



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 1

$$\begin{cases} a, b: 2^7 3^{11} 5^{14} \\ bc: 2^{13} 3^{15} 5^{18} \\ ac: 2^{14} 3^{17} 5^{13} \end{cases}; a, b, c \in \mathbb{N}$$

Заметим, что, очевидно, ~~abc~~ ~~написанное~~ ~~abc~~ не содержит
иных делителей кроме 2, 3, 5, т.к. это не противоречит
заданной системе, пусть

$$a = 2^{A_1} \cdot 3^{A_2} \cdot 5^{A_3}, b = 2^{B_1} \cdot 3^{B_2} \cdot 5^{B_3}, c = 2^{C_1} \cdot 3^{C_2} \cdot 5^{C_3}, \text{ где}$$

$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ — целые ~~и~~ положительные
числа, т.к. a, b, c — натуральные. ~~Допустим, что~~

иных делителей нет, т.к. в ~~противном~~ ~~случае~~ ~~abc~~ будет
больше 1 n раз, где n — это еще один делитель. Тогда
по 2-ой теореме: для A_1, B_1, C_1 :

$$\begin{cases} A_1 + B_1 \geq 7 \\ B_1 + C_1 \geq 13 \\ A_1 + C_1 \geq 14 \end{cases}, \text{ а } abc = 2^{A_1+B_1+C_1} \cdot 3^{A_2+B_2+C_2} \cdot 5^{A_3+B_3+C_3}, \text{ тогда:}$$

$$\begin{cases} A_1 + B_1 \geq 7 \\ B_1 + C_1 \geq 13 \\ A_1 + C_1 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow A_1 + B_1 + C_1 + B_1 + A_1 + C_1 \geq 7 + 13 + 14 \Leftrightarrow A_1 + B_1 + C_1 \geq 17$$

пример: $A_1 = 4; B_1 = 3; C_1 = 10$

Аналогично для A_2, B_2, C_2 и A_3, B_3, C_3 :

$$\begin{cases} A_2 + B_2 \geq 11 \\ B_2 + C_2 \geq 15 \\ A_2 + C_2 \geq 17 \\ A_3 + B_3 \geq 14 \\ B_3 + C_3 \geq 18 \\ A_3 + C_3 \geq 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 + B_2 + C_2 \geq 21,5 \\ A_3 + B_3 + C_3 \geq 37,5 \end{cases}, \text{ т.к. } A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 \text{ — целые и положительные}$$

$$\begin{cases} A_2 + B_2 + C_2 \geq 22 \\ A_3 + B_3 + C_3 \geq 43 \end{cases}, \text{ пример: } \begin{cases} A_2 = 7; B_2 = 4; C_2 = 11 \\ A_3 = 19; B_3 = 0; C_3 = 24 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 (стр. 2)

С_н-но наименьшее $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$, возможно, например, ~~эта~~
пр:
 $a = 2^9 \cdot 3^7 \cdot 5^{13}$
 $b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0$
 $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{24}$

Ответ: $abc_{\min} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2 (стр. 2)

По св-ву медиан линии Δ : $S_{\triangle CEF} = \frac{1}{4} S_{\triangle CDB}$

т.к. $\frac{AB}{BD} = \frac{1,3}{1}$, то аналогично $\frac{AD}{DB} = \frac{0,3}{1}$, по св-ву отрезков
высотой и оснований на одной прямой:

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CDB}} = \frac{AD}{DB} = \frac{0,3}{1}, \text{ аналогично } S_{\triangle ACD} = \frac{0,3}{1,3} S_{\triangle ABC} = \frac{3}{13} S_{\triangle ABC},$$

$$\text{а } S_{\triangle CDB} = \frac{10}{13} S_{\triangle ABC} \text{ (т.к. } S_{\triangle ACD} + S_{\triangle CDB} = S_{\triangle ABC}), \text{ аналогично}$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{13} S_{\triangle ABC} = \frac{5}{26} S_{\triangle ABC}, \text{ откуда искомое}$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{\frac{3}{13} S_{\triangle ABC}}{\frac{5}{26} S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{3}{13}}{\frac{5}{26}} = \frac{6}{5} = 1,2$$

