



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| X |   |   |   |   |   |   |

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тюмень  $a = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3}$   $b = 2^{n_4} \cdot 3^{n_5} \cdot 5^{n_6}$   $c = 2^{n_7} \cdot 3^{n_8} \cdot 5^{n_9}$

В условиях минимальности abc никаких других степеней не будет. Но условие.

$$ab: 2^3 \quad bc: 2^4 \quad ac: 2^{18} \Rightarrow n_1 + n_4 \geq 9$$

, чем меньше сумма, тем меньшее произведение

$$n_1 + n_4 + n_7 \geq 21 \quad - \text{оценка}$$

$$n_1 + n_4 \geq 19$$

$$n_2 + n_5 \geq 14$$

слоник

Тюмень  $n_1 = 1$   $n_4 = 2$   $n_7 = 12$  - проверка - неходит

но же условия ~~значит~~ значит это минимальное значение 2, следовательно  $c = 3$ .

$$n_2 + n_5 \geq 10 \quad \text{слоник} \quad n_2 + n_5 + n_8 \geq \frac{14}{2} \quad \text{ночонок} \quad n_2, n_5, n_8 \in \mathbb{N}$$

$$n_5 + n_8 \geq 13 \quad \Rightarrow \quad n_2 + n_5 + n_8 \geq 21 \quad - \text{оценка}$$
$$n_2 + n_8 \geq 18$$

Пример:  $n_2 = 8$   $n_5 = 3$   $n_8 = 10$  - устанавливаем всем условия, значит 21 минимальное сумма степеней аналогично  $c = 5$ .

$$n_3 + n_6 \geq 10$$

$$n_3 + n_9 \geq 30$$

$$n_6 + n_9 \geq 13$$

слоник

$$n_3 + n_6 + n_9 \geq 26,5 \quad \text{т.к. } n_3, n_6, n_9 \in \mathbb{N}$$

$$n_3 + n_6 + n_9 \geq 27 \quad \text{оценка.}$$

Пример:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**МФТИ**

Задачами  $n_3 + n_9 \geq 30$  значит  $n_3 + n_9 + n_6 \geq 30$ , т.к.

$n_6 \geq 0$  — очевидно

Пример  $n_3 = 15$   $n_9 = 15$   $n_6 = 0$ . — получили  
значит 30 — минимальное сумма степенных

составлено 3 части

$$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{15}$$

Тогда  $a b c = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$  — минимальное произ.

$$\text{Омб: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

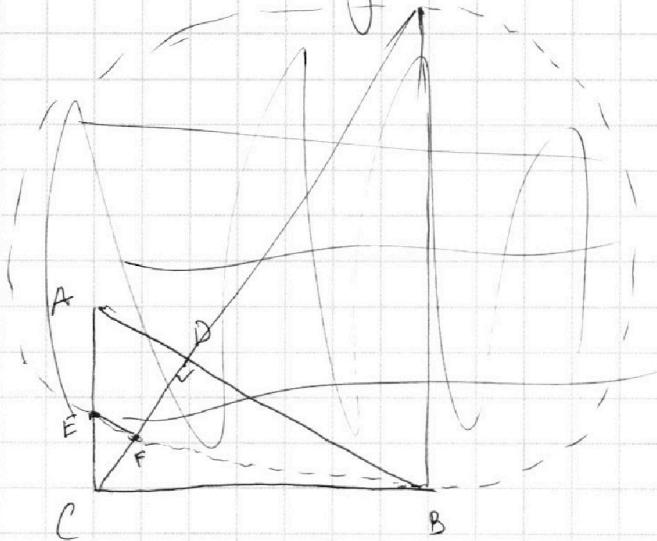
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 2



Дано:  $\triangle ABC$

$CD \perp AB$   $DE \in AB$

~~$BF$~~   $CB$  - касат к окр.

$A \in E$ ;  $E \bar{F} \parallel AD$

$AD : DB = 1 : 3$

$S_{ABC} : S_{CEF} = ?$

Решение:

