$$\frac{\frac{a+1}{x+1}}{\frac{y+1}{1}} \geq \frac{\frac{a+1}{x+1}}{\frac{y+1}{1}}$$

и частное действительно.

Т.к. аргументы
вероятно и численно
частные равны 0

$$\frac{a+1}{(x+1)(y+1)} \geq \frac{\frac{a+1}{a}}{(\bar{x}+1)(\bar{y}+1)}$$

$$a(\bar{x}\bar{y} + \bar{x} + \bar{y} + 1) \geq xy + x + y + 1$$

$$\begin{aligned} & a+1-y + \frac{a^2+a+2-(a+1)y}{2a} + a + \frac{(a+1-y)(a^2+a+2-(a+1)y)}{2a} \geq \\ & \geq x+y + \frac{(a+1)y+a^2-a}{2a} + y \frac{(a+1)y+a^2-a}{2a} \end{aligned}$$

разноименно на 2a

$$\begin{aligned} & 4a^2 - 2ay + a^3 + a^2 + 2a - a(a+1)y + (a+1)(a^2+a+2) - y((a+1)^2 + a^2 + a) \\ & + y^2(a+1) \geq 2ay + (a+1)y + a^2 - a + (a+1)y^2 + y(a^2 - a) \\ & a^3 + 5a^2 + 2a + a^2 + 2a^2 + 2a + 2 - y(2a + a^2 + a + a^2 + 2a + 1 + a^2 + a + 2) \geq \\ & = a^2 - a + y(2a + a + 1 + a^2 - a) \\ & 2a^3 + 6a^2 + 6a + 2 \geq y(4a^2 + 8a + 4) \\ & 4y(a+1)^2 = 2(a+1)^3 \Rightarrow y = \frac{a+1}{2} \end{aligned}$$

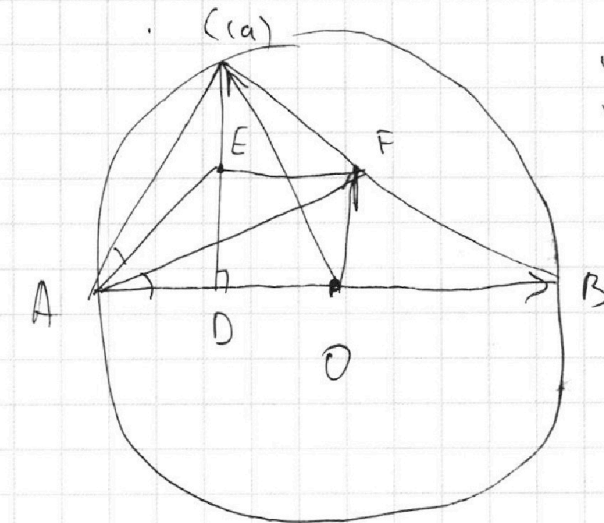
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = \frac{a+1}{2} \Rightarrow \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2} = \vec{OF} \Rightarrow$$

$\Rightarrow F$ — середина BC
по условию $AB : BD = \frac{7}{5}$

$$\Rightarrow AD = 2x, \quad BD = 5x$$

$$\Rightarrow EF = \frac{1}{2}BD = 2,5x$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = x\sqrt{10}$$

$$S_{\triangle ACO} : S_{\triangle CEF} = \left(\frac{CD}{EF} \right)^2 \quad \text{т.к. } \triangle CEF \sim \triangle CDB \text{ и } \triangle ADC \sim \triangle ADC$$

$\Rightarrow$ коэф. подобия $\triangle ADC$ и $\triangle CEF = \frac{CD}{EF}$, а
площади относятся как квадраты коэф-та подобия.

$$\left(\frac{CD}{EF} \right)^2 \geq \frac{10}{(2,5)^2} \geq \frac{10}{\frac{25}{4}} \geq \frac{40}{25} \geq \frac{8}{5}$$

