



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Рассмотрим числа  $a, b, c$ , такие что:  $a = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ ;  $b = 2^w \cdot 3^v \cdot 5^u$ ;  $c = 2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$ .

2) Поскольку как купно получим минимальное значение  $abc \Rightarrow$   
произведение  $ab$ ,  $bc$  и  $ac$  также должны быть минимальны.  $\Rightarrow$

Рассмотрим:  $ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ ;  $bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$ ;  $ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$ .

Перепишем в виде: 1.  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ x_2 + x_3 = 14 \\ x_3 + x_1 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_2 - x_3 + x_3 + x_1 = 9 - 14 + 19 \\ 2x_1 = 14 \\ x_1 = 7 \Rightarrow x_2 = 2 \Rightarrow x_3 = 12. \end{cases}$

2.  $\begin{cases} y_1 + y_2 = 10 \\ y_2 + y_3 = 13 \\ y_3 + y_1 = 18 \end{cases} \Rightarrow 2y_1 = 15 \Rightarrow y_1 = 21, \text{ но по условию } a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  есть 3 варианта:  $y_1 + y_2 = 11$ ;  $y_2 + y_3 = 14$ ;  $y_3 + y_1 = 19$  (  
 $ab, bc$  или  $ac$  дополнительного граничного 3).

$$y_1 + y_2 = 11 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 8 \\ y_2 = 3 \\ y_3 = 10 \end{cases} \quad y_2 + y_3 = 14 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 8 \\ y_2 = 3 \\ y_3 = 11 \end{cases}$$

$$y_3 + y_1 = 19 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 7 \\ y_2 = 3 \\ y_3 = 11 \end{cases} \Rightarrow \text{кулько справить } \frac{8}{3} \cdot 2$$

3.  $\begin{cases} z_1 + z_2 = 10 \\ z_2 + z_3 = 13 \\ z_3 + z_1 = 30 \end{cases} \Rightarrow z_1 = 27 \Rightarrow z_1 = 21, \text{ но } z_1 \neq 27 \text{ если}$   
 $z_1 = 23, 5, \text{ то } z_2 = -3, 5 \Rightarrow$  а поскольку  
дополнительно

$z_1, z_2, z_3 > 0$ , имеем  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то либо  $ab \vdash 5^7 \Rightarrow$

дополнительно

$$z_1 + z_2 = 17 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 17 = , \text{ либо } bc : 5^7 \Rightarrow z_1 + z_3 = 20 \\ z_2 = 0 \\ z_3 = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = 10 \\ z_2 = 0 \\ z_3 = 20 \end{cases}$$

$$\text{тогда } abc = 2^{x_1 + x_2 + x_3} \cdot 3^{y_1 + y_2 + y_3} \cdot 5^{z_1 + z_2 + z_3} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

Ответ:  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

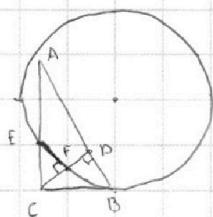
6

7

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) пусть  $x$  - длина  $BD \Rightarrow AD = 3x$ .

2)  $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3x^2 + x^2} = \sqrt{4x^2} = 2x$  (как высота из прямого угла).

3)  $CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$  (но т. Пифагора)

$CA = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{3x^2 + 9x^2} = 2\sqrt{3}x$  (но т. Пифагора)

4)  $CE^2 = CA \cdot CB$  (но т. о касательной и секущей)

$$CE = \frac{CB^2}{CA} = \frac{4x^2}{2\sqrt{3}x} = \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$$

5)  $CF \cdot CD = CB^2$  (но т. о кас. и сек.)  $\Rightarrow CF = \frac{CB^2}{CD} = \frac{4x^2}{2x} = \frac{4x}{2} = 2x$

6)  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot 2x = 2\sqrt{3}x^2$

7)  $AB \parallel EF$  |  
 $AB \perp CB$  |  $\Rightarrow EF \perp CD \Rightarrow \angle EFC = 90^\circ$