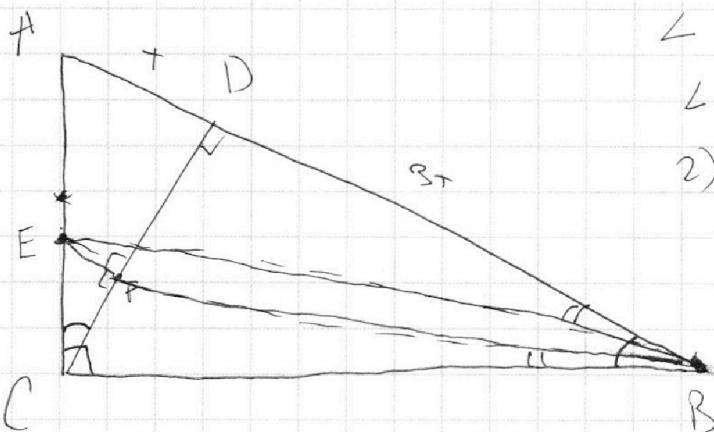
$$1) \angle EFD = \angle FDB \quad (\bar{E}F \parallel AD)$$

$$\angle EFC = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad 90^\circ$$

$$\angle ACD = 90^\circ - \angle A = \angle CBA.$$

$$2) \angle ECF = \angle ABC \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \angle ECF \\ \angle ABC \end{cases} \in \triangle EFC \sim \triangle ABC.$$

$$3) \text{Пусть } AD = x; DB = 3x$$



Тогда  $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3}x$    Тогда по т. Пиф  $CB = 2\sqrt{3}x$  ;  
 $CA = 2x$ .

$\frac{CF}{AD} = 2 \Rightarrow \angle ACD = 30^\circ$  и  $\angle EBC = 2$ ; Тогда

$\angle EFB = 180^\circ - 2$  (по ч. окр.)   Тогда  $\angle DFB = 90^\circ - 2$ .

Тогда  $\angle FBD$  ищем  $= 2$ .  $= \angle EBF$ ; значит

$\angle EBA = \angle FBC$ ;  $\angle A = 90^\circ - \angle CBA = \angle DCB$ .

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| \begin{array}{l} \angle EBA = \angle FBC \\ \angle FCB = \angle A \end{array} \right. \Rightarrow \triangle CFB \sim \triangle BEA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{CE} = \frac{AB}{CA} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{AE}{CF}$$

Требуется найти  $EF$ .  $EF = y$ ; тогда из уравнения получим  
 $CE = \sqrt{3}y$   $CE = 2y$ .

$$AE = CA - CE = 2 + 2\sqrt{3}y - 2y = 2y + 2\sqrt{3}y.$$

$$\frac{AE}{CF} = \frac{2y + 2\sqrt{3}y}{\sqrt{3}y} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}y} = \frac{2}{\sqrt{3}} + 1.$$

$$y = y + \frac{\sqrt{3}}{2}y = y \frac{\sqrt{3} + 2}{2}.$$

Найдем корень. Две ветви

$$K = \frac{AB}{CE} = \frac{4x}{2y} = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 + \sqrt{3}.$$

$$\text{Тогда } \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = K^2 = 1 + 4\sqrt{3}.$$

$$K = \frac{AB}{CE} = 2 \frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}} + 2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = K^2 = \frac{28}{3} + \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AE = 2x - 2y .$$

$$\frac{AE}{CF} = \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{2x - 2y}{\sqrt{3}y} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \frac{2x - 2y}{y} = 2$$

$$\frac{x - y}{y} = 1 \quad x = 2y \quad \frac{x}{y} = \cancel{2} \cdot \frac{2}{1}$$

$$k = \frac{AB}{CE} = \frac{2x}{y} = 4$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2 = 16$$

Ответ: 16.

На одной странице можно оформлять **только** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



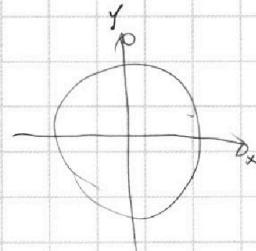
- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}.$$

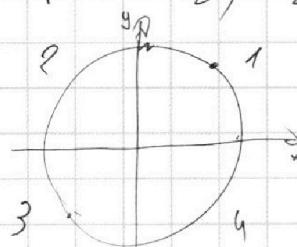


$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}.$$

$$\arcsin \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin \varphi \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right].$$

Случай 1:  $\varphi$  в I четверти



$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin \varphi) = \varphi$$

$$\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin \varphi) = \pi - \varphi.$$

Тогда  $x = \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

(1) случай Тогда  $x = \varphi \in \left[-\pi; \pi\right] + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Случай 2:  $5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}.$

Тогда

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi - 2\pi k)) = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Тогда  $\frac{\pi}{2} - \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

из ОТР. K-множество будет  
равно

$$x = -2, -1, 0, 1, 2.$$

$$x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$\varphi \in \left[-\pi; \pi\right],$$

Рассмотрим признаки K

$$\frac{\pi}{2} - \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \varphi \in [0; \pi].$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$K=1$$

$$\varphi = 0 \quad -\text{ног} \quad x = 2\pi$$

$$R=2$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad -\text{не ног}. \quad \text{B}$$