Ответ: $8 : 5$

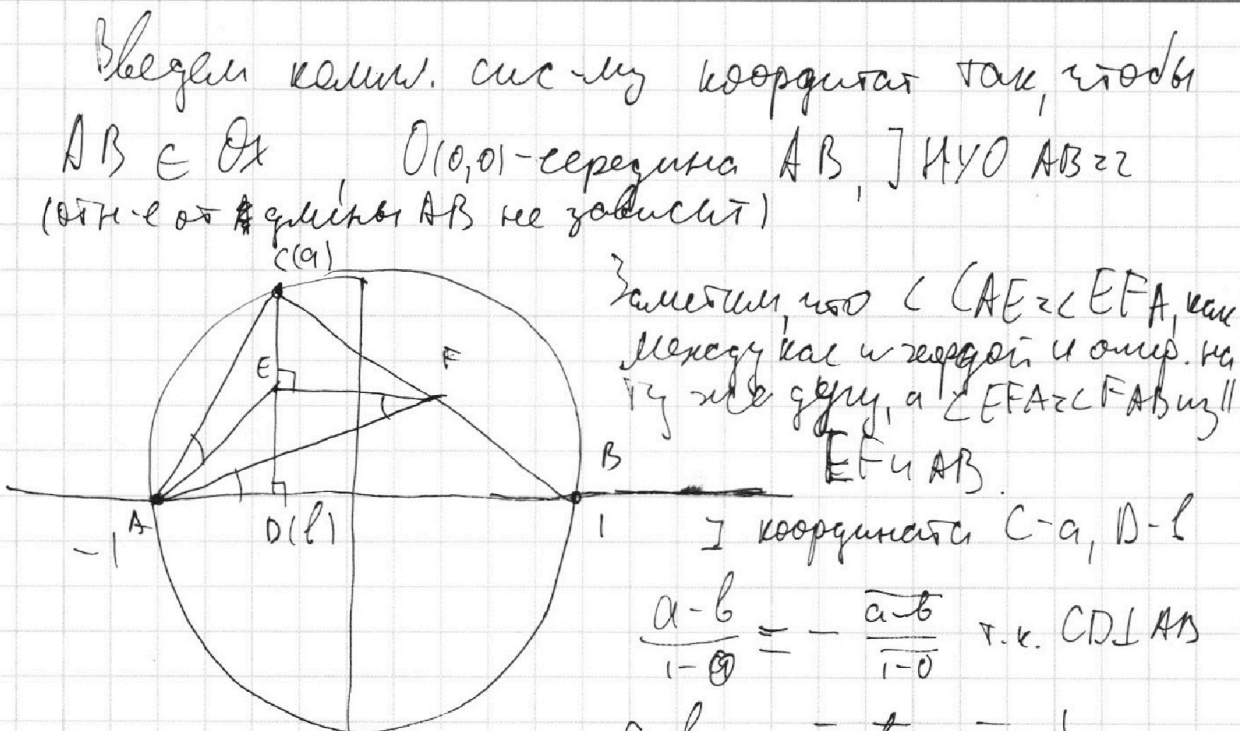
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$b = b$, т.к. $D \in OX \Rightarrow a-b = -\frac{1}{a} + b \Rightarrow b = \frac{a^2+1}{2a}$

$E(x)$, $F(y)$ тогда: $\frac{x-y}{1-0} = \frac{\overline{x-y}}{1-0}$ т.к. $EF \parallel AB$

$\Rightarrow \boxed{x-y = \overline{x-y}}$

$E \in CD \Rightarrow CE \perp AB \Rightarrow \frac{a-x}{1-0} = -\frac{\overline{a-x}}{1-0}$

$$a-x = -\frac{1}{a} + \overline{x} \Rightarrow \boxed{x+\overline{x} = a + \frac{1}{a}}$$

$F \in BC \Rightarrow BF \perp AC \Rightarrow$

$$\frac{1-y}{a+1} = -\frac{\overline{1-y}}{\overline{a+1}} \Rightarrow (1-y)(a+1) = -a(a+1)(1-\overline{y})$$

$(a+1)(1-y) = -a(a+1)(1-\overline{y})$

$$\boxed{1-y = -a + a\overline{y}}$$

$$\begin{cases} x-\overline{x} = y-\overline{y} \\ x+\overline{x} = a + \frac{1}{a} \\ 1-y = -a + a\overline{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y-\overline{y} + a + \frac{1}{a}}{2} \\ \overline{x} = \frac{a + \frac{1}{a} - y + \overline{y}}{2} \\ 1-y = -a + a\overline{y} \end{cases}$$

1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \sin \cos(5\pi x) = 9\pi - 2x$$

$$\text{Но } 5\pi x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = 9\pi - 2x, & k \in \mathbb{Z} \\ 10\left(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 9\pi - 2x, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\pi - 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x \\ 10x - 5\pi + 20\pi k = 9\pi - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x = 20\pi k - 4\pi \\ 12x = 14\pi - 20\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi k}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(5k - 1) \\ x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi k = \frac{\pi}{3}(7 - 5k) \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2}(5k - 1); \frac{\pi}{3}(7 - 5k), k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{-5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} & (1) \\ \frac{-5}{6a} < \frac{-4\sqrt{2}}{7} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 0 > \frac{35 + 24a\sqrt{2}}{a}$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, 0 \right)$$

$$(2) \quad 0 > \frac{24a\sqrt{2} - 35}{a}$$

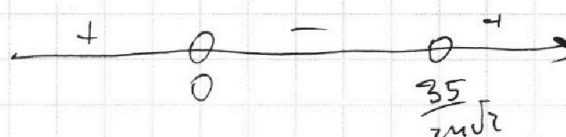
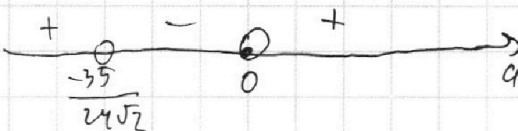
$$\Rightarrow a \in \left(0, \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, 0 \right) \cup \{0\} \cup \left(0, \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$$

где концы из точки a , ~~при $a=0$~~ , $b = \frac{-45}{7} \cdot 6a$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$$



