МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} \left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Условие можно переписать так:

① $\left.\begin{aligned} &ord_2(a)+ord_2(b) \geq 6 \\ &ord_2(a)+ord_2(c) \geq 16 \\ &ord_2(b)+ord_2(c) \geq 14 \end{aligned}\right\} \Rightarrow ord_2(abc) = ord_2(a)+ord_2(b)+ord_2(c) \geq \frac{6+16+14}{2} = 18$

р-во вып. при $ord_2(a)=4$, $ord_2(b)=2$, $ord_2(c)=12$.
(все усл. лин. сист. при этом собл.)

② $\left.\begin{aligned} &ord_5(a)+ord_5(b) \geq 11 \\ &ord_5(b)+ord_5(c) \geq 13 \\ &ord_5(a)+ord_5(c) \geq 28 \end{aligned}\right\} \Rightarrow ord_5(abc) = ord_5(a)+ord_5(b)+ord_5(c) \geq ord_5(a)+ord_5(c) \geq 28$

р-во вып. при $ord_5(a)=14$, $ord_5(b)=0$, $ord_5(c)=14$.
(все условия линейной сист. при этом собл.)

③ $\left.\begin{aligned} &ord_3(a)+ord_3(b) \geq 13 \\ &ord_3(b)+ord_3(c) \geq 21 \\ &ord_3(a)+ord_3(c) \geq 25 \end{aligned}\right\} \Rightarrow ord_3(abc) = ord_3(a)+ord_3(b)+ord_3(c) \geq \frac{25+21+13}{2} = \frac{59}{2} = 29{,}5$

$\Rightarrow ord_3(abc) \geq 30$
(т.к. $ord_3(abc) \in \mathbb{N}$)

р-во вып. при $ord_3(a)=8$, $ord_3(b)=5$, $ord_3(c)=17$.
(все усл. лин. сист. соблюдены)

Имеем, что $abc \,\vdots\, 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$.

$abc = 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$ подх. под все усл. задачи при $a = 2^4\cdot 3^8\cdot 5^{14}$, $b = 2^2\cdot 3^5$, $c = 2^{12}\cdot 3^{17}\cdot 5^{14}$.

Ответ: $2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$.

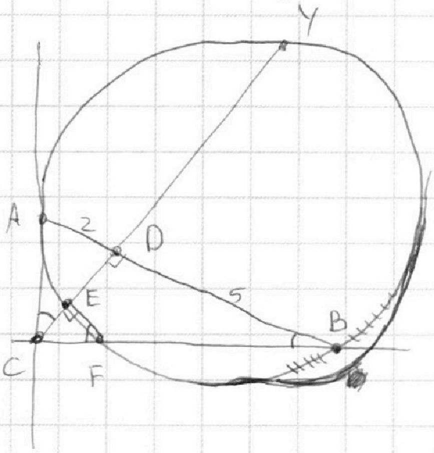
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 (часть 1)



Обозначим длину AD как 2 у.е., тогда т.к. $\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{2}{5} \Rightarrow$ длина DB равна 5 у.е. Далее подсчёт длин и площадей будет производиться в у.е. и $(у.е.)^2$ соотв. и лишний раз упоминаться у.е. не будут.

1) $\frac{AD}{CD} = \frac{DC}{BD} \Rightarrow DC^2 = AD\cdot BD = 10 \Rightarrow DC = \sqrt{10}$ (подобие Δ образ. высотой в Δ)

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4+10} = \sqrt{14}$ (теор. Пиф.)

$CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{25+10} = \sqrt{35}$

2) Продлим CE до второго пересеч. Y с окр-тью (AEF). Тогда $\deg(D) = 2\cdot 5 = AD\cdot BD = ED\cdot DY = (CD - CE)\cdot DY = (\sqrt{10} - CE)\cdot DY$

$\deg(C) = AC^2 = 14 = CE\cdot CY = CE(CD + DY) = CE(\sqrt{10} + DY)$

$\Rightarrow$ получаем сист. $\begin{cases} 10 = (\sqrt{10} - CE)\,DY \\ 14 = CE\,(\sqrt{10} + DY) \end{cases}$

для удобства $CE = a$, $DY = b$

$\begin{cases} 10 = \sqrt{10}\,b - ab \\ 14 = ab + \sqrt{10}\,a \end{cases} \Rightarrow 24 = \sqrt{10}(a+b) \Rightarrow b = \frac{24}{\sqrt{10}} - a > 0$

$\Rightarrow 14 = a\left(\frac{24}{\sqrt{10}} - a\right) + \sqrt{10}\,a = -a^2 + \left(\frac{24}{\sqrt{10}} + \sqrt{10}\right)a = -a^2 + \frac{34}{\sqrt{10}}a$

$\Rightarrow a^2 - \frac{34}{\sqrt{10}}a + 14 = 0$

$D_a = \frac{34^2}{10} - 4\cdot 14 = \frac{1156 - 560}{10} = \frac{596}{10}$

$a = \frac{\frac{34}{\sqrt{10}} \pm \sqrt{D_a}}{2} = \frac{\frac{34}{\sqrt{10}} \pm \frac{\sqrt{596}}{\sqrt{10}}}{2} = \frac{17 \pm \sqrt{149}}{\sqrt{10}}$ → $\frac{17 + \sqrt{149}}{\sqrt{10}}$, $\frac{17 - \sqrt{149}}{\sqrt{10}}$

Если $a = \frac{17+\sqrt{149}}{\sqrt{10}}$, то $a \overset{т.к.}{<} \frac{24}{\sqrt{10}} \Rightarrow 17 + \sqrt{149} < 24 \Rightarrow \sqrt{149} < 7 \Rightarrow 149 < 49 \Rightarrow$

$a \ne \frac{17+\sqrt{149}}{\sqrt{10}} \Rightarrow a = \frac{17-\sqrt{149}}{\sqrt{10}} > 0 \Rightarrow CE = \frac{17-\sqrt{149}}{\sqrt{10}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 (часть 2)

3) $\Delta ACD \sim \Delta CBD$ (CD – высота в Δ)

$\Delta CEF \sim \Delta CDB$ ($EF \parallel DB$ и $\angle C$ общий)

$\Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta CFE \Rightarrow \dfrac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = k^2_{\text{подобия}} = \dfrac{AD^2}{CE^2} =$

$$\frac{4}{\frac{(17-\sqrt{149})^2}{10}} = \frac{40}{289-34\sqrt{149}+149} = \frac{40}{438-34\sqrt{149}} = \frac{20}{219-17\sqrt{149}}$$

Ответ: $\dfrac{20}{219-17\sqrt{149}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N3

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{9\pi - 2x}{10}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k = \frac{9\pi - 2x}{10} \Leftrightarrow 5\pi - 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 8x = 20\pi k - 4\pi \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \in [0; \pi], \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k = \frac{9\pi - 2x}{10} \Leftrightarrow -5\pi + 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 12x = 14\pi - 20\pi k \Leftrightarrow x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi k \\ -\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k \in [0; \pi], \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k + \frac{\pi}{2} + 2\pi k \in [0; \pi], \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi k \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi k + 2\pi k \in [0; \pi], \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \pi - \frac{\pi k}{5} \in [0; \pi], \ k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow 1 - \frac{k}{5} \in [0; 1], \ k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi k}{3} \in [0; \pi], \ k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow \frac{2}{3} + \frac{k}{3} \in [0; 1], \ k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow k \in \{0; 1; -1; -2\}$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}, \ k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\} \\ x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5\pi k}{3}, \ k \in \{-2; -1; 0; 1\} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}, \ k \in [0; 5] \\ x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5\pi k}{3}, \ k \in \mathbb{Z}, \ k \in [-2; 1] \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

[ ] [ ] [ ] [x] [ ] [ ] [ ]