Объединил решения.

$$\left| \begin{array}{l} x = -3\pi \\ x = -\frac{4\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} \\ + = 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Отв: } -\frac{\pi}{2}; -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$k = -2$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} \quad -\text{ногодж. нож.} \quad \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{5\pi}{6} \quad -\text{не ногодж.}$$

$$k = -1$$

$$\varphi = 0 \quad -\text{ногодж.}$$

$$k = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \quad -\text{ногодж.}$$

$$k = 1$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} \quad -\text{ногодж.}$$

$$k = 2$$

$$\varphi = \pi - \text{ногодж.}$$

Тогда

$$x = -2\pi$$

$$k = -2$$

$$\varphi = \pi - \text{ногодж.} \quad \text{но огр.}$$

$$x = -3\pi$$

$$k = -1$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} - \text{ногодж.} \quad \text{но огр.}$$

$$x = -\frac{4\pi}{3}$$

$$k = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3} - \text{ногодж.} \quad \text{но огр.}$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$k = 1$$

$$\varphi = 0 - \text{ногодж.} \quad \text{но огр.}$$

$$x = 2\pi$$

$$k = 2$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} - \text{не ногодж.}$$

(2) случай.

$$\text{т. } \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi - 2\pi k)) = \frac{\pi}{2} + \varphi.$$

$$\text{т. } (\frac{\pi}{2} + \varphi) = \varphi + 2\pi k + \frac{\pi}{2}.$$

$$4\varphi = 2\pi k - 2\pi$$

ограничение  $\frac{\pi}{2} - \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$$\varphi = \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{2}$$

выводим проверка

$$k = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

$$k = -2; \varphi = -\frac{3\pi}{2} - \text{не ногодж.}$$

$$\varphi \in [-\pi, 0]$$

$$k = -1; \varphi = -\pi - \text{ногодж.}$$

$$x = -3\pi$$

$$k = 0;$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \text{ногодж.} \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

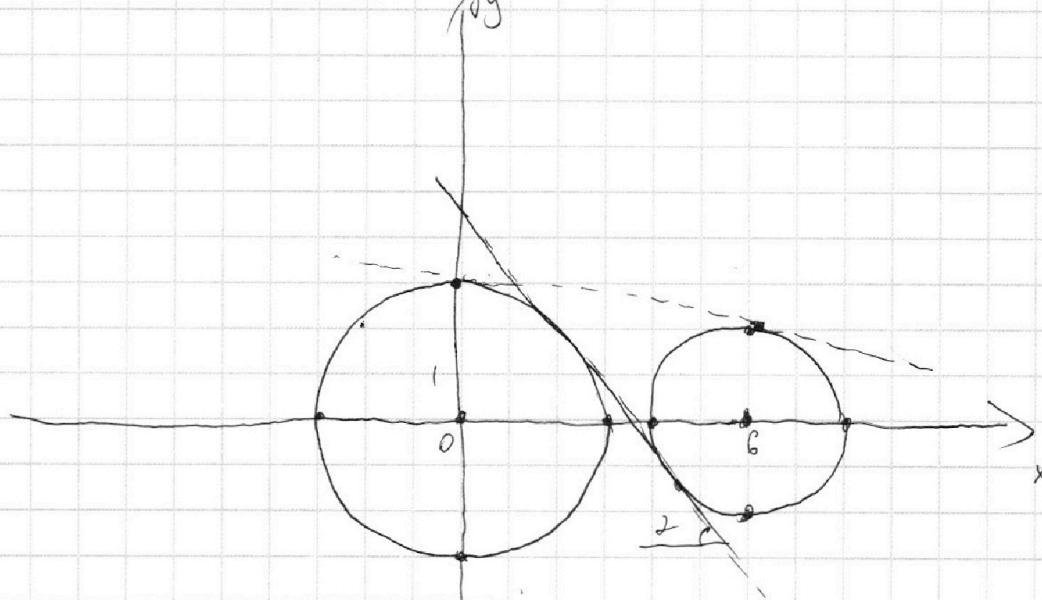


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \alpha x + 2y - 36 = 0$$

$$(2) (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 + 32 - 12x) = 0.$$

$$(3) (x^2 + y^2 - 9)((x - 6)^2 + y^2 - 4) = 0 \quad \text{построим график.}$$



исследуем (1)

$$y = 1,5x - \frac{9x}{2}.$$

Рассмотрим общую касательную  
к окружностям и обозначим  
∠ наклона за  $\alpha$ , заметим  
если  $\angle \varphi$  - прямой  $\angle \varphi \in [0; \frac{\pi}{2})$   
найдется  $\alpha$  при которых будет  
решение а если  $\angle \varphi \in [\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  - тогда  
нет.