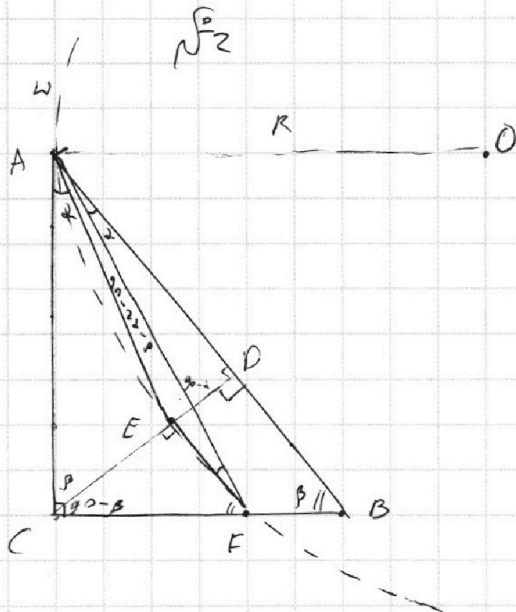
Ответ: площади треугольника ACD и треугольника CEF
относятся как $1,2 : 1$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$\triangle ABC$; $\angle C = 90^\circ$
 CD - высота
 $(O; R)$ - ω
 ω касается AC
 в точке A
 $\omega \cap CD = E$
 $\omega \cap BC = F$
 $\frac{AB}{BD} = \frac{1}{3}$
 $AB \parallel EF$
 $S_{\triangle ACD} = ?$
 $S_{\triangle BCF}$



т.к. $CD \perp AB$ и
 $AB \parallel EF$, то
 ~~$CD \perp EF$~~
 т.к. A - точка касания
 то AC - касательная
 к ω , тогда
 AE - хорда из той же
 точки и по свойству:
 $(FE \omega)$?
 $\angle CAE = \angle AFE$
 пусть $\angle CAE = \angle AFE = \alpha$

т.к. $EF \parallel AB$, то $\angle A$ - смежные и $\angle EFA = \angle FAB = \alpha$,
 как накрест-лежащие. Пусть $\angle ABC = \beta$, тогда $\angle DCB = 90^\circ - \beta$,
 (в $\triangle CDB$)

т.к. сумма $\angle D = 180^\circ$ и $\angle CDE = 90^\circ$, аналогично
 для $\triangle CEF$, $\angle CEF = 90^\circ$ (т.к. $CE \perp EF$) и $\angle ECF = 90^\circ - \beta$, т.к.

$\angle FCB = \beta$. т.к. $\angle ACB = 90^\circ$, то $\angle ACE = 90^\circ - \angle ECF = \beta$

т.к. по $\triangle ACE \sim \triangle ABF$ по двум углам ($\angle CAE = \alpha = \angle FAB$; $\angle ACB = \beta = \angle AFE$)

Отсюда: $\frac{CE}{AC} = \frac{FB}{AB}$; $\triangle CEF \sim \triangle CDB$ по двум углам
 ($\angle CEF = \angle CDB = 90^\circ$; $\angle CFE = \angle CBD$)

Отсюда: $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB}$, т.к. $CB = CF + FB$, то $\frac{CE}{CD} = \frac{CB - FB}{CB}$, т.е.

$FB = -CE \cdot \frac{CB}{CD} + CB$, из $\triangle ACE$ и $\triangle ABF$: $FB = \frac{CE \cdot AB}{AC}$, т.е.:

$$CB - CE \cdot \frac{CB}{CD} = CE \cdot \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow CB = CE \left(\frac{AB}{AC} + \frac{CB}{CD} \right)$$

Из прямоуг. $\triangle ABC$: $\sin \beta = \frac{AC}{AB}$, т.е. $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sin \beta}$; из $\triangle CDB$: $\sin \beta = \frac{CD}{CB}$,

т.е. $\frac{CB}{CD} = \frac{1}{\sin \beta}$, т.к. $CB = \frac{2CE}{\sin \beta} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{2CE}{CB}$, т.к.