(2)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

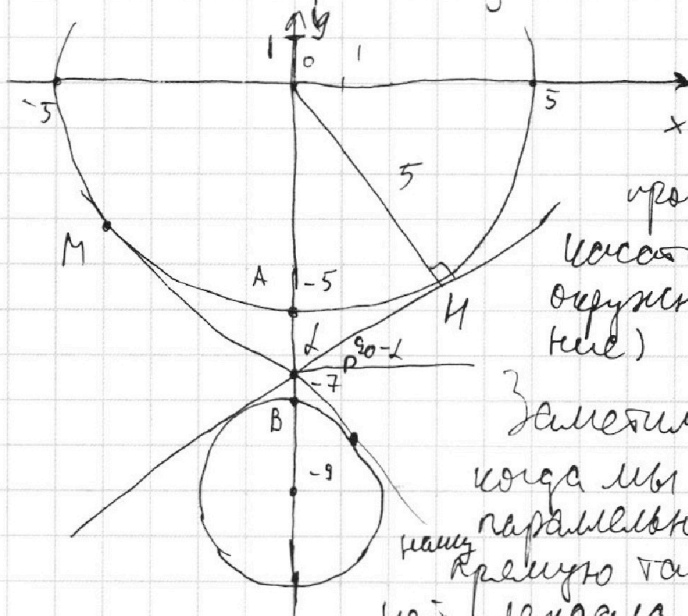
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



преобразуем ур-ние системы:

$$\begin{cases} y \geq \frac{-5x+6}{6a}, a \neq 0 & - \text{прямая} \\ x \geq \frac{6}{5}, a \geq 0 & - \text{тоже прямая} \\ x^2 + y^2 \geq 5^2 & - \text{окр-ть с ц. в } (0,0) \text{ и } R=5 \\ x^2 + (y+9)^2 \geq 9^2 & - \text{окр-ть с ц. в } (0,-9) \text{ и } R=9 \end{cases}$$



проведём общие касательные к окружностям (внутренние)

Заметим, что если, когда мы меняем a параллельно перенесём прямую так, чтобы P на ней лежала, она не будет

лежать внутри угла MPN , то 4 решений не будет, т.к. она раздвинет 2 окр-ти $\Rightarrow$ и параллельная ей прямая $P \leq 1$ из них. так же, если она совпадёт с касательной, корней всё ещё $\leq 2 \Rightarrow$ её условие короче - т.е. больше, чем у PN , либо меньше, чем у PM . Им. кор. $PN \geq 5(30-2) = 5(28) = 140 = PN: ON$

$AP:PB = 5:2$, т.к. $\exists$ гомотетия с ц. в P , переводящая окр-ти одну в другую. $\Rightarrow AP \geq \frac{5}{7} \cdot AB$, $AB \geq 2 \Rightarrow AP \geq \frac{10}{7} \Rightarrow OP \geq \frac{15}{7} \Rightarrow BP \geq \frac{5}{7} \sqrt{81-49} = \frac{5\sqrt{32}}{7}$ по т. Пифагора $\Rightarrow \angle \geq \arcsin \frac{15}{17}$

Заметим, что при $a \geq 0$ $b \geq 0$ - не реализуется, так как это равно 0

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$] a = \log_{11} x, b = \log_{11} 95y$$

$$a+b = ?$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = \frac{-2}{3a} - 5 \quad \left| \begin{array}{l} \text{умножим на } a, \text{ чтобы } \\ \text{сложить} \end{array} \right.$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = \frac{-13}{3b} - 5$$

$$a^5 + b^5 + 5(ab) - 6 + \frac{2}{3} + 1 + \frac{13}{3} = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + a^4 + 5) = 0$$

мб $a+b \geq 0$ - запишем

$$\text{мб } a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + a^4 + 5 = 0$$

$$] p = a+b, q = ab$$

$$(p^2 - 2q)^2 - a^3b^2 - ab(a^2b^2) + 5 = 0$$

$$5 + (p^2 - 2q)^2 - q^2 - (p^2 - 2q)q = 0$$

$$5 + p^4 - 4p^2q + 4q^2 - p^2q + 2q^2 = 0$$

$$p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 = 0$$

Заметим, что если $q > 0$, то $p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 > 0$

$\Rightarrow q \geq 0 \Rightarrow$

$$(1) (a-b)^2 \geq ab \Rightarrow p^4 - 5p^2q = p^2(p^2 - 5q) = p^2(a^2 + b^2 - 2ab) =$$

$$= p^2((a-b)^2 - ab) \geq 0, p \geq 0 \Rightarrow p^2 - 5p^2q + 5q^2 + 5 > 0$$

$$(2) (a-b)^2 < ab \Rightarrow p^4 - 4p^2q < p^2(a-b)^2 \geq 0$$

$$5q^2 + 5 - p^2q \geq 5a^2b^2 + 5 - (a^2 + ab + b^2)ab \geq$$

$$\geq 3a^2b^2 + 5 - ab(a^2 + b^2) = ab(3ab - a^2 - b^2) + 5 \geq ab(ab - (a-b)^2) + 5$$

$$ab \geq q(ab - (a-b)^2) + 5 > 0 \Rightarrow p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 > 0$$

$\Rightarrow$ оно равно нулю быть не может $\Rightarrow a+b \geq 0 \Rightarrow \log_{11}(\frac{1}{2}xy) \geq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}xy \geq 1 \Rightarrow xy \geq 2$ Ответ: 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Зафиксируем точку (x, y) и посмотрим
где лежат для неё такие точки (x_2, y_2)
 $y = -6x - 40 + (6x_2 + y_2)$ - прямая.

