



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



$$(2AC^2 + 2BC^2 - AB^2)(2AB^2 + 2AC^2 - AC^2) = 4AC^2(2AC^2 - AB^2 + 2BC^2)(2AB^2 - AC^2 + 2BC^2)$$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a \cdot b = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot t \quad abc - \min$$

$$\textcircled{1} \quad bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \text{ км}$$

$$\textcircled{3} \quad ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \text{ м}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^{14}} \cdot \frac{1}{5^{15}} \cdot \frac{\text{км}}{\text{м}}$$

$$m \cdot 2^2 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \cdot b = a \cdot k$$

$$m \cdot 2^2 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \cdot b^2 = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot t; \quad m \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot b^2 = 2^4 \cdot t \Rightarrow t : 5^4 \cdot 3 \textcircled{2}$$

AA

$$\Rightarrow ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \cdot t_1$$

$$\begin{aligned} a &= 2^4 \cdot 3^9 \\ b &= 2^2 \cdot 3^5 \\ c &= 2 \cdot 3^{15} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \cdot t_1$$

$$\textcircled{1} \cdot \textcircled{3} : \textcircled{2} \quad \frac{a^2 \cdot c \cdot b}{bc} = \frac{2^2 \cdot 3^{30} \cdot 5^{43} \cdot t_m}{2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot k} = 2^8 \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot \frac{t_m}{k}$$

$$k \cdot t_m = 2^8 \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot t \cdot m \quad \text{if } a : 5^{30}, \text{ then } a : 5^{15}$$

$$\textcircled{1} \cdot \textcircled{2} \cdot \textcircled{3} = abc = 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{28 \cdot 2} \cdot t_1 \text{ км, где } t_1 \text{ км} \cdot 21$$

$$\Rightarrow abc - \min = 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{28 \cdot 2} \Rightarrow abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$\text{по условию: } \begin{cases} a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{15} \\ b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0 \\ c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{13} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \\ bc &= 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac &= 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\boxed{N2} \quad \arccos(\sin X) = \frac{9\pi - 2X}{10} \Rightarrow -1 \leq \frac{9\pi - 2X}{10} \leq 1$$

$$\sin X = \cos(0,9\pi - 0,2X)$$

$$\begin{aligned} -10 &\leq 9\pi - 2X \leq 10 \\ \frac{9\pi - 10}{2} &\leq X \leq \frac{9\pi + 10}{2} \end{aligned}$$

$$\sin X = \cos 0,9\pi \cdot \cos 0,2X + \sin 0,9\pi \cdot \sin 0,2X$$

$$\sin X = -\cos(0,1\pi + 0,2X) = -\cos 0,1\pi \cdot \cos 0,2X + \sin 0,1\pi \cdot \sin 0,2X$$

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

AB пер. к ω в т. X.

$AB \parallel EF \Rightarrow \angle AEF = \angle FAB$ (поскольку $AB \parallel EF$) $\Rightarrow \angle EAB = \angle FXA = \angle C = \angle CAF$ - т.к. CA - кас. к ω .

$\angle CEF = \angle CDB = x^\circ$ - сопр. при CD-кас.
 $\angle CFE = \angle CBD$ - сопр. при CF-кас.

$$\angle CAF = \angle C = \angle CAE + \angle EAF =$$

$$= \angle C = \angle FAB + \angle EAF$$

$$\angle CAE = \angle FAB.$$

CD - выс. перп. к AB $\Rightarrow \angle ACD = \angle CBD$
 $\triangle ACD \sim \triangle BCD \sim \triangle ABC$

$$\left. \begin{array}{l} \angle CAE = \angle FAB \\ \angle ACE = \angle FBA \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle ABF \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{FB}, \text{ т.к.}$$

$$\frac{AC}{AB} = \sin C = \frac{CE}{CF} = \frac{CE}{FB} \Rightarrow CF = FB = \frac{1}{2} BC$$

$$BD = x \Rightarrow AB = 0,4x. \quad CD^2 = AD \cdot DB = 0,16x^2 \Rightarrow \text{По т. Пифагора:}$$