8)  $EF^2 = EC^2 - CF^2 = \frac{4x^2}{3} -$

9)  $\angle BAC = 30^\circ$ , т.к.  $CB = \frac{1}{2} AB$

$$\Rightarrow \angle CEF = 30^\circ$$

5)  $AB \parallel EF$  |  
 $AB \perp CD$  |  $\Rightarrow EF \perp CD \Rightarrow \angle EFC = 90^\circ$



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

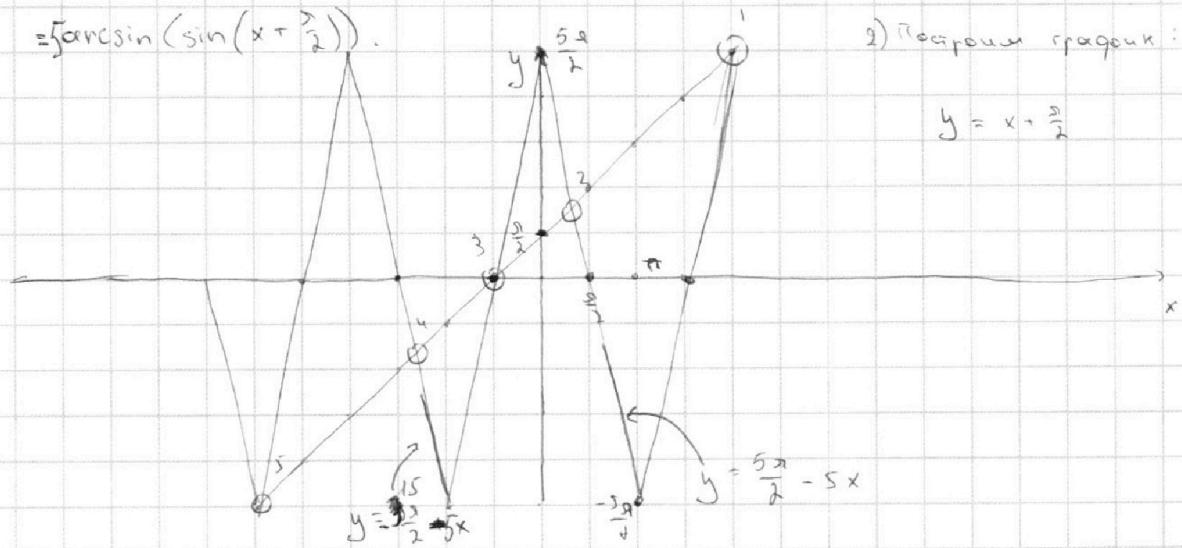
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos(x)) = x + \frac{\pi}{2}.$$

Построим график функции  $y = f(x) = 5 \arcsin(\cos(x)) =$

$$= 5 \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})).$$



$$y = x + \frac{\pi}{2}$$

2) Построим график:

3) По рисунку сразу видно ①, ③ и ⑤ корни:  $x = 2\pi; x = -\frac{\pi}{2};$

$$x = -\frac{6\pi}{7} \approx -3 \text{ л. соответственно.}$$

4) Теперь найдём корни следующие:

$$\textcircled{2} - \text{ точка пересечения } y = x + \frac{\pi}{2} \text{ и } y = \frac{5\pi}{2} - 5x.$$

$$6x = 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3}.$$

$$\textcircled{3} - \text{ точка пересечения } y = x + \frac{\pi}{2} \text{ и } y = -\frac{15\pi}{2} - 5x$$

$$6x = -8\pi$$

$$x = -\frac{4\pi}{3}$$

$$\text{Отвр.: } x = 2\pi, -\frac{\pi}{2}, -3\pi, \frac{\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$$