найдем прямой  $\alpha$ .

(рассматриваем отриц. наклоны ( $\alpha > 0$ ))

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

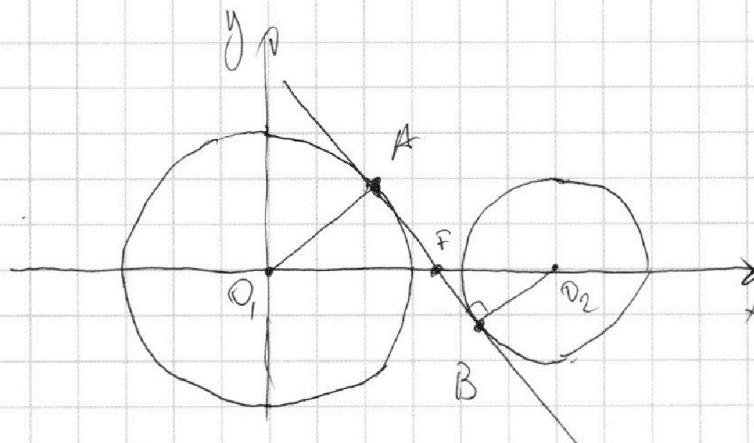
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\Delta O_1AF \sim \Delta F B O_2$

( $\angle O_1 AF = \angle FB O_2 = 90^\circ$ ,  
 $\angle O_1 AF = \angle O_2 FB$  /  
(впрт.)

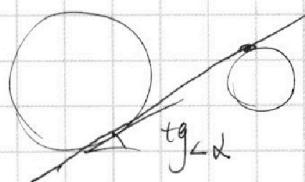
$$\frac{O_1 A}{B O_2} = \frac{O_1 F}{F O_2}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{O_1 F}{6 - O_1 F} \quad 18 = 5O_1 F \quad O_1 F = \frac{18}{5}.$$

Задан  $\cos \angle A O_1 F = \sin \angle O_1 FA = \frac{O_1 A}{O_1 F} = \frac{\sqrt{5}}{6}$ .  
 $\cos \angle O_1 FA = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{6}}$ ,  $\operatorname{tg} \angle O_1 FA = \frac{5}{\sqrt{11}}$  — предельный  
угол, значит чтобы получалось чр решени

$$\frac{a}{2} \leq \frac{5}{\sqrt{11}} \quad 0 \leq a \leq \frac{10}{\sqrt{11}}$$

аналогично для дополнительных иллюстраций Т.К. окр.  
симметрично расположена



$$-\frac{a}{2} \leq \frac{5}{\sqrt{11}} \quad a \leq -\frac{10}{\sqrt{11}}$$

получаем аналогичный случай

$$\text{получаем } a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 3^5 - 8$$

043  $x > 1$

$x \neq 1$

Пусть  $\log_3 x = f$  тогда  $\log_x 3 = \frac{1}{f}$ .  $f \neq 0$

$$f^4 + \frac{6}{f} = \frac{5}{2} - \frac{1}{f} - 8$$

$f > 0$

$$f^4 + \frac{1}{2f} + 8 = 0. \quad 1 \cdot 2f \quad f \neq 0$$

$$2f^5 + 16f - 1 = 0.$$

$$g(f) = 2f^5 + 16f - 1$$

Дискр  $f > 0$  максимум. 1 корень;

$$2f(f^4 + 8) = 1. \quad \log_3 x = f.$$

Т.к. функция в возрастает.

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_3 3 = \log_{25y^2} 3^5 - 8$$

$$3 \text{ аргумента } \log_3 5y = t, \quad \log_{5y^2} 3 = \frac{1}{t}.$$

$$\log_3 x = f \quad \log_x 3 = \frac{1}{f} \quad \text{АДО } f \neq 0.$$

$$f^4 + \frac{6}{f} = \frac{5f}{2} - 8$$

$$f^5 + 8f + \frac{1}{2f} = 0 \quad 1 \cdot 2f$$

$$2f^5 + 16f + 1 = 0. \quad 1 \text{ корень Т.к. функция } g(f) = 2f^5 + 16f \text{ монотонно возрастает.}$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y^2} 3 = \log_{25y^2} 3^5 - 8$$

$$t = \log_3 5y$$

$t \neq 0$

$$t^4 + \frac{2}{t} = \frac{5t}{2} - 8.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~ххх~~  $2t^5 + 16t - \frac{y}{11} = 0$  - аналогично 1 корень.