$$\triangle ACD: AD^2 + CD^2 = AC^2 = 0,16x^2 + 0,16x^2 = 0,32x^2$$

$$\triangle CDB: CD^2 + BD^2 = BC^2 = 0,16x^2 + x^2 = 1,16x^2 \Rightarrow CF^2 = \frac{1}{4} BC^2 = \frac{1,16}{4} x^2$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CDB \sim \triangle ADC \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CEF}} = \left(\frac{AC}{CF} \right)^2 = \frac{0,32 \cdot 4}{1,16} =$$

$$= \frac{1,28}{1,16} = \frac{8}{5}$$

Ответ: $\frac{8}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\boxed{14} \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 16y + 77) = 0 \end{cases}$$

1. $x^2 + y^2 = 25$. Подходят пары $(x; y); (-x; -y); (-x, y); (x, -y)$.

если $x = 0$. $y = \pm 5$.

$$\begin{cases} 6 \cdot 5a - b = 0 \\ -6 \cdot 5a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = 0.$$

аналог. если $y = 0$. $x = \pm 5$.

Если иначе: $\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ -5x - 6ay - b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0. \quad 5x + 6ay = 0. \quad a = \frac{-6y}{5x}, \text{ но } x \neq 0$
 потому имеют разные знаки $\Rightarrow a = \emptyset$

$$2. \quad x^2 + y^2 + 16y + 77 = 0$$

$$x^2 + (y+8)^2 = 4. \quad |x| \leq 2. \quad |y+8| \leq 2 \Rightarrow -10 \leq y \leq -6. \quad x, y \neq 0.$$

если есть пара $(x; y)$ то есть $(-x; y)$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ -5x + 6ay - b = 0 \end{cases} \quad x = 0 - \text{тогда} \Rightarrow a = \emptyset$$

ответ: $a = \emptyset$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5) $\log_x \frac{1}{11} = -2 \log_x 11 = -\frac{2}{3} \log_x 11$. $\log_x 11 = \frac{1}{m}$. $\log_{11} x = \frac{1}{m}$. $x = \sqrt[11]{11}$

тогда: $\log_x 11 = \frac{1}{m}$. $m \neq 0$.

$$\left(\frac{1}{m}\right)^4 - 6m = -\frac{2}{3}m - 5 \quad | \cdot 3m^4$$

$$3 - 18m^5 = -2m^5 - 15m^4$$

$$16m^5 - 15m^4 - 3 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$\log_y 11 = n$.

$y \neq 1$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^4 + n = -\frac{13}{3}n - 5 \quad | \cdot 3n^4$$

$$(y^5)^n = \sqrt[11]{11}$$

$$y = 2 \sqrt[11]{11}$$

$$3 + 3n^5 = -13n^5 - 15n^4$$

$$16n^5 + 15n^4 + 3 = 0, \quad \textcircled{2}$$

$$xy = 2 \sqrt[11]{11} \cdot 11^{\frac{1}{m}} = 2 \cdot 11^{\frac{m+n}{mn}}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \quad 16(m^5 + n^5) + 15(n^4 - m^4) = 0$$

$$(n^2 - m^2)(n^2 + m^2)$$

$$(n-m)(n+m)(n^2+m^2)$$

$$(m+n) \left(16(m^4 + n^4) + 15(n-m)(n^2+m^2) \right) = 0$$

1) $m = -n \Rightarrow xy = 2 \cdot 11^0 = 2$

$$2) 16(m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4) = 15(m-n)(n^2+m^2) = 15(mn^2 + m^3 - n^3 - nm^2)$$