замечим, что $PQ \parallel QR$ и этой прямой,
т.к. $\frac{90-0}{-15-0} = -6$ - углов наклона.

замечим, что $\max(6x_2 + y_2)$ на QR .

существенно $6x_2 + y_2 = C$ - макс $\rightarrow$

$y = -6x + C$ - они лежат на прямой QR

на QR - верхнее из таких, $\parallel$ паралл $\rightarrow$

$\Rightarrow$ макс C на $QR \Rightarrow$ макс $C = 12 + 90 = 102$

~~точно~~
~~все возможные пары~~

$\Rightarrow$ число всех таких пар = числу точек

в паралл-е $O_1(2,0)$, $P(-15, 40)$, $Q(6, 40)$,
 $R(9, 0)$

то число равно ~~тогда~~ $(15+1)(9+1) =$
 $= 160$

Ответ: 160

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

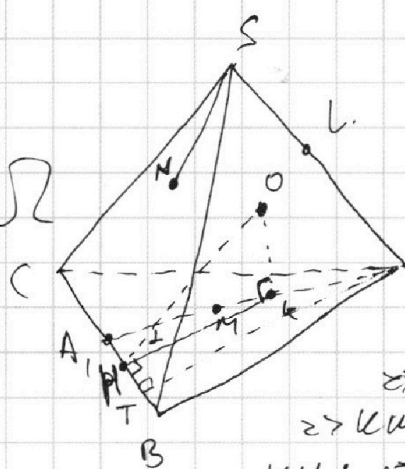
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

д)

Ω - центр Ω



Ω - оск. е. высоты из A
на BC
 $\Omega \in BC$

$KH \perp BC$

$SN \approx SL \approx 6$ кас.

касательные $\Rightarrow$

$\Rightarrow AL \approx 20 - 6 \approx 14 \approx AK \Rightarrow$

$\Rightarrow KH \approx 20 - 14 \approx 6$

$KH : AT \approx AK : AA$, т. к. ~~по~~

$\triangle A_1KH \sim \triangle A_1BA$

$$\frac{AK}{AA_1} \approx \frac{16}{30}$$

$$\Rightarrow KH \approx AT \cdot \frac{16}{30}$$

$$\frac{1}{3} \cdot AT \cdot CB \approx 180 \Rightarrow AT \approx 18 \Rightarrow KH \approx \frac{18 \cdot 8}{15} \approx \frac{48}{5}$$

$OK \perp AK$, т. к. ~~ABC~~ касается Ω

$$\Rightarrow \text{по т. П. } \angle OKH \approx \angle OKK \approx \frac{OK}{KH} \approx \frac{8}{\frac{48}{5}} \approx \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \angle OKK \approx \arctg \frac{5}{6}$$

Ответ: $\arctg \frac{5}{6}$

2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

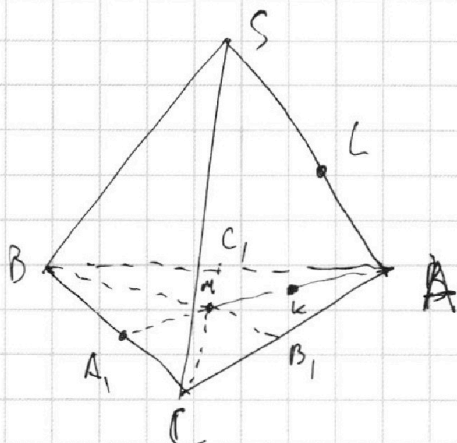
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

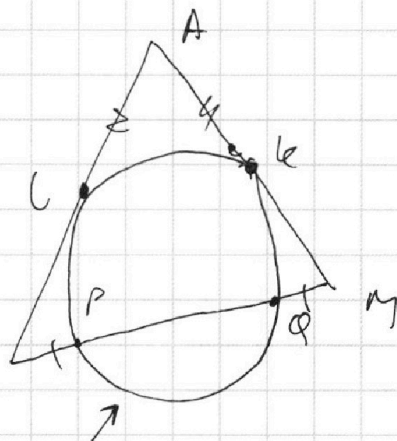
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a)



$$SA \approx BC \approx 20, S_{ABC} \approx 180$$

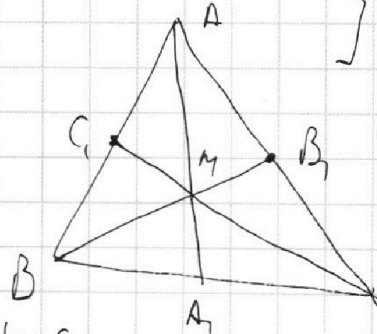
! $ML \perp AS$!



сечение сферы и т.д.