$$t = \log_3 5y$$

$$y =$$

$$2 \log_3^5 5y + 16 \log_3 5y - \frac{y}{11} = 0$$

$$2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 1 = 0,$$

$$2(\log_3^5 x + \log_3^5 5y) + 16 \log_3 5xy - \frac{y}{11} = 0.$$

~~2f3 + 7f5~~.

$$\log_3^4 x + 0,5 \log_3 x + 3 = \log_3^4 5y + 3,115 \log_3 3.$$

$$(\log_3^2 x + \log_3^2 5y)(\log_3^2 x y) \log_3\left(\frac{x}{y}\right) + 0,5 (\log_3 x + \log_3 5y) = 0.$$

График:  $xy = 0,2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**



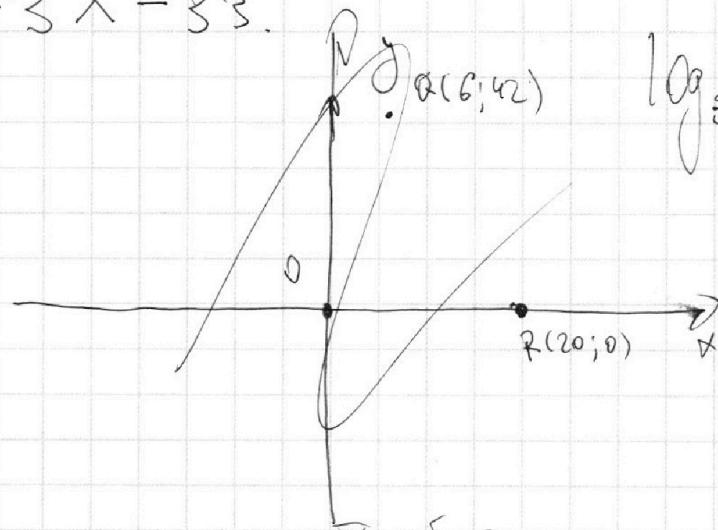
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33.$$

$$3(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) = 33.$$

$$3X - y = 33$$

$$y = 3X - 33.$$



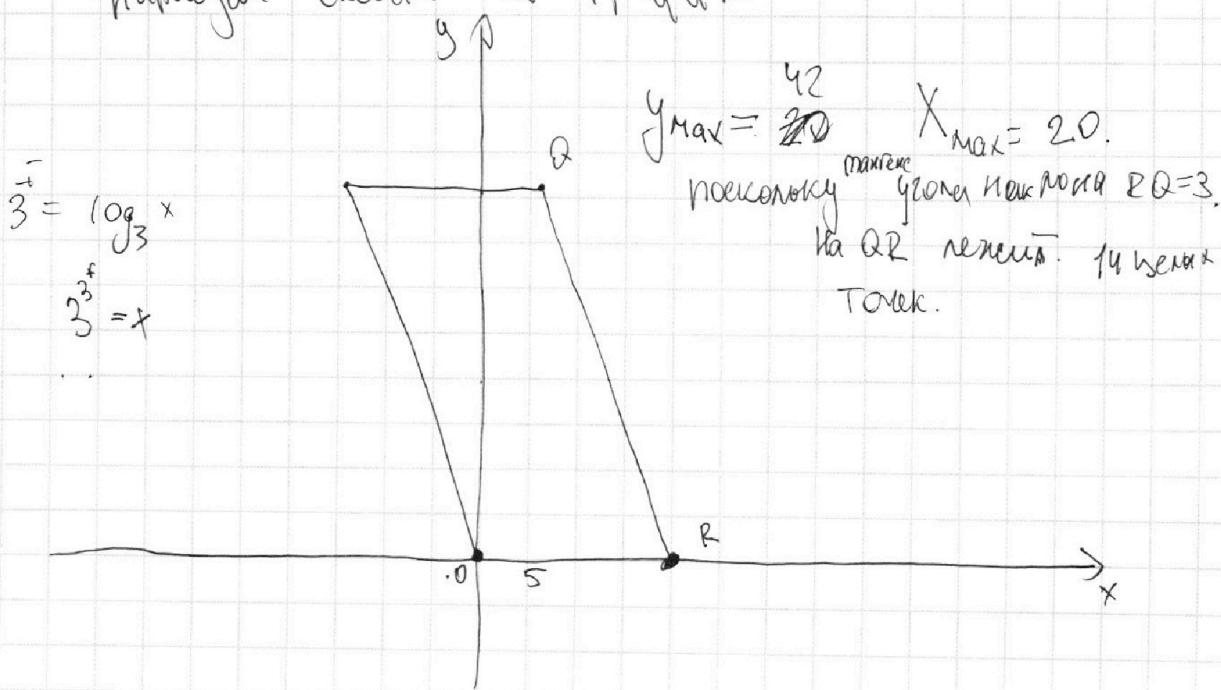
$$x_2 - x_1 = X \in \mathbb{Z}$$
$$y_2 - y_1 = y \in \mathbb{Z}.$$