$$16m^4 - 16m^3n + 16m^2n^2 - 16mn^3 + 16n^4 = 15mn^2 + 15m^3 - 15n^3 - 15nm^2$$



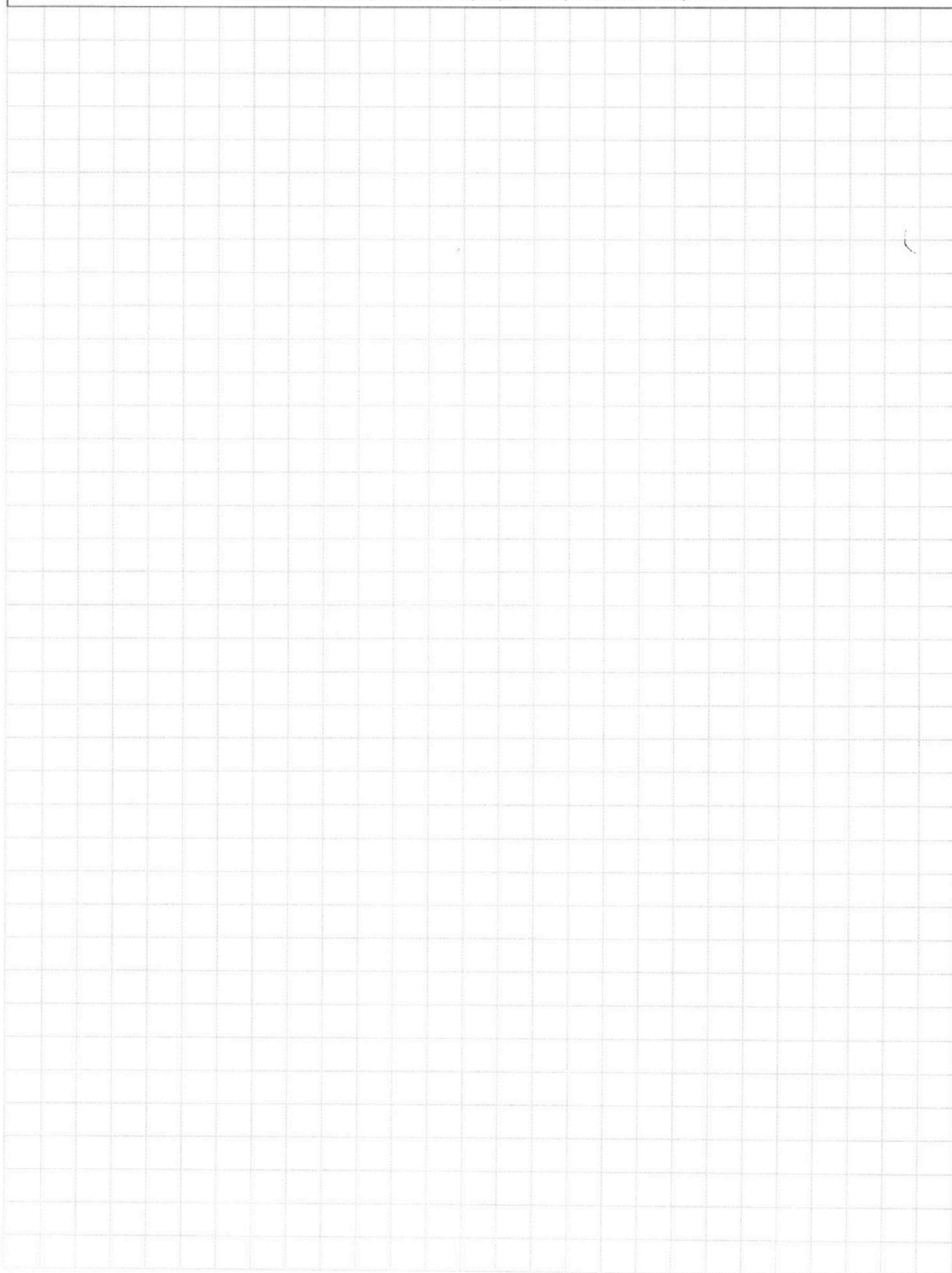
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