$\sin \beta = \frac{CD}{CB}$, то $CD = 2CE$, т.е. E - с.р. CD , т.к. EF - ср. линия
 $\triangle CDB$, т.к. $EF \parallel DB$ и E - с.р. CD

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt[3]{-3}$$

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x, \text{ заметим, что:}$$

$$\begin{cases} \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \leq \pi \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi n + \frac{\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \quad \text{, заметим}$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \text{ в исходное уравнение:}$$

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x; \quad 5 \left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi n = \frac{3\pi}{2} + x; \quad 6x = 10\pi n + \pi, \text{ т.е. } x = \frac{10\pi n + \pi}{6},$$

сделаем выборку по x :

$$2\pi n + \frac{\pi}{2} \geq \frac{10\pi n + \pi}{6} \geq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$12\pi n + 3\pi \geq 10\pi n + \pi \geq -3\pi + 12\pi n$$

$$3\pi \geq -2\pi n + \pi \geq -3\pi; \quad 2\pi \geq -2\pi n \geq -4\pi, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} n=0 \\ n=-1 \\ n=1 \\ n=2 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = -\frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{11\pi}{6} \\ x = \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{6}; x = -\frac{3\pi}{2}; x = \frac{11\pi}{6}; x = \frac{7\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{a} \text{ (пр. 4)}$$

$$\text{пр. 4.} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{3a} > -\frac{5}{2\sqrt{6}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3a} > \frac{-5}{2\sqrt{6}} \\ \frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} > \frac{-5}{6\sqrt{6}} \\ \frac{1}{a} < \frac{5}{6\sqrt{6}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ 1 > -\frac{5}{6\sqrt{6}}a \\ 1 < \frac{5}{6\sqrt{6}}a \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ a > \frac{6\sqrt{6}}{5} \\ a > \frac{6\sqrt{6}}{5} \end{array} \right. ; \quad a \in (-\infty; -\frac{6\sqrt{6}}{5}) \cup (\frac{6\sqrt{6}}{5}; +\infty)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ 1 < -\frac{5}{6\sqrt{6}}a \\ 1 > \frac{5}{6\sqrt{6}}a \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ a < -\frac{6\sqrt{6}}{5} \\ a < -\frac{6\sqrt{6}}{5} \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: при } a \in (-\infty; -\frac{6\sqrt{6}}{5}) \cup (\frac{6\sqrt{6}}{5}; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2} \approx 1.414$ (стр. 3)

1.1)

$$\begin{aligned} 21A &= 5C \\ (C > 2A - 6 \text{ см}) \\ |C| &= 3\sqrt{A^2 + B^2} \\ -C &= 3\sqrt{A^2 + B^2} \\ -\frac{21}{5}A &= 3\sqrt{A^2 + B^2} \\ A &\leq 0 \\ \frac{21^2}{25}A^2 &= 9A^2 + 9B^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8B^2 &= -\frac{21}{5}A^2 \\ B^2 &= -\frac{8}{25}A^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ax - 4\sqrt{3}Ay + \frac{21}{5} &= 0; \text{ м. е.} \\ x - 4\sqrt{3}y + 21 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{и } Ax + 4\sqrt{3}Ay + 21 &= 0, \text{ м. е.} \\ x + 4\sqrt{3}y + 21 &= 0 \end{aligned}$$

1.2)

$$\begin{aligned} 21A &= C \\ (C < 2A - 6 \text{ см}) \\ |C| &= 3\sqrt{A^2 + B^2} \\ -C &= 3\sqrt{A^2 + B^2} \\ -\frac{21}{5}A &= 3\sqrt{A^2 + B^2} \\ A &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21^2A^2 &= 9A^2 + 9B^2 \\ 8B^2 &= -\frac{21}{5}A^2 \\ B^2 &= -\frac{8}{25}A^2 \\ B &= -4\sqrt{3}A \\ B &= 4\sqrt{3}A \end{aligned}$$

м. е. - по условию
где прямые:

2.1)

$$\begin{aligned} 21A &= C \\ (C > 2A - 6 \text{ см}) \\ |C| &= 3\sqrt{A^2 + B^2} \\ C &= 3\sqrt{A^2 + B^2} \\ \frac{21}{5}A &= 3\sqrt{A^2 + B^2} \\ A &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21^2A^2 &= 9A^2 + 9B^2 \\ B^2 &= \frac{4}{5}A^2 \\ B &= -4\sqrt{3}A \\ B &= 4\sqrt{3}A \end{aligned}$$

м. е. - по:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \quad (0) \\ \begin{cases} x - 4\sqrt{3}y + 21 = 0 \\ x + 4\sqrt{3}y + 21 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.2)

$$\begin{aligned} 21A &= 5C \\ (C < 2A - 6 \text{ см}) \\ |C| &= 3\sqrt{A^2 + B^2} \\ -C &= 3\sqrt{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{21}{5}A &= 3\sqrt{A^2 + B^2} \\ A &\leq 0 \\ \frac{21^2}{25}A^2 &= 9A^2 + 9B^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8B^2 &= -\frac{21}{5}A^2 \\ B^2 &= -\frac{8}{25}A^2 \end{aligned}$$