$$\log_3 \log_3 X = f.$$

$$\log_3^f = \log_3 1$$

$$\log_3$$

нарисуем скетч трапеции График





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



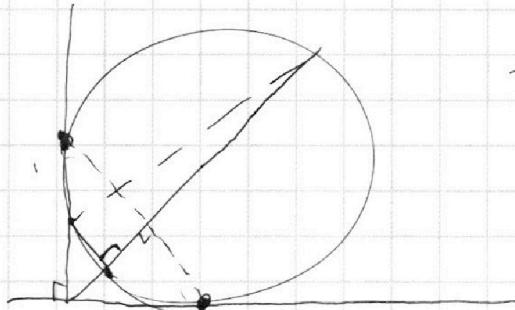
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                                     |                          |                                     |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

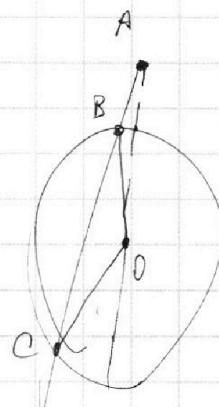
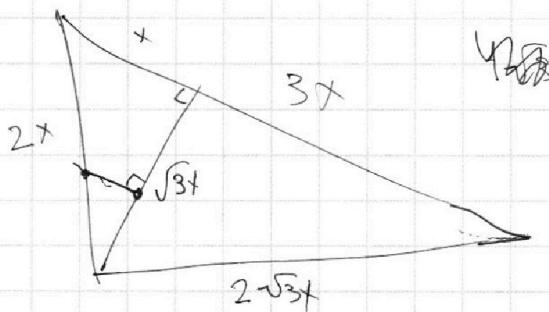
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{r}{f^4} + 0,5f - 8 = 0$$