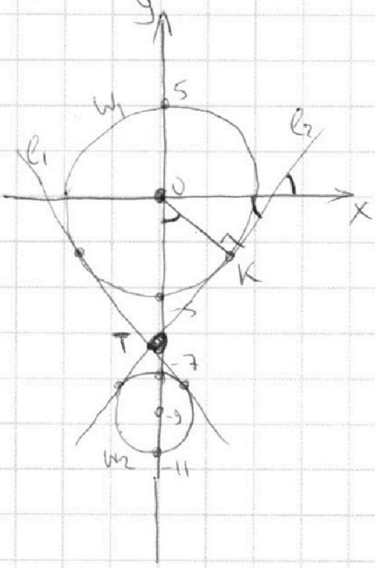
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 (часть 1)

Второе ур-ние: $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2+18y+81=81-77 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+9)^2=4 \end{array}\right.$ —

две окр-ти с ц. $(0;0)$ и $r=5$ и с ц. $(0;-9)$, $r=2$.



Если $a=0$, то первое ур-ние — вертик. прямая. Тогда $5x-b=0 \Leftrightarrow x=\frac{b}{5}$. $b=0$ подходит. ($b=0$ это OY)

Пусть $a\neq 0 \Rightarrow$ первое ур-ние представимо в виде

$6ay=b-5x \Leftrightarrow y=-\frac{5}{6a}x+\frac{b}{6a}$

Проведем 2 касат. l_1 и l_2, которые внутр. образом касаются окр-тей, l_1 имеет отриц. наклон, а l_2 — положит. Они пересек. в точке $T\in OY$ в силу симм. относит. OY.

Пусть O_1 — центр окр-ти w_1 с ц. $(0;0)$ и $r=5$, а O_2 — центр окр-ти w_2 с ц. $(0;-9)$ и $r=2$.

Тогда $\frac{O_1T}{O_2T}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{5}{2} \Rightarrow O_1T=\frac{5}{2}O_2T$

также $O_1T+TO_2=9 \Rightarrow \frac{7}{2}O_2T=9 \Rightarrow O_2T=\frac{18}{7}$

$\Rightarrow O_1T=9-\frac{18}{7}=\frac{63-18}{7}=\frac{45}{7} \Rightarrow T(0;-\frac{45}{7})$

Пусть l_2 касат. w_1 в $K \Rightarrow OK^2+KT^2=TO_1^2$ (теор. Пиф., $\angle OKT=90°$ в силу касан.)

$\Rightarrow TK^2=O_1T^2-O_1K^2=\frac{45^2}{49}-r_1^2=\frac{45^2}{49}-25=\frac{45^2-35^2}{7^2}=\frac{10\cdot 80}{49}=\frac{800}{49}$

$\Rightarrow TK=\frac{\sqrt{800}}{7}=\frac{20\sqrt{2}}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 (часть 2)

Коэф. наклона $l_2 = tg\angle(l_2; 0x) = tg\angle TO_1K$
(в силу подобия Δ образ. высотой в Δ)

$$= \frac{TK}{O_1K} = \frac{\frac{20\sqrt{2}}{7}}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

В силу симм. l_1 и l_2 отн. $0Y$, коэф. наклона l_1 – $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$.

Вернёмся к прямой Γ ур-ния $y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$.
Пусть $-\frac{5}{6a} \in \left[\frac{4\sqrt{2}}{7}; \frac{4\sqrt{2}}{7}\right]$. Тогда проведя прямую с данным наклоном через T (сделать это можно, т.к. $\frac{b}{6a}$ может быть любым и мы можем провести данную прямую с наклоном $-\frac{5}{6a}$ через любую точку на $0X$). Тогда, в силу $-\frac{5}{6a} \in \left[\frac{4\sqrt{2}}{7}; \frac{4\sqrt{2}}{7}\right]$, прямая Γ ур-ния будет более пологой, чем касат., по отношению к $0X$, и не пересек. ни одну окр-ть, или в точности совп. с одной из касательных. Если пересек. 0, то сдвигая прямую с фикс. наклоном вверх, мы не сможем пересечь ω_2 и наоборот. Мы не сможем пересечь её с обеими окр-тями и получить 4 пересеч. (и 4 реш. сист.). Аналогично с касательной: при сдвиге вверх/вниз, она моментально перестаёт касаться одной из окр-тей.
Значит, $-\frac{5}{6a} \in \left(-\infty; -\frac{4\sqrt{2}}{7}\right) \cup \left(\frac{4\sqrt{2}}{7}; +\infty\right)$. В таком