1.1)

2.2)

Выводим (1.1) и (2.2):

$$\frac{21^2}{25}A^2 - 9A^2 = 9B^2 \quad (0) \quad 9B^2 = \frac{6 \cdot 36A^2}{25}; \quad B^2 = \frac{64A^2}{25}; \quad B = \pm \frac{8}{5}A,$$

$$\text{м. е.} \quad \begin{cases} x - \frac{8}{5}y + \frac{21}{5} = 0 \\ x + \frac{8}{5}y + \frac{21}{5} = 0 \end{cases} \quad (0) \quad \begin{cases} 5x - 8y + 21 = 0 \\ 5x + 8y + 21 = 0 \end{cases} \quad (0) \quad \begin{cases} y = \frac{5}{8}x + \frac{21}{8} \\ y = -\frac{5}{8}x - \frac{21}{8} \end{cases}$$

м. е. по уравнениям l_1, l_2, l_3, l_4 :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4\sqrt{3}}x + \frac{21}{4\sqrt{3}} \\ y &= -\frac{1}{4\sqrt{3}}x - \frac{21}{4\sqrt{3}} \\ y &= \frac{5}{2\sqrt{6}}x + \frac{21}{2\sqrt{6}} \\ y &= -\frac{5}{2\sqrt{6}}x - \frac{21}{2\sqrt{6}} \end{aligned}$$

$$\text{м. е. } k = \frac{1}{4\sqrt{3}} < \frac{5}{2\sqrt{6}}, \text{ м. е. } \alpha = \frac{5}{2\sqrt{6}},$$

$$\text{м. е. } k \in \left(-\frac{5}{2\sqrt{6}}; \frac{5}{2\sqrt{6}}\right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 (стр. 2)

Пусть l_1 и l_4 — прямые, которые внутренне касаются окружностей $\odot$, а l_2 и l_3 внешние. Тогда, в силу симметрии относительно оси OX , l_1 имеет угловой наклон $k = \alpha$, а l_4 тогда $k = -\alpha$.

Из геометрии очевидно, что при $k \in (-\infty; -\alpha) \cup (\alpha; +\infty)$ решений (т.е. пересечений прямой с окружностями) будет не более 2, а при $k \in \{-\alpha\} \cup \{\alpha\}$ решений будет не более 2. И-по исконая область $k \in (-\alpha; \alpha)$.

Заметим, что l_3 и l_2 имеют наклон $k = -\beta$ и $k = \beta$ соответственно, к этому $0 < \beta < \alpha$.

Запишем систему для $Ax + Bx + C = 0$, касающейся l_1, l_2, l_3 (используя тем, что расстояние от центра окружности до прямой это радиус)

$$\begin{cases} \frac{|A \cdot (-7) + B \cdot 0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2 \\ \frac{|A \cdot 0 + B \cdot 0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|C - 7A|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2 \\ \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 3 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} A^2 + B^2 \neq 0 \\ C \neq 0 \\ C - 7A \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3|C - 7A| = 2|C| \\ |C| = 3\sqrt{A^2 + B^2} \end{cases}$$

1) $C \leq 0$:

$$\begin{aligned} & 3|C - 7A| = -2C \\ & \begin{cases} 1.1) C \geq 7A & 1.2) C < 7A \end{cases} \\ & \begin{cases} 3C - 21A = -2C & 21A - 3C = -2C \end{cases} \end{aligned}$$

2) $C > 0$

$$\begin{aligned} & 3|C - 7A| = 2C \\ & \begin{cases} 2.1) C \geq 7A & 2.2) C < 7A \end{cases} \\ & \begin{cases} 3C - 21A = 2C & 21A - 3C = 2C \end{cases} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{c} = 4$$