$$f^5 - \frac{16}{28} f^4 + 1 = 0.$$

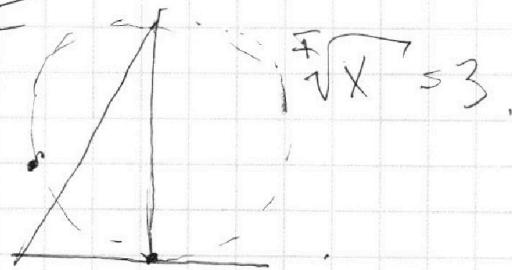


$$2 \log_4 \log_2 \frac{5}{x} + \log_{16} 1 - \log_4 \frac{4}{x} = 0$$

$$AB \cdot BC = (AO - r)(AO + r)$$

$$\log_4 32 + 1 = 0$$

$$3^f = x \quad 32^f = 4$$



$$\log_3 x = f$$

$$\log_x 3 = \frac{1}{f}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x$$



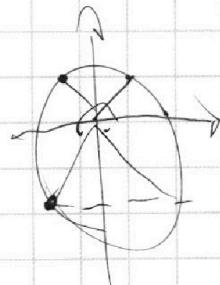
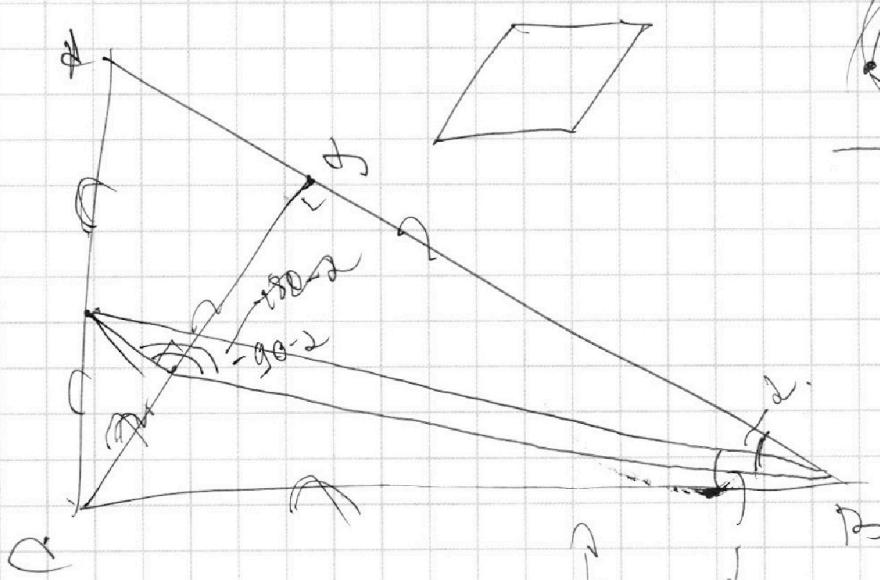
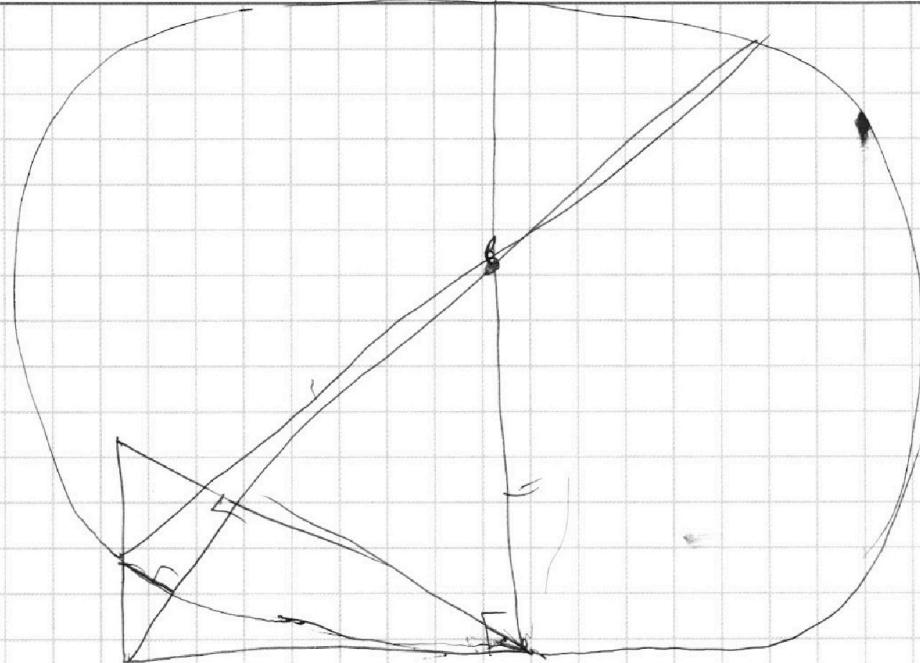
На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                                     |                          |                                     |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arcsin(\sin \varphi) = \varphi$$

$$\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$\varphi \in [\frac{\pi}{2}; \pi] = \pi - \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\varphi_0 \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$$

$$180 - \varphi.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| X | X | ✓ | X | X | X | X |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3} \quad b = 2^{n_4} \cdot 3^{n_5} \cdot 5^{n_6} \quad c = 2^{n_7} \cdot 3^{n_8} \cdot 5^{n_9}$$

$$n_1 + n_4 \geq 9.$$

$$n_1 + n_4 + n_7 \min.$$

$$n_4 + n_7 \geq 14$$

$$n_1 + n_4 + n_7 \geq \cancel{20} 21.$$

$$n_1 + n_7 \geq 19$$

$$n_1 - n_7 = 5$$

$$n_1 + n_7 = 9$$

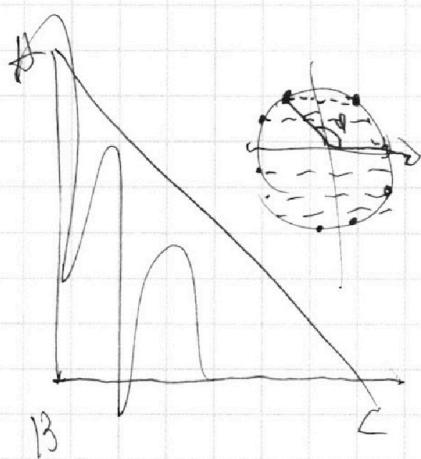
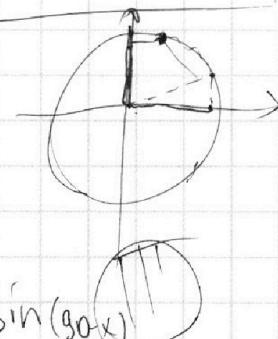
$$n_1 = 7 \quad n_7 = 2$$