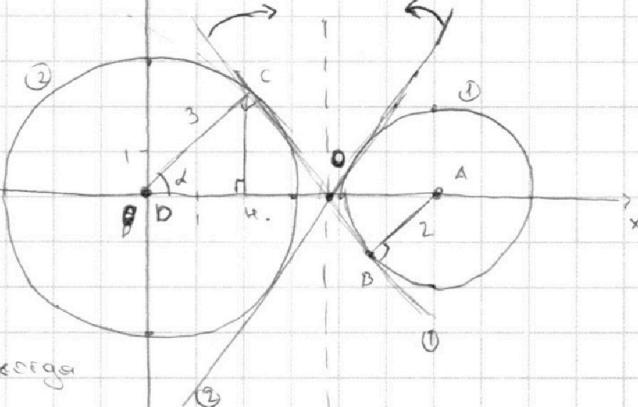
$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4$$

$$\begin{cases} (x - 6)^2 + y^2 = 4 & (1) \\ x^2 + y^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} & (3) \end{cases}$$

1) Заметим, что график (3) — гипербола, и при сжатии вдоль оси  $x$  на величину  $b$  мы получим гиперболу и опускать её.



2) Т.е. единственное углы, когда

прямая не может пересечь обе окружности за раз, это когда

это угол наклона больше или равна углу наклона обеих касательных к двум окружностям.

\*

3)  $\triangle DCO \sim \triangle ABO$  ( $\angle C = \angle B = 90^\circ$ ,  $\angle DOC = \angle AOB$  как верт.)  $\Rightarrow$

$$\text{Из условия } AO = 2x : \frac{AO}{OD} = \frac{AB}{DC} = \frac{2}{3} \Rightarrow OD = 3x.$$

$$AO + OD = AD = 6$$

$$2x + 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{5} \Rightarrow OD = \frac{18}{5} \Rightarrow \left(\frac{18}{5}; 0\right) \in y \Rightarrow 0 = -\frac{18}{5} \cdot \frac{a}{2} + \frac{3b}{2}.$$

$$\sin \alpha = (\text{длина катета } DC) / \text{гипотенузу } DO = \frac{CO}{DO} = \frac{\sqrt{DO^2 - CO^2}}{DO} = \frac{\sqrt{324 - 144}}{\frac{18}{5}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{11}}{5} \cdot \frac{5}{18} = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow \frac{CH}{CP} = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow DH = \sqrt{9 - \frac{11}{4}} = \frac{5}{2}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{11}}{2}\right) \in y \rightarrow \frac{\sqrt{11}}{2} = -\frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{3b}{2} \quad | \cdot 4.$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{11} = -5a + 6b \\ 0 = -18a + 15b \end{cases} \quad \begin{cases} 10\sqrt{11} = -25a + 30b \\ 0 = -6a + 5b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = -36a + 30b \\ 0 = -6a + 5b \end{cases} \Rightarrow 0 = -36a + 30b$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{11} = 11a \Rightarrow a_1 = \frac{10}{\sqrt{11}}$$

Поскольку рисунок симм. относ. ОХ  $\Rightarrow a_2 = -\frac{10}{\sqrt{11}}$ .

1. Поскольку нам потребуется все промежутки, в которых находится. можем  $\Rightarrow$

$$a \in (-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}] \cup [\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty).$$

Значит все промежутки, в которых будет иметь и решения:

$$a \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}}).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 3 = \log_2 243 - 8$$

$$2 \log_3^4 (sy) + \cancel{2 \log_5^2 (sy)} + 2 \log_{sy} 3 = \log_{2sy^2} (3^4) + 8$$

$$x \geq 0; x \in \mathbb{R}$$

$$y \geq 0; y < \frac{1}{s}.$$

$$\text{Рассмотрим } \log_3 x = t, \log_{sy} 3 = p$$

значения, при которых это уравнение имеет какие значения

причины  $xy$ , соответствующие уравнению каким значениям

причины  $t+p$ .

$$1) t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8$$

$$p^4 + \frac{2}{p} = \frac{11}{2p} - 8$$

$$f(t) = 2t^5 + 16t + 7 = 0$$

$$g(p) = 2p^5 + 16p + 7 = 0.$$

$$f'(t) = 10t^4 + 16 = 0$$

$$g'(p) = 10p^4 + 16 = 0$$

$$t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$p \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