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 (часть 3)

случае, проведя прямую I ур-ния через T, она будет более резкой чем обе касат. и пересечёт обе окр-ти причём по 2 раза, а значит такой пар. b можно будет подобрать.

~~Итак~~ Итого имеем:

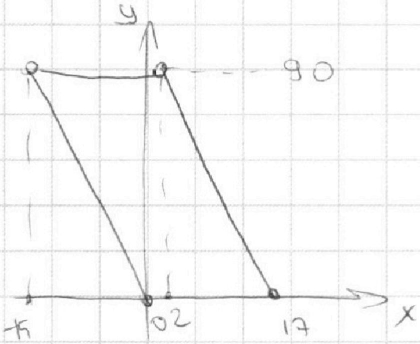
$$\left[\begin{array}{l} \frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7}, a\neq 0 \\ -\frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7}, a\neq 0 \\ a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} > \frac{4\sqrt{2}}{7}\cdot\frac{6}{5}, a\neq 0 \\ \frac{1}{a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7}\cdot\frac{6}{5}, a\neq 0 \\ a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} > \frac{24\sqrt{2}}{35}, a\neq 0 \\ \frac{1}{a} < -\frac{24\sqrt{2}}{35}, a\neq 0 \\ a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < a < \frac{35}{24\sqrt{2}} \\ 0 > a > -\frac{35}{24\sqrt{2}} \\ a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right).$$

Ответ: $\left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$.

№6



условие $6x_2-6x_1+y_2-y_1=48$ $\Leftrightarrow$ $y_2=(48+y_1+6x_1)-6x_2$ — прямая с накл. -6 с пар-рами y_1, x_1, причем пересеч. в OX — целочисленное.

Также и границы п-мма имеют наклон -6: $y=-6x$, $y=102-6x$.

Имеем, что точки, кот. удовл. нашему усл., это попросту точки, лежащие на отрезках вида $y=k-6x$, $k\in\mathbb{Z}$, $y\in[0;90]$. Осталось посчитать сколько целочисл. точек на каждом из 91 таком отрезке, и задача решена.

Заметим, что при $k_1 \underset{6}{\equiv} k_2$, на отрезках $y=k_1-6x$, $y=k_2-6x$ $(y\in[0;90])$ будет одинаковое количество точек, т.к. эти точки были сдвинуты на вектор $(1;0)$ и целочисл. точек не поменял.

Всего 16 отр. с $k\underset{6}{\equiv}0$, и по 15 отр. всех ост. k.

На отрезке вида $k\underset{6}{\equiv}0$ столько же, сколько и на отр. $y=-6x$ $(y\in[0;90])$. Подойдет любой $x\in\mathbb{Z}$ и $0\le -6x\le 90$ и никакой другой x. Всего 16 точек. Аналогично рассуждая имеем для отр. $k\underset{6}{\equiv}1$ и ост. по 15 точек.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (-часть

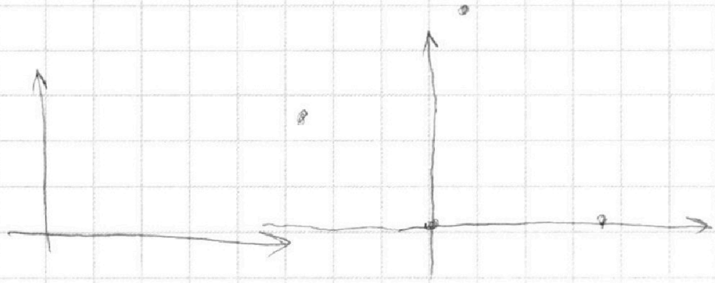
Осталось только посчитать сколько точек будет подходить y_1, x_1 для каждого $k = 48 + y_1 + 6x_1 \in [0; 90]$. Положив какой x_1, мы сразу определяем $y_1 = 48 + k - 6x_1$ однозначно, т.е. каждый k предств.