Заметим, что $SP \cdot SQ = SL^2$ и $MP \cdot MQ = MK^2$
из т.т. о кас. и сек. но $SP = MQ, SQ = MP$
 $\Rightarrow SL = MK \Rightarrow AS = AM \Rightarrow AM = 20$

$\triangle ABC$



A_1, B_1, C_1 - середины сторон

BE, AC и AB соотв.

$$AM = 20 \Rightarrow MA_1 = A_1B = A_1C = 10$$

$$\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$$

$$S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC}, \text{ но } S_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot BB_1$$

$$\cdot CC_1 \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 180 \cdot \frac{8}{9} = 160$$

$$AA_1 = \frac{3}{2} \cdot 20 = 30 \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 160 = 4800$$

Ответ пункта а: 4800

1

МФТИ



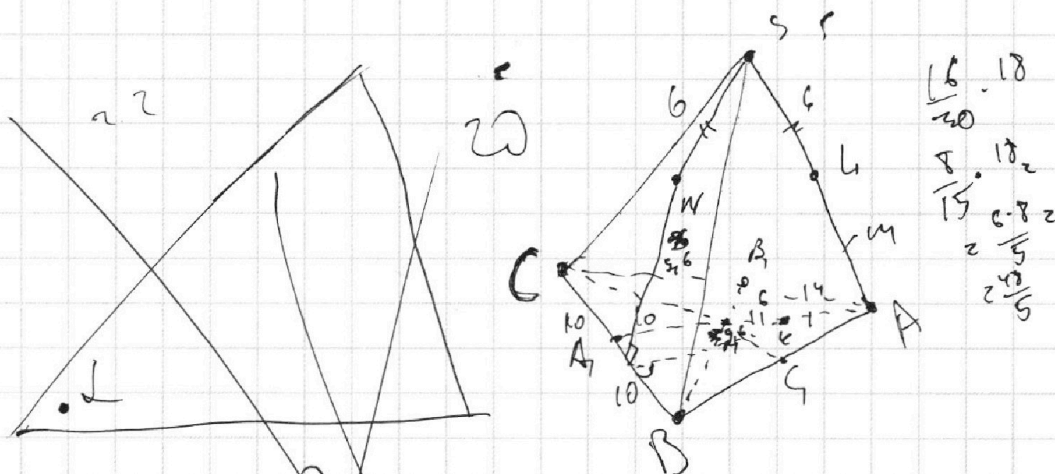
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



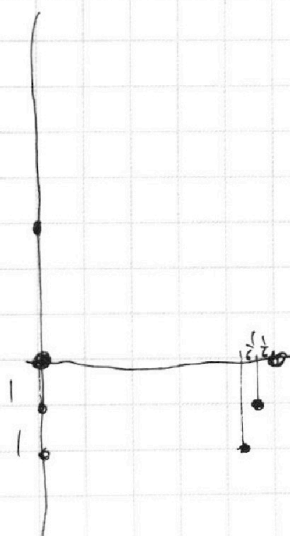
$$400 = 900 +$$

$$100 = 225 + 121 - 2 \cdot 15 \cdot 11 \cdot \cos \angle$$

$$\cos \angle = \frac{246}{2 \cdot 15 \cdot 11} = \frac{123}{15 \cdot 11} = \frac{41}{55}$$

$$\frac{20}{\sin \angle} = 18 \quad \sin \angle = \frac{5}{4}$$

$$\frac{(55-41)(55+41)}{55^2} = \frac{14 \cdot 96}{55^2}$$



$$6x^2 - 6x + y_1 - y = 48$$

$$y = 48 - 6x + 6x_2 + y_2 - 48$$

$$y = -6x - 48 + (6x_2 + y_2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

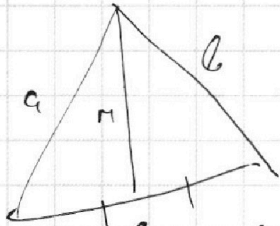
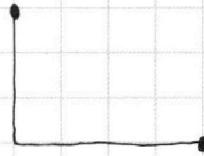
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

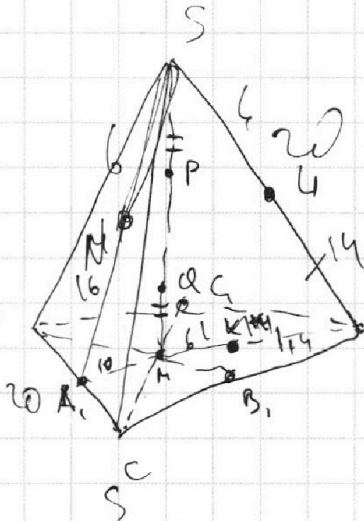


$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$



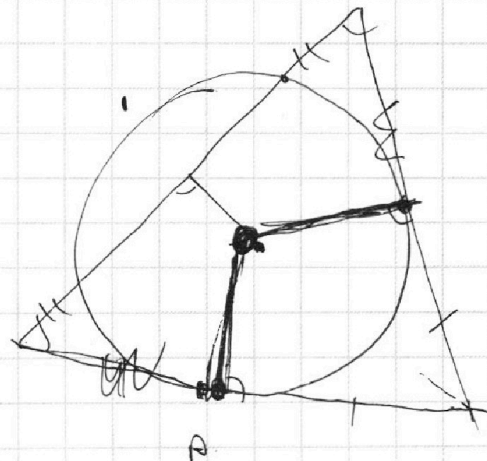
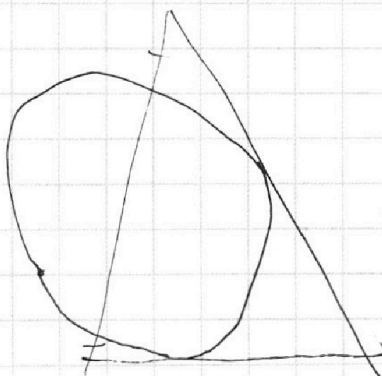
$$m^2 + \frac{c^2}{4} = a^2 + b^2$$