значение  $f(t)$  - возрастает на  
всем промежутке, при этом  
 $f(-1) < 0$ ;  $f(0) > 0 \Rightarrow$  оно имеет  
единственный корень

$\Rightarrow$  Аналогично и для функции  
 $g(p)$ , только  $g(0) < 0$  и  $g(1) > 0 \Rightarrow$   
она имеет единственный корень.

$$2(t^5 + p^5) + 16(t + p) = 0$$

значение, при котором  $t + p = 0$  является единственным

а поскольку (по п. 1) это единственный  $t$  и единственный  $p \Rightarrow t + p = 0$

также единственный  $\Rightarrow t + p = 0$  - единственный корень  $\Rightarrow$  ответ  $1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(y_1 = 0)$$

Нр 1) Возьмем  $A(0; 0)$   $\Rightarrow 3x_2 + y_2 = 33 \Rightarrow y_2 = 33 - 3x_2$  - прямая,

$\parallel$  стороне параллелограмма. Заметим, что при  $A(3; 0)$  эта прямая

составляет со стороной параллелограмма. При этом каждая

из таких прямых содержит в себе симметричные координаты

$\Leftrightarrow$  при  $x_1 = 0$  :  $31 \cdot 14 = 56$  торук нам подходит.

2) Если мы уберем избыточную  $y_1 = 1$ , то нам осталось торук

$A(0; 1)$  и  $A(0; 1) \cup A(2; 1)$  - подходит уже только 3 прямые,

т.к. 4-ая будет за пределами параллелограмма  $\Rightarrow 3 \cdot 14 = 42$  торук

нам подходит.

3)  $y_1 = 2$  аналогично 4-ой ситуация  $\Rightarrow 3 \cdot 14 = 42$  торук.

4)  $y_1 = 3$ . Аналогично 5-ой ситуации  $\Rightarrow 3 \cdot 14 = 42$  торук.

$y_1 = 4$  и  $y_1 = 5$  - аналогичные ситуации  $\Rightarrow 3 \cdot 14 + 3 \cdot 14 = 84$  торук.

5)  $y_1 = 6; 7; 8 \Rightarrow 3 \cdot 3 \cdot 14 = 126$  торук.

6)  $y_1 = 9; 10; 11 \Rightarrow 3 \cdot 3 \cdot 14 = 126$  торук.

7)  $y_1 = 12; 13; 14 \Rightarrow$  если подойдет 1-я, то 2-я прямые, т.к.

за ближе за пределы параллелограмма  $\Rightarrow 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 14 = 84$  торук.

8)  $y_1 = 15; 16; 17$  и  $18; 19; 20 \Rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 14 + 3 \cdot 2 \cdot 14 = 168$

9)  $y_1 = 21; 22; 23$  и  $24; 25; 26 \Rightarrow$  нам подойдет 1-я

прямая; т.к. последние несколько строк за пределы параллелограмма



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow 3 \cdot 11u + 3 \cdot 1 \cdot 14 = 42 + 42 = 84.$$

$$(10) \quad u_1 = 27; 28; 29 \Rightarrow 3 \cdot 1 \cdot 14 = u_2.$$

$$\text{Итог: } 56 + 3 \cdot 42 + 84 + 2 \cdot 126 + 34 + 168 + 84 + 42.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

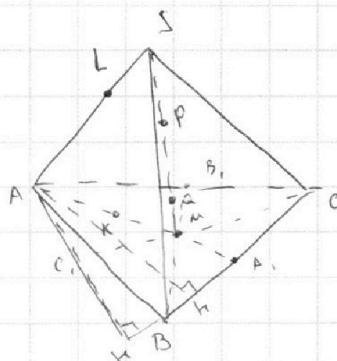
5

6

7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1.  $AL = AK$ , как. касательные.