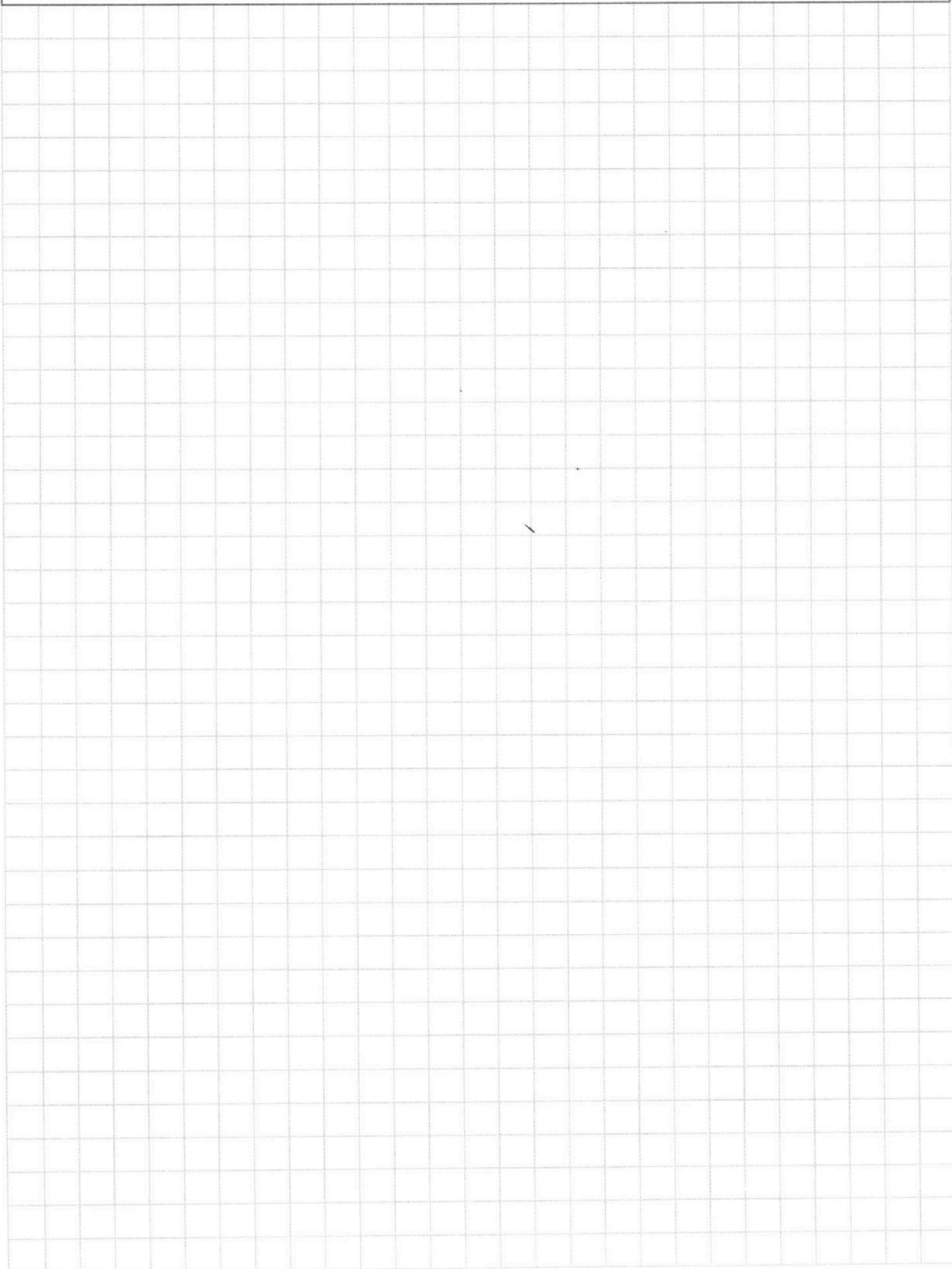
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