$$② \begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \end{cases}$$

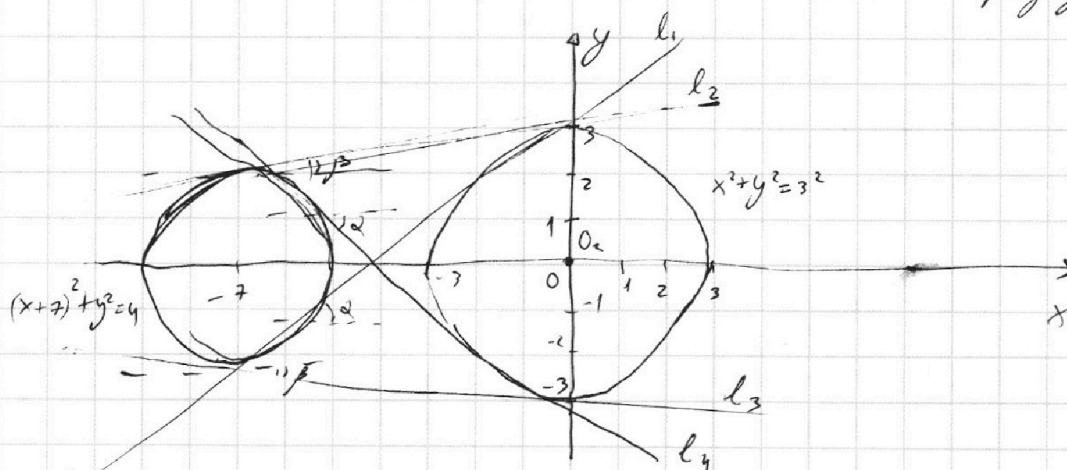
$$① (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

Рассмотрим ~~то~~ уравнение ①:

$$(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 & \text{уравнение окружности} \\ & \text{с центром } O_1(-7; 0) \\ & \text{и радиусом } r=2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 & \text{уравнение окружности} \\ & \text{с центром } O_2(0; 0) \\ & \text{и радиусом } R=3 \end{cases}$$



т.е. решениями ① являются две окружности

Рассмотрим ②: $x + 3ay - 7b = 0$ — уравнение прямой

Заметим, что при $a = 0$, $x - 7b = 0$ — параллельна оси Oy и a -но уравнения никогда не имеет, и по $a \neq 0$:

$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$, пусть $k = -\frac{1}{3a}$, k не зависит от b , при том $\frac{7b}{3a}$ при любом a (кроме $a = 0$) принимает все значения

т.е. при любом a уравнение $x + 3ay - 7b = 0$ это множество прямых с общим наклоном $k = -\frac{1}{3a}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7^4(6x) - 2 \frac{1}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \log_7 7 - 4$$

$$\begin{aligned} x &\neq -\frac{1}{6} \\ x &\neq \frac{1}{6} \\ y &\neq -1 \\ y &\neq 1 \end{aligned}$$

$$373 = 7^3$$

$$t = \log_7 6x$$

$$t \neq 0$$

$$(x^2 + 2x + 10)(x-1) = \frac{t^4 - 3,5t + 4}{t} = 0$$

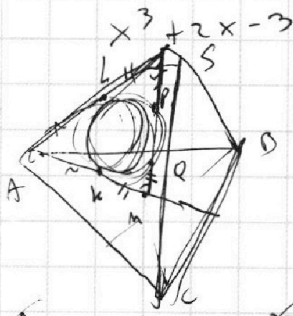
$$(x^2 + x + 3)(x-1) = \frac{x^3 + x^2 + 8x - 10}{2t^4 - \frac{7}{t} + 8} = 0$$

$$x^3 + x^2 + 8x - 10 = 0$$

$$f(t) = 2t^5 - 7t + 8t - 7 = 0$$

$$\begin{aligned} t &= \log_7 7 \\ t &\neq 0 \\ \frac{1}{t^4} - 3,5t + 4 &= 0 \\ -3,5t^5 + 4t^4 + 1 &= 0 \\ 3,5t^5 + 4t^4 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

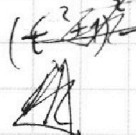
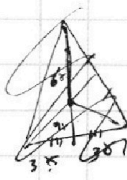
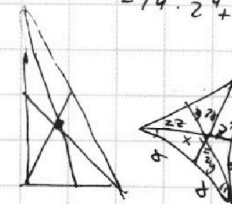
$$7t^5 + 8t^4 - 2 = 0$$



$$f'(t) = 10t^4 + 8$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} 14 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^4 - 2 &= 0 \\ -14 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^4 - 2 &= 0 \end{aligned}$$