$$2. MK^2 = MQ \cdot MP \\ SL^2 = SQ \cdot SP \quad | \Rightarrow MK = SL \text{ (по т. о кв.)} \\ SP = MQ \quad \text{и дал.)}$$

$$3) AL = AK \quad | \Rightarrow AS = AM = BC = 12 \\ MK = SL$$

$$4) AM = 2MA_1 \Rightarrow MA_1 = 6. \Rightarrow AA_1 = 18.$$

$$5) S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{2 \cdot 90}{12} = 15.$$

$$\text{Из } RHA_1 = \sqrt{B^2 - 15^2} = 3\sqrt{11}. > BA_1 \Rightarrow \text{т.к. } B \in \text{вн. } \triangle ABC,$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{(-14; 42)} \quad \text{(-14; 42)} \quad \text{(0; 42)} \quad 3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33. \\ \text{If } x_1 = -14, y_1 = 42 \text{ then } 3(0 - (-14)) + (42 - 42) = 33.$$

(4-3).

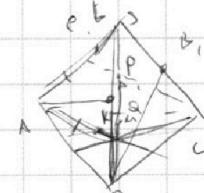
(0; 0).

(-14).  $\text{(-14; 0)}$   $\text{(-14; 34)}$   $\text{(-14; 27)}$   $\text{(-14; 20)}$

$$x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow y_2 - y_1 = 33 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow y_2 = 33$$

$$x_2 - x_1 = 1 \Rightarrow y_2 - y_1 = 30 \quad y_1 = 1 \Rightarrow y_2 = 34$$

$$x_2 - x_1 = 2 \Rightarrow y_2 - y_1 = 27 \quad y_1 = 0 \quad y_2 - y_1 = 20$$



$$20 \cdot 42 = 840. \quad y_1 = 3 :$$

$$3x_2 + y_2 = 33.$$

$$3x_2 + y_2 = 34$$

$$y_2 = 33 - 3x_2$$

$$y_2 = 34 - 3x_2$$

$$3x_2 + y_2$$

$$3x_2 - 3 + y_2 = 33 \quad \frac{90}{6} = 15$$

$$3x_2 + y_2 = 35 \quad | -2x.$$

$$3x_2 + y_2 = 34$$

$$3x_2 + y_2 = 45.$$

$$3x_2 - 9 + y_2 = 33 \quad (18 - 15)(18 + 15)$$

$$y_2 = 45 - 3x_2$$

$$3x_2 + y_2 = 42 \quad 3 \cdot 33$$

11; 14; 12; 20; 23; 26; 29;

15; 13. 13.

12; 15; 18;

18; 19 19...

12; 13;

13; 16; 19.

17; 20

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

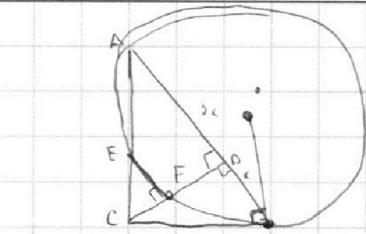
5

6

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CE}{\sqrt{3}x} = \frac{y}{3x}$$

$$CE = \frac{y \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{y}{\sqrt{3}}$$

$$AC = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 4x\sqrt{3}$$

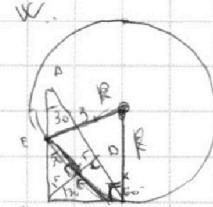
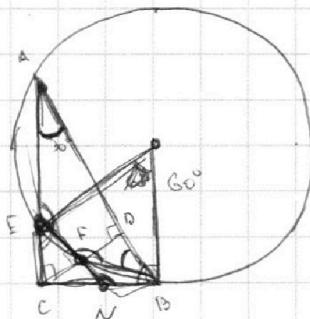
$$CE = \frac{y \cdot 2\sqrt{3}x}{3} = \frac{2y\sqrt{3}x}{3}$$

$$CB^2 = AC \cdot EC$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{4y^2}{3} = \frac{y^2}{3} + y^2$$

$$\frac{5y^2}{3} = -2y^2$$



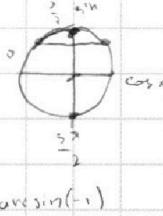
$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{AC}{CB}$$