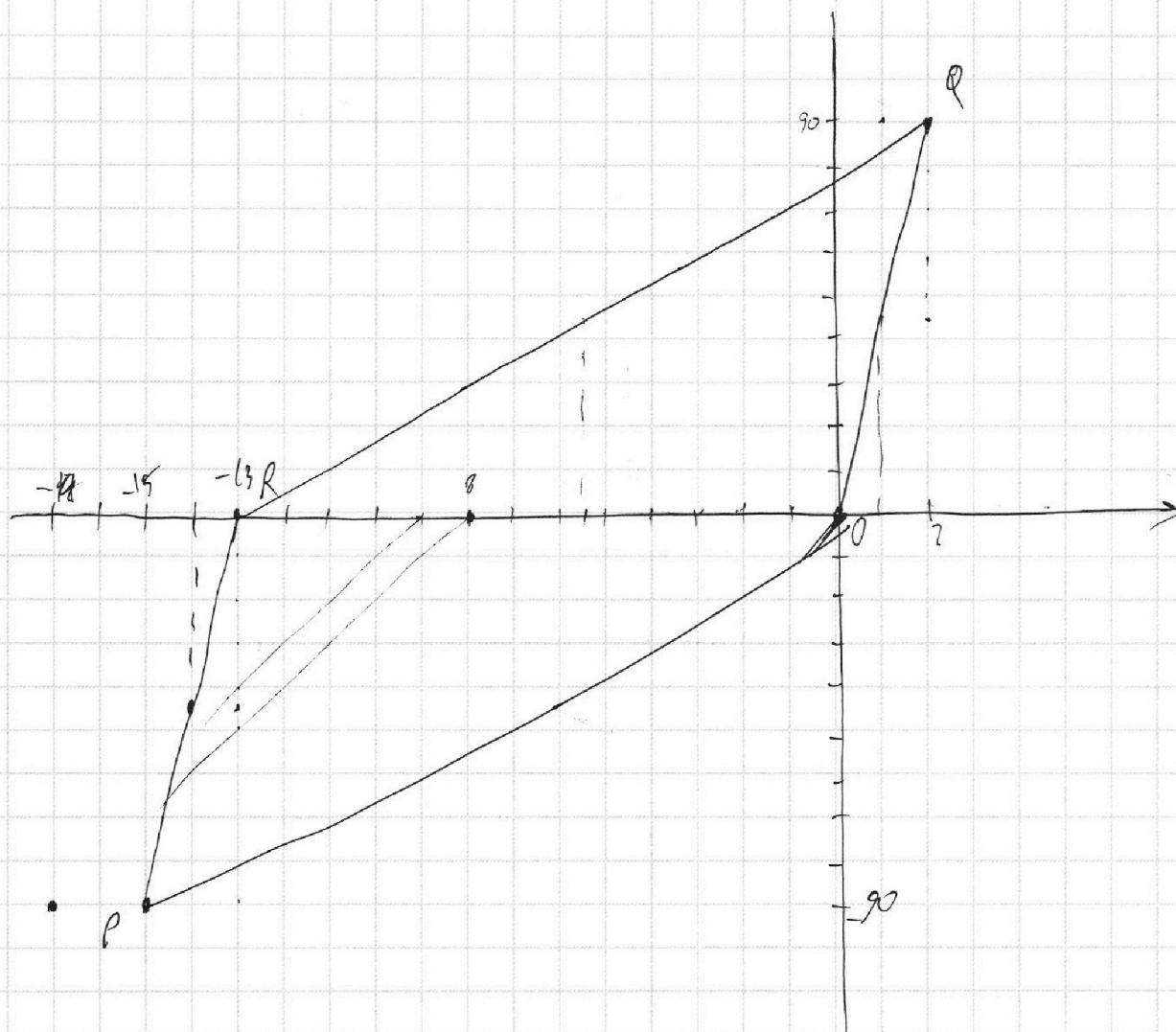
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