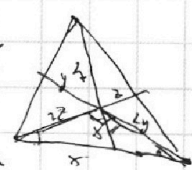
$$\begin{aligned} t > 0 \\ -7 + 2 + 8 - 7 &= 0 \\ 6t + 7t - 7 &= 0 \end{aligned}$$

$$\log_2 6x + \log_2 y = \frac{1}{16} + 4 - 7 \quad t > \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} \frac{3^5}{4^4 \cdot 2} + \frac{3}{4} 6 - 7 = 0$$

$$\begin{aligned} t^4 + \frac{6}{t} &= \frac{2^5}{t} - 4 \\ t^4 + \frac{3,5}{t} + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\log_2 6 + \log_2 x = \log_2 6 + \log_2 x$$



$$\begin{aligned} \log_2 y &= 2 \log_2 y = 2t \\ \log_2 6x &= \log_2 6 + \log_2 x = \log_2 6 + \frac{1}{2} \log_2 x^2 \end{aligned}$$

$$2t^5 + 8t + 7 = 0$$

$$2t^5 + 8t + 7 = 0$$

$$\begin{aligned} 6xy &= 60 \\ 22y &= \frac{h}{3} \cdot x \\ h \cdot x &= 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 180 - 2 \sin 54 &= \frac{h}{3} \\ \sin 180 &= \sin 2 > \frac{h}{3} \end{aligned}$$

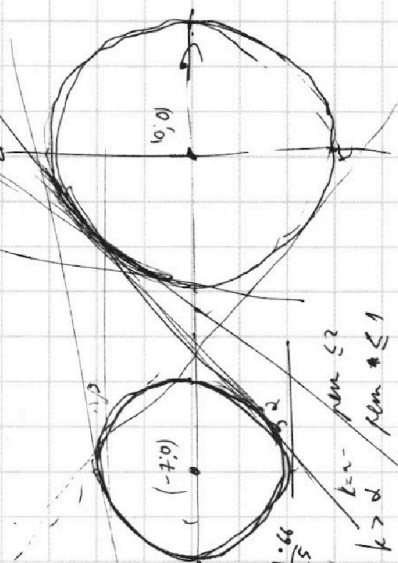
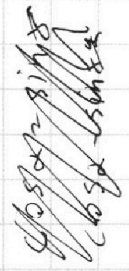
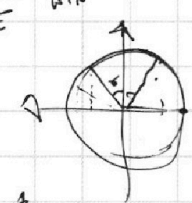
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

[illegible]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\frac{-7A + 0.8B + C}{\sqrt{2.52}} = 2$$

$$\frac{C}{A+B} = 3 \quad \frac{-21A+3C}{-21A+31-21}$$

21A2C

[illegible]

$$C = 3\sqrt{A^2 B^2}$$

596-3 8415

$$Ax + 4\sqrt{3}Ay + 21A = 0$$

~~$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$
$$y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{\sqrt{5}} + 21$$~~



$$\sec \arccos(\sin x) = \frac{3}{2} + x$$

$$f(x) = \arccos(x)$$

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

$$0 < \frac{3x}{2} + \frac{x}{3} < 2x$$

$$0 < x + \frac{2}{3} < 1$$

$$\frac{3+5}{2} < x < \frac{7+9}{2}$$

$$-x + 2 + 8 = \frac{3x}{2} +$$

$$2x = 20n - 1$$

~~$$2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} >$$~~

25/11/2021

$$0 \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

C-7A

1st 70
2nd 70
3rd 70
4th 70
5th 70
6th 70
7th 70
8th 70
9th 70
10th 70
11th 70
12th 70
13th 70
14th 70
15th 70
16th 70
17th 70
18th 70
19th 70
20th 70
21st 70
22nd 70
23rd 70
24th 70
25th 70
26th 70
27th 70
28th 70
29th 70
30th 70
31st 70
32nd 70
33rd 70
34th 70
35th 70
36th 70
37th 70
38th 70
39th 70
40th 70
41st 70
42nd 70
43rd 70
44th 70
45th 70
46th 70
47th 70
48th 70
49th 70
50th 70
51st 70
52nd 70
53rd 70
54th 70
55th 70
56th 70
57th 70
58th 70
59th 70
60th 70
61st 70
62nd 70
63rd 70
64th 70
65th 70
66th 70
67th 70
68th 70
69th 70
70th 70
71st 70
72nd 70
73rd 70
74th 70
75th 70
76th 70
77th 70
78th 70
79th 70
80th 70
81st 70
82nd 70
83rd 70
84th 70
85th 70
86th 70
87th 70
88th 70
89th 70
90th 70
91st 70
92nd 70
93rd 70
94th 70
95th 70
96th 70
97th 70
98th 70
99th 70
100th 70