$$n_4 = 12.$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin(90-x))$$

$$\cos x = \sin(90-x)$$

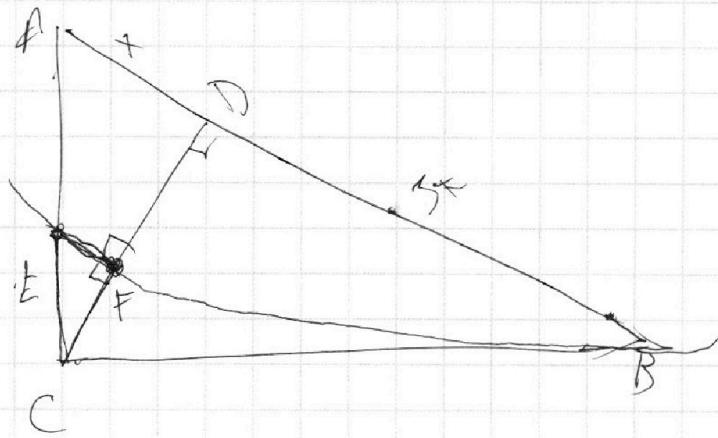
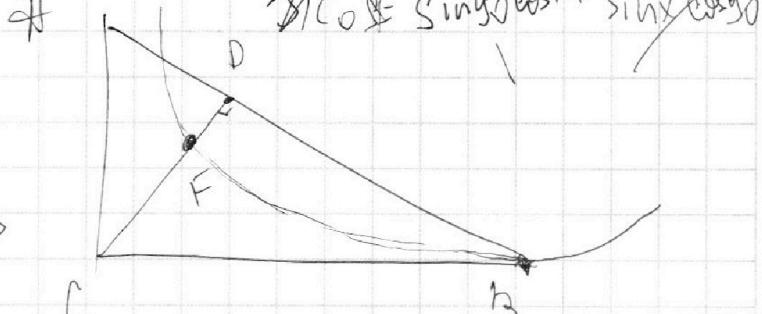


$$\arcsin(\sin \varphi)$$

$$\varphi = 90$$

$$\varphi = 24 - 81.80 = 130.4.$$

$$\sin(x) = \sin(90^\circ - x) + \sin(x) \cos(90^\circ)$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

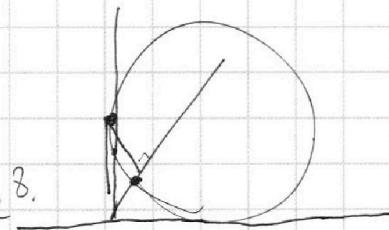
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x^2 + y^2 - 9) \left( (x - 6)^2 + y^2 + 4 \right) = 0$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 3 = 2^3 = 8$$

$$3^{sy} = t. \quad 3 = \log_2 8.$$



$$n_2 - n_5 = 5 \quad 5y = \log_3 t.$$

$$n_8 + n_9 = 14$$

$$n_2 + n_5 = 11$$

$$n_2 = 8 \quad n_5 = 3, \quad n_8 = 10.$$

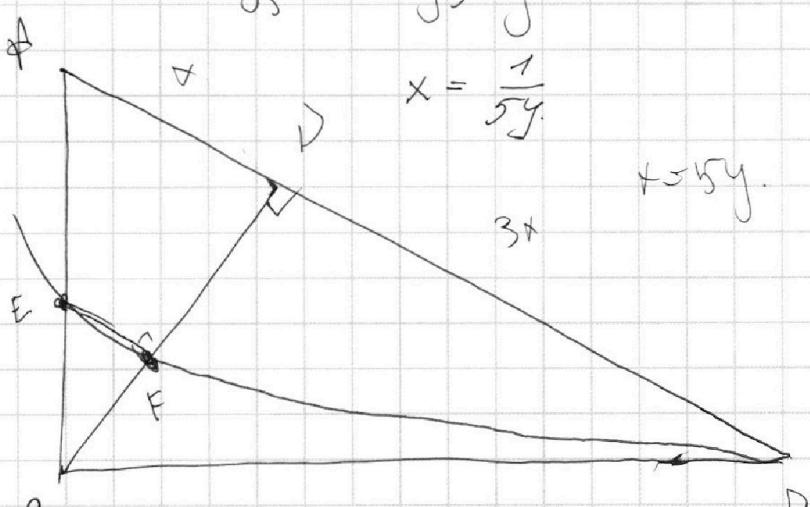
$$n_9 - n_3 = 4$$

$$\log_3 x = -\log_3 5y.$$

$$n_9 + n_3 = 30$$

$$n_9 = 14$$

$$n_3 = 16$$



$$3x + 4y = 6.$$