$$m^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$



$$AA_1 = 30$$

$$\frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{(a^2 + b^2 - c^2)}$$



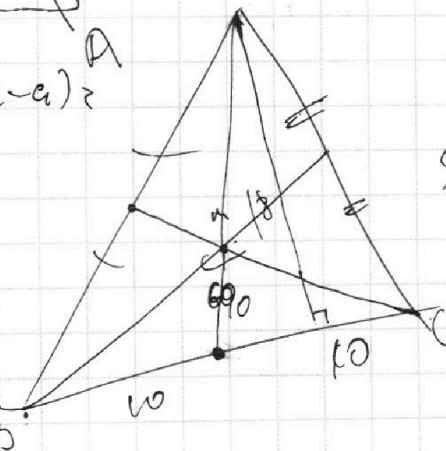
$$(a+b-c)(a+b+c)(a-b-c)(a-b+c) =$$

$$= (a^2 - (b-c)^2)((b+c)^2 - a^2)$$

$$\frac{2}{3} \cdot 180 = BM \cdot MC = \frac{4}{9} \cdot BB_1 \cdot CC_1$$

$$120$$

$$9 \cdot \frac{120}{9} = 270 \cdot 30 = 8100$$



$$S = 180$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

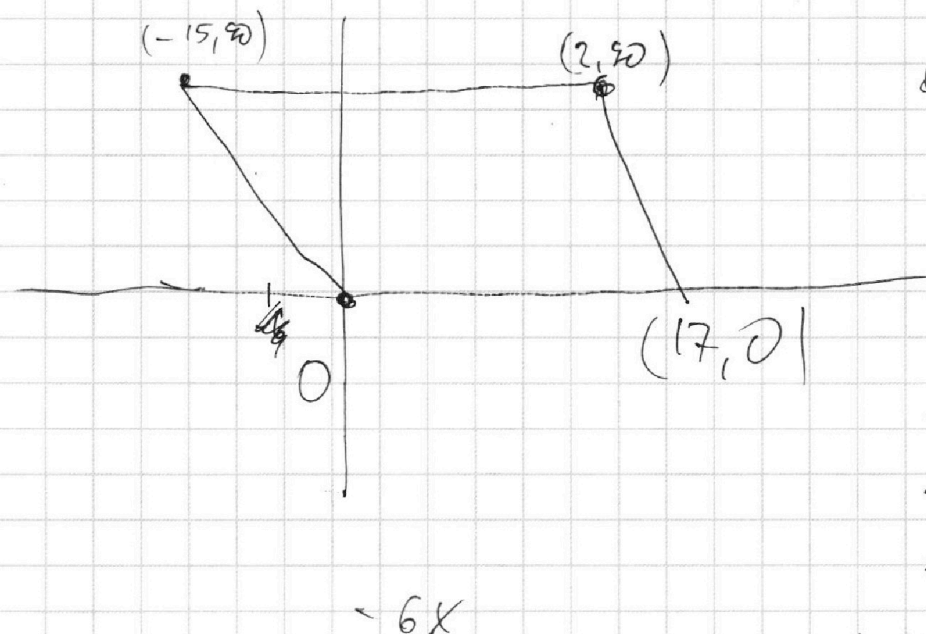
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = -6x - 48 + (6x_0 + y_0)$$



$$6x_0 + y_0 = C$$

$$y_0 = -6x_0 + C$$

$$6 \cdot 2 + 90 = 102$$

$$-6x + 102 - 48 =$$

$$= -6x + 54$$

$$\begin{array}{r} 27 \cdot 2 \\ 6 \cdot 9 \end{array}$$

$$x = 9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

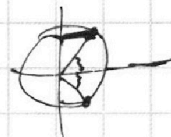


$$5a^2b^2 \geq a^2b + b^2a + 2a^2b^2$$

$$3a^2b^2 + 5 \geq ab(a^2 + b^2)$$

$$ab(3ab - a^2 - b^2) + 5 \geq 0$$

$$ab(ab - (a-b)^2) + 5 \geq 0$$

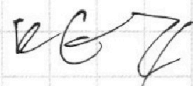


$$\sin x \geq \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) \geq 9\pi - 2x$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) \geq 9\pi - 2x$$