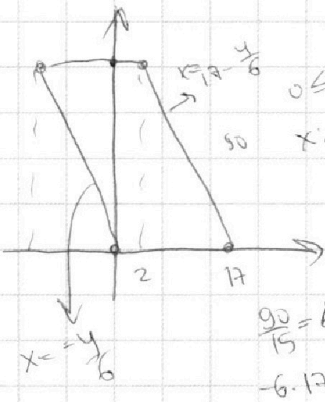
Узнав кол-во ~~…~~ способов предств. k как $48 + y_1 + 6x_1$ ~~…~~ мы умножим каждое такое число на (6 (при $k \equiv_6 0$) и 15 (при $k \not\equiv_6 0$), сложим, и получим ответ.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





$0 \le y \le 90$

$x: y = -6x + 6\cdot 17$

$6x = 6\cdot 17 - y$

$x = 17 - \frac{y}{6}$

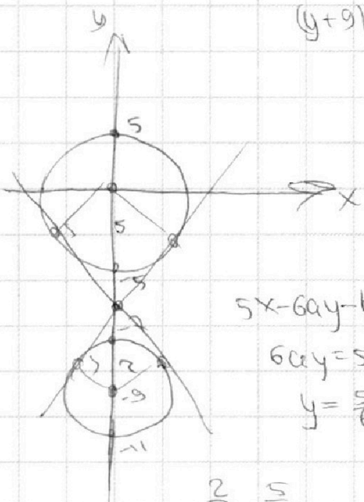
$\frac{90}{15} = 6$

$-6\cdot 17 + b = 0$

$x\frac{17}{6}$

$y_2 - y_1 = 6$

$(y+9)^2 + x^2 = 81 - 77 = 4$



$a \neq 0$

$5x - 6ay - b = 0$

$6ay = 5x - b$

$y = \frac{5}{6a}x - \frac{b}{6a}$

$\frac{2}{7}$ $\frac{5}{7}$

$5 + \frac{4}{7}$

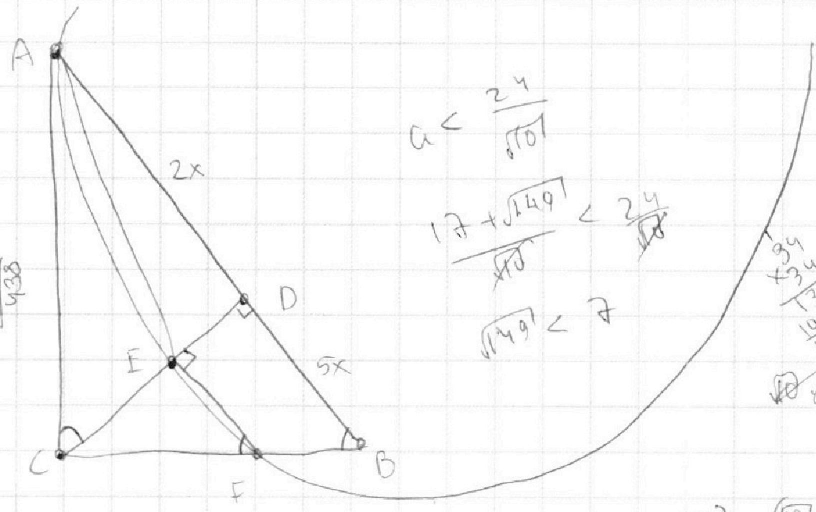
$2 + \frac{10}{7}$ } 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a < \frac{24}{\sqrt{10}}$