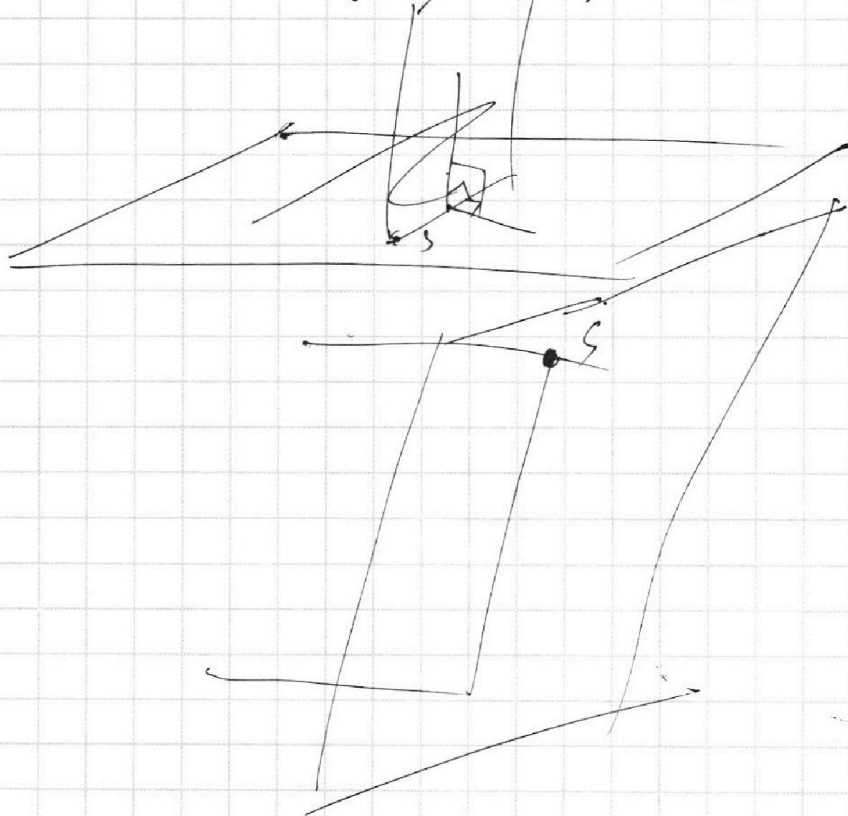
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$m^5 + a^5 = (m+n) (m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4)$$
$$m^5 - m^4n$$
$$m^5 - m^4/n + m^3/n^2 - m^2/n^3 + mn^4$$

$$m^5 + a^5 = (m+n) (m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4)$$
$$- m^4n + m^3n^2 - m^2n^3 + mn^4$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

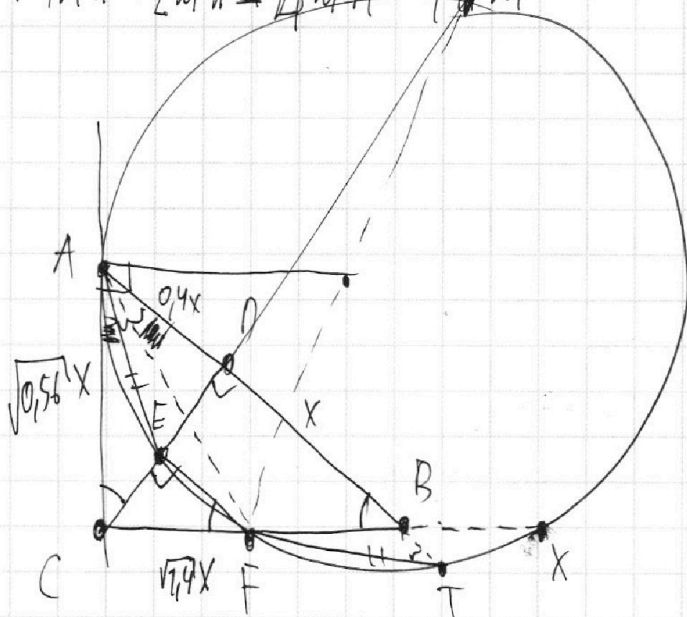
$$m^4 + n^4 + 4m^2n^2 + 2m^2n^2 - 4n^3m$$

$$20^2 - 14$$

$$80 + 8 = 88$$

$$196$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ \times 12 \\ \hline 392 \\ 1960 \\ \hline 2352 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} 10^2 - x^2 \\ 10^2 - y^2 \end{array}$$

$$CD = 0.4x^2 \Rightarrow CD = \sqrt{0.4}x$$

$$\frac{\sin(\angle)}{AE} = \frac{\sin(90 - \epsilon)}{AC}$$

$$\frac{\cos \epsilon}{AC} = \frac{\sin \epsilon}{FB}$$

$$\frac{(m+n)(m^2 - mn + n^2)}{m^3 - m^2n + mn^2 - mn^2}$$

$$\frac{\sin(\angle)}{FT} = \frac{\sin \epsilon}{FB} \frac{(m-n)^2}{(m^2 + n^2 - 2mn)^2}$$