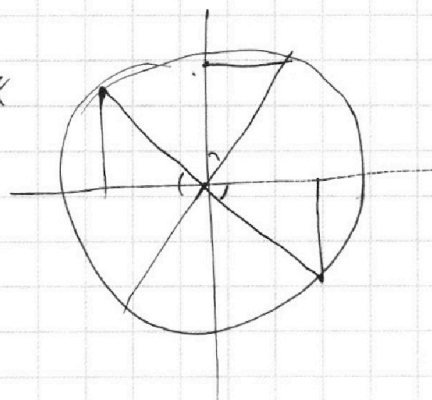
$$10\left(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \geq 9\pi - 2x$$



$$5\pi - 10x + 20\pi k \geq 9\pi - 2x$$

$$8x \geq 20\pi k - 4\pi$$

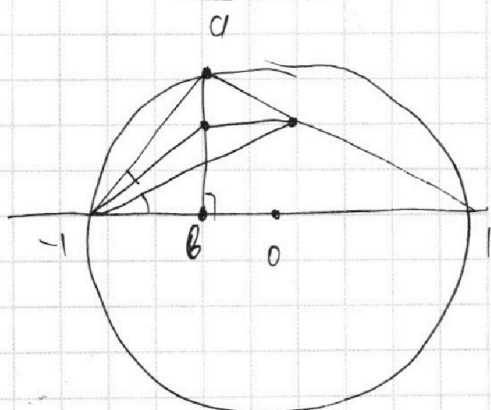
$$x \geq \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}$$



$$10x - 5\pi + 20\pi k \geq 9\pi - 2x$$

$$12x \geq 14\pi - 20\pi k$$

$$x \geq \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi k$$



$$\frac{a-b}{2} = (\bar{a}-\bar{b}) \quad \bar{b} = b$$

$$a-b = -\frac{1}{a} + b$$

$$2b = a + \frac{1}{a}$$

$$b \geq \frac{a^2+1}{2a}$$



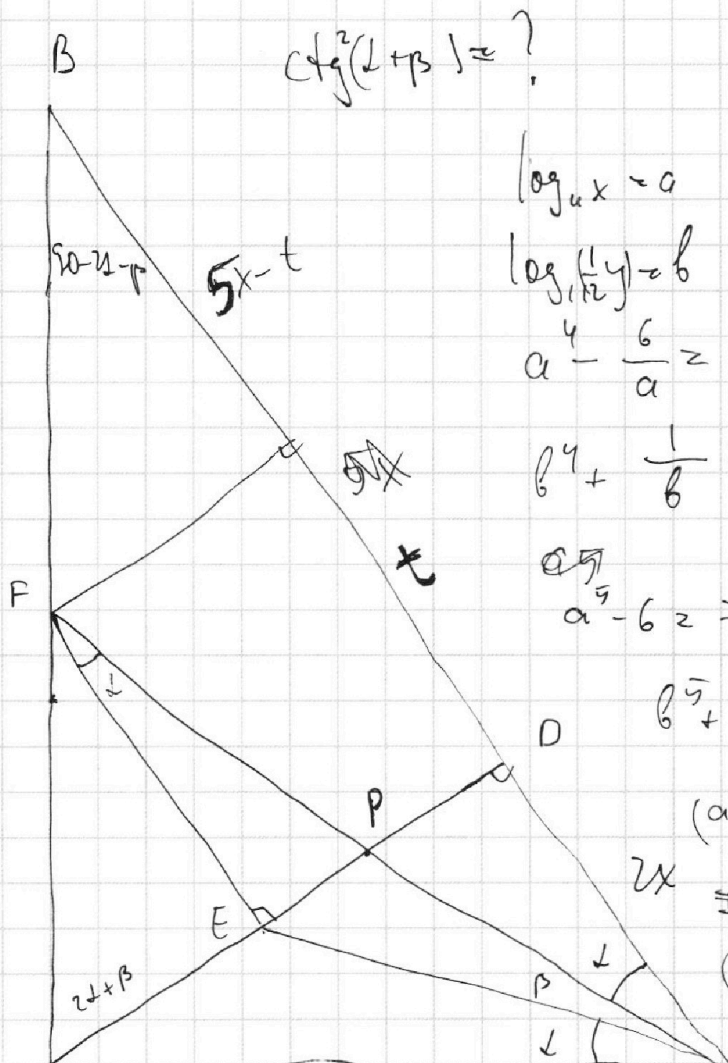
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ctg^2(2+\beta) = ?$$

$$\log_a x = a \quad a+b = ?$$

$$\log_{\frac{1}{a}} y = b$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = \frac{-2}{3a} - 5$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = \frac{-13}{3b} - 5$$

$$a^5 - 6 = \frac{-2}{3} - 5a$$

$$b^5 + 1 = \frac{-13}{3} - 5b$$

$$(a^5 + b^5) + 5(a+b) \neq$$

$$2x \neq 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 5) \geq 0$$

$$(a+b) \geq 0 \quad 5a^2b^2 + 5 \geq (a+b)^2 ab \quad A$$

$$(a^4 + b^4 - ab(a^3 + b^3) + a^2b^2 + 5) \geq 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 - ab(a^3 + b^3) - a^2b^2 + 5 \geq 0$$