$\frac{17+\sqrt{149}}{\sqrt{10}} < \frac{24}{\sqrt{10}}$

$\sqrt{149} < 7$

$D = \frac{34^2}{10} - 4\cdot 14 = \frac{34^2-560}{10} = \frac{596}{10}$

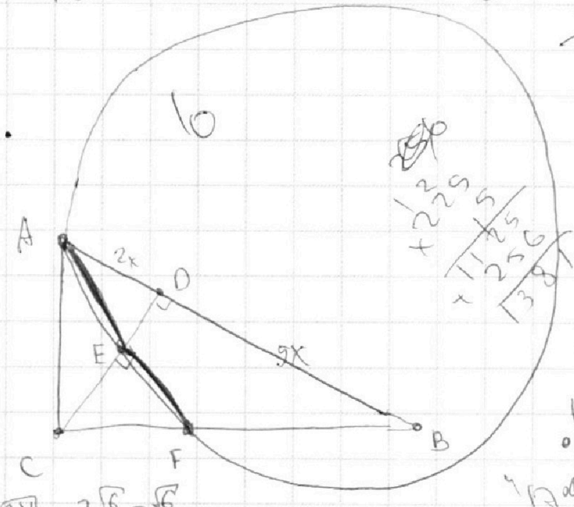
$a = \frac{\frac{34}{\sqrt{10}} \pm \frac{\sqrt{596}}{\sqrt{10}}}{2}$

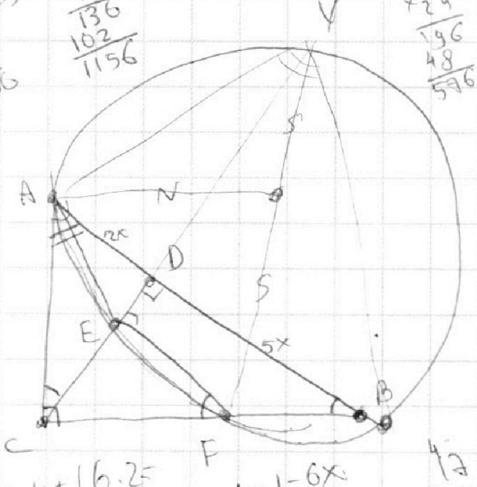
$CE^2 - \left(\sqrt{10} + \frac{\sqrt{6}}{5}\right) CE + 14 = 0$

$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{2}{5}$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$

$10 \cdot 58 = 580$





$\frac{\sqrt{24}}{10} = \frac{2\sqrt{6}}{10} = \frac{\sqrt{6}}{5}$

$15\cdot 4 + 16\cdot 2.5$

$y = 1 - 6x$

$\frac{90}{6} = 15$

$24 = \sqrt{10}(DY + CE) \rightarrow DY = \frac{\sqrt{24}}{10} - CE$

$14 = CE \cdot \left(\sqrt{10} + \frac{\sqrt{24}}{10} - CE\right) = -CE^2 + \left(\sqrt{10} + \frac{\sqrt{6}}{5}\right) CE$

$10 = \sqrt{10}\, DY - CE \cdot DY$

$14 = \sqrt{10}\, CE + CE \cdot DY$

$360^\circ - 90^\circ - (180^\circ - 2\beta) = 90^\circ + \alpha - \beta$

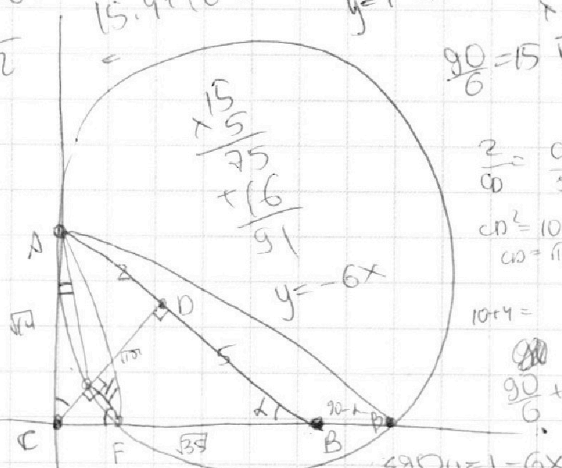
$90 - \alpha - \beta$

$\frac{2}{CD} = \frac{CD}{5}$

$CD^2 = 10$

$CD = \sqrt{10}$

$\begin{cases} 10 = ED \cdot DY = (\sqrt{10} - CE) DY \\ 14 = CE \cdot CY = CE \cdot (\sqrt{10} + DY) \end{cases}$ $\frac{ED + DY}{ED^2} =$