$$\frac{FB}{AC} = \tan \epsilon = \frac{ED}{AD}$$

$$\sin(\angle) = \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BF}$$

$$(m^3 + n^3) = (m+n)(m^2 + mn + n^2)$$

~~CE~~

$$\frac{CE}{CF} = \frac{ED}{BF} \frac{m^3 + m^2n + mn^2 - nm^2 - mn^2 - n^3}{m^3 + m^2n + mn^2 - nm^2 - mn^2 - n^3}$$

$$m^5 + n^5 = (m+n)(m^4 - mn^4 - nm^4 + m^4)$$

$$m^5 + n^5 = (m+n)(\dots)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

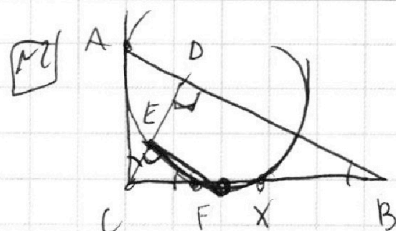
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = 1,4 BD$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$$

$$EF \parallel BD \Rightarrow \angle CEF = \angle CDB = 30^\circ$$

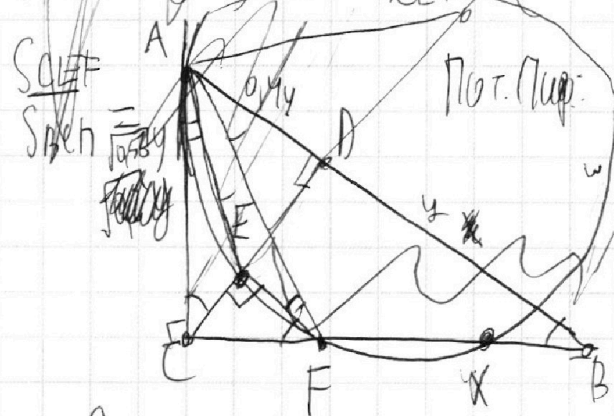
$\angle EFC = \angle DBC$ -
соответств. при $EF \parallel BD$,
 CD и BC - соответств. сек.

$$CD \parallel BC \Rightarrow \angle ACD = \angle ABC = \angle CFE \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle CFE$$

$$\frac{AC^2}{BD \cdot AB} = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{1,4} BD = \sqrt{1,4} y$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{BCD}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AC}{CF}\right)^2$$



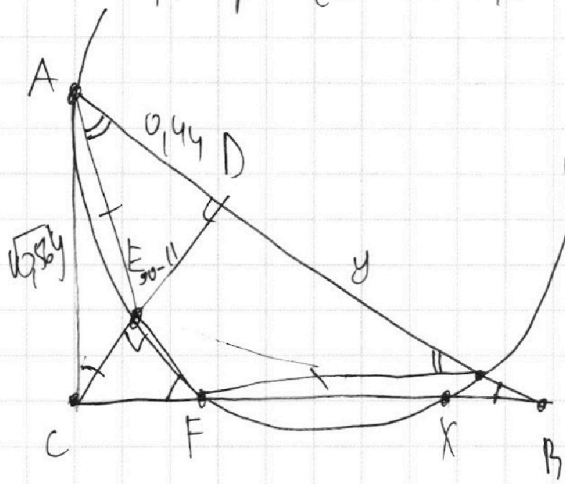
$$CD^2 = BC^2 - BD^2 = 0,4 BD^2$$

$$CD = \sqrt{0,4} y$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 0,16 y^2 + 0,4 y^2 = 0,56 y^2$$

$$AC = \sqrt{0,56} y$$

$$CT.T.C \text{ от } H.Okr: CA^2 = CF \cdot CX = 0,56 y^2$$



$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(60-30) = \cos 60 \cdot \cos 30 + \sin 60 \cdot \sin 30$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$