$$(p^2 - 2q)^2 - q(p^2 - 2q) - q^2 + 5 \geq 0$$

$$a+b = p, ab = q$$

$$(p^2 - 2q)^2 - p^2q + 2q^2 - q^2 + 5 \geq 0$$

$$p^4 - 4p^2q + 4q^2 + q^2 - p^2q + 5 \geq 0$$

$$p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 \geq 0$$

$$p^2(p^2 - 5q) + 5q^2 + 5 \geq 0$$

$$(a+b)^2 - 5ab$$

$$(a-b)^2 - ab$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

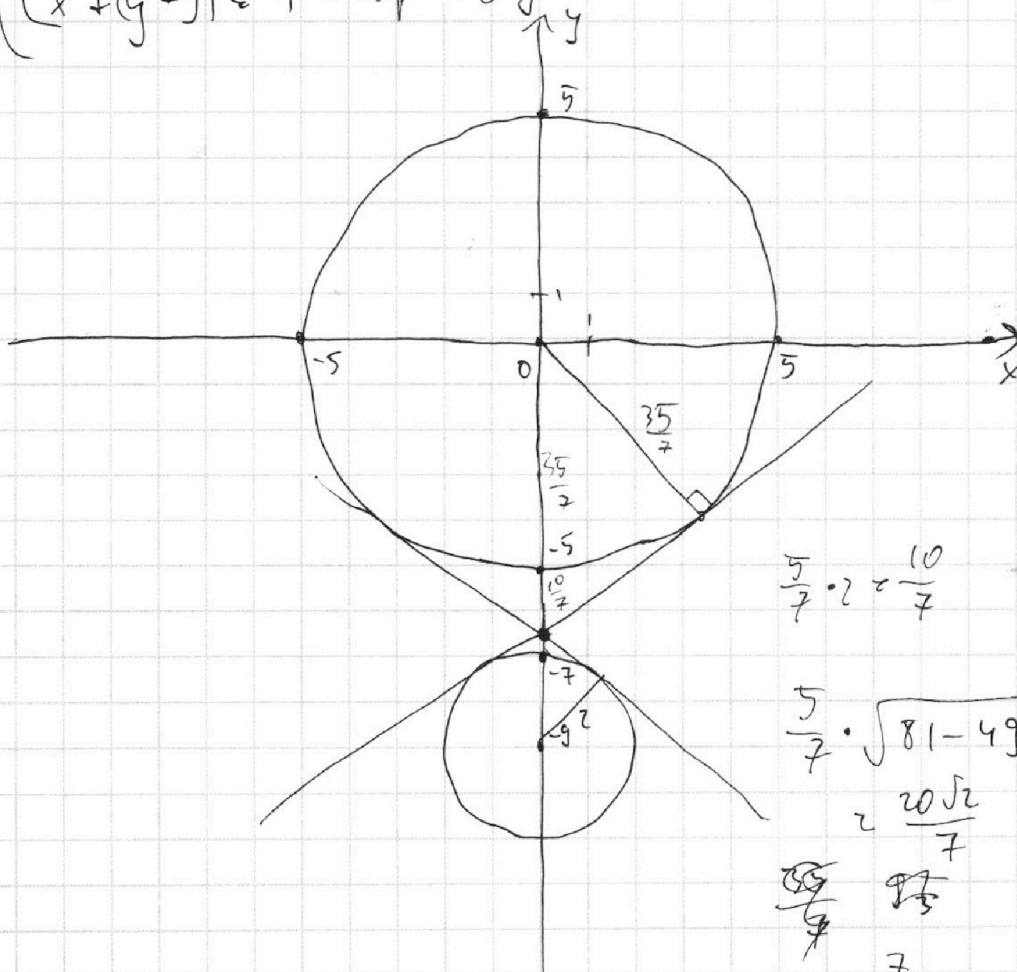
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-5x+6}{6a}, a \neq 0 \text{ если } a \geq 0, \text{ то } 5x = 6 \\ x^2 + y^2 = 25 - \text{окр-ть с ц. } (0,0) \text{ и } R=5 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 - \text{окр-ть с ц. } (0,-9) \text{ и } R=2 \end{cases}$$

$x = \text{const}$
раздели
отдельно



$$\frac{5}{7} \cdot 2 = \frac{10}{7}$$

$$\frac{5}{7} \cdot \sqrt{81 - 49} =$$

$$= \frac{20\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{7}{\sqrt{32}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

an

$$abc^2 : 2^{6+14+16} \cdot 3^{13+21+25} \cdot 5^{13+11+28}$$
$$= 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$$
$$abc \geq 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$
$$a \geq 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}$$
$$b \geq 2^2 \cdot 3^8 \cdot 5^0$$
$$c \geq 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$
$$a+b \geq 11$$
$$b+c \geq 13$$
$$a+c \geq 28$$
$$a+b \geq 13 \text{ (14)}$$
$$a+c \geq 25$$
$$b+c \geq 29$$
$$a > b$$
$$a-b \geq 4$$
$$a+b \geq 14$$
$$c \geq 16$$
$$a+b \geq 26$$
$$b+c \geq 14$$
$$b \geq 5$$
$$a \geq 9$$