$\frac{90}{6} + 1 = 16$

$\frac{84}{6} = 14$

$0 \le 1 - 6x \le 90$ $y = 1 - 6x$

$x \le 0$

$x \ge -14$

$6x \ge -89$ $x \ge -\frac{89}{6} = -14\frac{5}{6}$

$x \le \frac{k}{6}$ $k \ge -15$

$\frac{CE}{ED} \cdot \left(\frac{CE}{ED} + \frac{1}{ED} + \frac{DY}{ED^2}\right) \frac{CE}{ED} = 1$

$2.5 = ED \cdot DY$

$= 14 = CE \cdot CY = CE(CE + ED + DY)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^6 3^{13} 5^{11}$

$bc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{13}$

$ac \vdots 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

$abc \to \min$

$a+b=6$ $a+b+c=18$

2: $b+c=14$ $c=12$

$a+c=16$ $a=4$ $b=2$

$a+b \geq 13$ $2(a+b+c)=59$

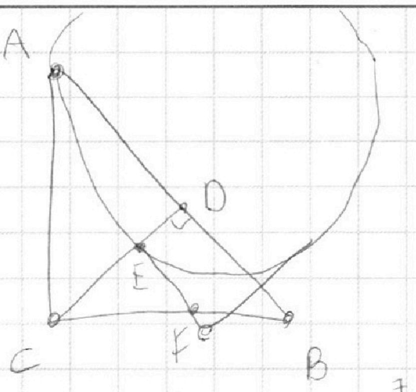
3: $b+c \geq 21$ 60 30

$a+c \geq 25$ $a=8$ $b=5$ $c=17$

$a+b=11$ $a+b+c=\frac{52}{2}=26$

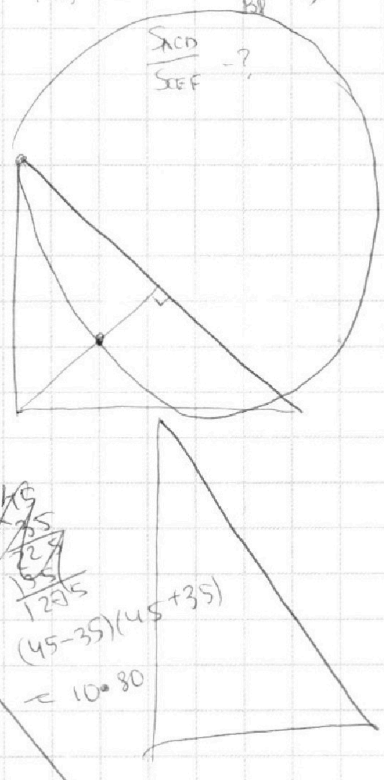
5: $b+c=13$ $b=2$

$a+c=28$ $c=15$ $a=13$



$AB \parallel EF$ $\frac{AB}{BD}=4=\frac{7}{5}$

$\frac{S_{ACD}}{S_{EEF}}$ - ?