$$\frac{1-a}{a}$$

$$h \propto h^2 \propto z$$

$$R_2 = R_1 + (t + x)$$

$$x^2 + y^2 = 3$$

$$\begin{array}{c} -4 \\ -2 \end{array}$$

$$(X+1)^2 + 1$$

1. $\frac{wvccos}{avccos}$

$$\frac{21}{2} = 10 \frac{1}{2}$$

$$15(15+21) = 6.3$$

$$\frac{1}{1-3}(2+3k)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

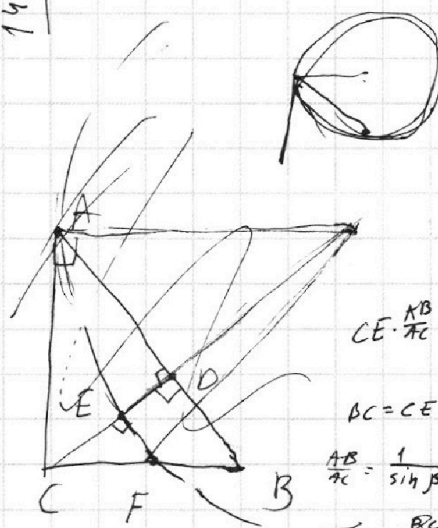
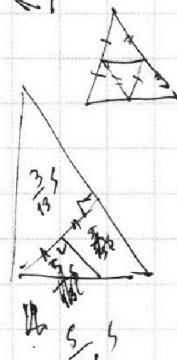
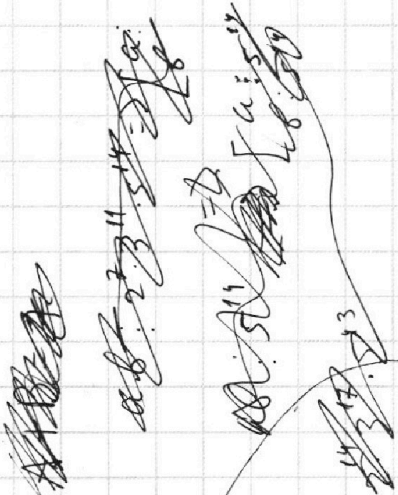
$$\begin{aligned} AB &= 7 \\ B+C &= 13 \\ C+A &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A+B+C &= 17 \\ C &= 10 \\ A &= 4 \\ B &= 3 \end{aligned}$$

$$\frac{11+15+17}{2} = 15+1+0,5 = 21,5$$

$$\frac{14+18+20}{2} = 7+9+20+1,5 = 38$$

$$\begin{aligned} C_2 &= 11 \\ B_2 &= 4 \\ A_2 &= 7 \\ C_3 &= 4 \\ B_3 &= 14 \\ A_3 &= 19 \\ B_3 &= 0 \end{aligned}$$



$$CE \cdot AC = CB \cdot CD$$

$$AC = CE \left(\frac{AB}{AC} + \frac{CB}{CD} \right)$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sin \beta} = \frac{CB}{CD}$$

$$AB \parallel EF \Rightarrow CE \perp EF$$

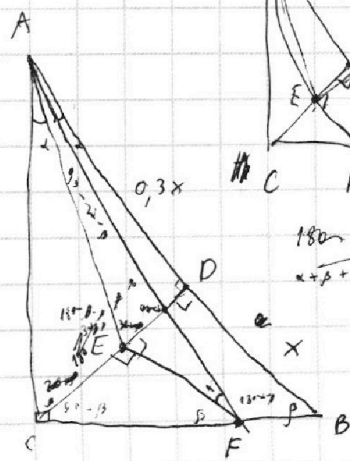
$$AB:BD = 1,3:1$$

$$BC = \frac{2CE}{\sin \beta}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ? \quad \sin \beta = \frac{2CE}{BC} = \frac{CD}{BC}$$

$$\angle CAE = \angle AFE$$

$$\angle AFE = \angle FAP, \text{ m.k. } EF \parallel AB$$



$$\frac{CE}{AC} = \frac{EB}{AB}$$

$$FB = CE \cdot \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{CE \cdot CB}{CAD} = CB - FB$$