45 25 1225

$(45-35)(45+35)$

$=10\cdot 80$

$10\arccos(\sin x) < 9\pi - 2x$

$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi-2x}{10}$

$\arccos(\sin x) =$

$\frac{45^2}{\pi^2} - 25^2 =$

при $x \in [0; \pi]$

$T(-5 - \frac{10}{7})$

$= -\frac{45}{7}$

$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2}-x)) =$

$= \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$ $-\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k = \frac{9\pi - 2x}{10}$

или $-\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k$ $-5\pi + 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x$

63 18 45

$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k = \frac{9\pi - 2x}{10}$ $12x = 14\pi - 20\pi k$

$x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi k$

$5\pi + 20\pi k - 10x + 2x - 9\pi = 0$ $k=0$ $-\frac{\pi}{2} + \frac{7}{6}\pi + 2\pi k - \frac{5}{3}\pi k$ $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$

$8x = -4\pi + 20\pi k$

$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k$ $\frac{9}{2}k \in [0,1]$ $-\frac{3\pi}{6}$ $= \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi k}{3} \in [0; \pi]$

$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \in [0; \pi] \Rightarrow \frac{5}{2}\pi k + 2\pi k \in [0; \pi]$ $\frac{6\pi k - 5\pi k}{3}$ $\frac{2}{3} + \frac{k}{3} \in [0; 1]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_{x^3}(11^{-2}) = -\frac{2}{3}\log_x(11) = \frac{-\frac{2}{3}}{\log_{11} x}$

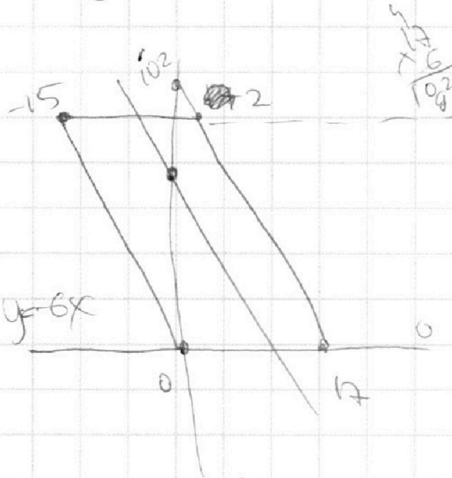
$0{,}5y \to a$

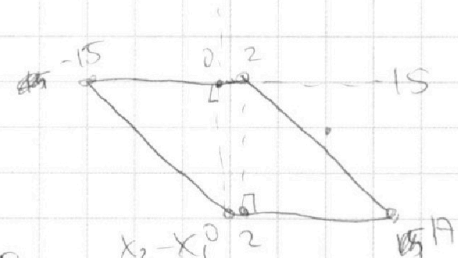
$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 - \log_{x^3}\frac{1}{121} = \log_{11}^4(a) + \log_a 11 - \log_{a^3} 11^{-13}$

$-5 = \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} + \frac{2/3}{\log_{11} x} = \log_{11}^4 a + \frac{1}{\log_{11} a} + \frac{13/3}{\log_{11} a}$

$\log_{11}^4(xa)$

$17 \cdot 6 = 102$





$x_2 - x_1 = 8$

$x_2 - x_1^0$

$y_2 - y_1 = 8$

$(0;2)$

$x_2 - x_1 \in [32; 32]$

$y_2 - y_1 = 48 - 6(x_2 - x_1) \in [90; 90]$

$y_2 - y_1 = 48 - 6(x_2 - x_1)$

$y_2 = (48 + y_1 + 6x_1) - 6x_2$

$48 - 6(x_2 - x_1) \geq -90$

$6(x_2 - x_1) \leq 138$

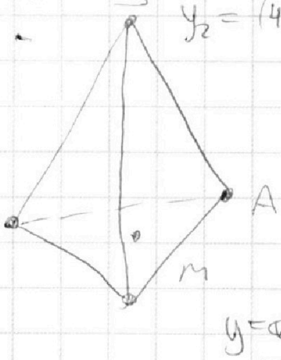
$x_2 - x_1 \leq 23$

$48 - 6(x_2 - x_1) \leq 90$

$x_2 - x_1 \in [7; 23]$

$-42 \leq 6(x_2 - x_1)$

$x_2 - x_1 \geq -7$



$y = \dots - 6x$

— 16 точек условия.

$6(a_2 - a_1)$

$y = k - 6x$

$k \in [0; 102]$

$x = \frac{k}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