$$AC = 2\sqrt{3}x$$

$$CB = \sqrt{3}x$$

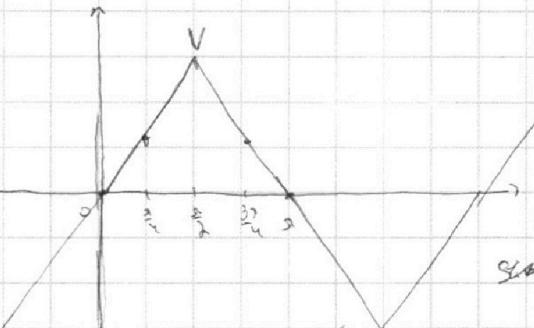
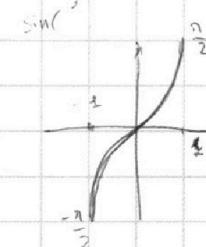
$$CB^2 = AB \cdot DB = 4x^2$$

$$CB = \sqrt{3}x$$



$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$



$$\frac{5x}{2} - 5 = x + \frac{3}{2}$$

$$5x = 6x$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3}$$

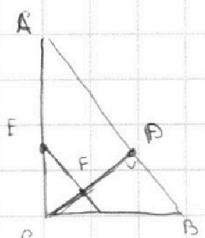
$$2x = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{5}{2} = \frac{5x}{6}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$



$$-\frac{5}{2}k = \frac{5}{2}$$

$$k = -5, \quad f = -\frac{15}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

$$k \cdot \left(-\frac{u}{2}\right) + b = \frac{5}{2}$$

$$f \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) k + b = 0$$

$$\beta = \frac{3}{2}k$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

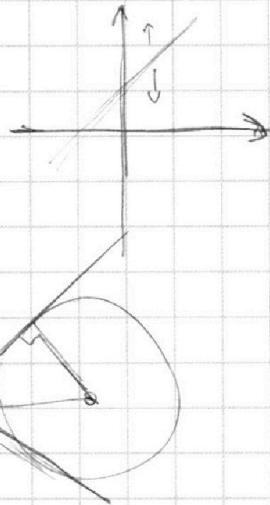


- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**

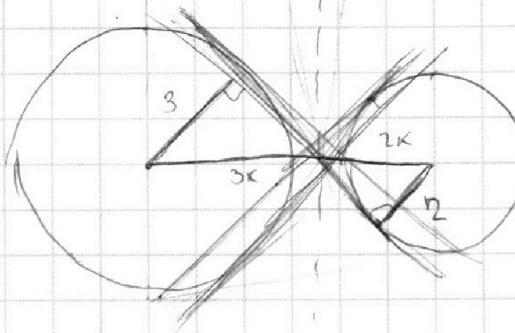
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 0x + 2y + 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 72) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{array}{r} 11 \\ 121 \\ 1331 \\ 14641 \\ \hline 1510105125 \cdot 9 = \\ 225 \\ = 225 \end{array}$$

$$y = -\frac{9}{2}x + \frac{3b}{2}$$



$$\begin{array}{r} 360 \\ 36 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$t^4 + 8t = \frac{8}{t} - 8$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ -225 \\ \hline 909 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ 14 \\ \hline 18 \\ 324 \end{array}$$

$$t^5 + 6t^3 + 8t - 3 = 0.$$

$$243 = 3 \cdot 81 = 3 \cdot 3 \cdot 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$$

$$(t^2)^2 t^3 + 12t + 8$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 25 \\ \hline 1 \end{array} - 3^5.$$

$$t^3 + 12 = 0$$

$$t = -\sqrt[3]{12} \quad t^4 + 8t = \frac{6}{t} - 8$$

$$8 \curvearrowleft \quad p^4 + \frac{2}{p} = \frac{6}{2p} - 8$$

$$\begin{aligned} t + p - ? & \quad t^5 + 8t^3 + 6 - \frac{5}{2} = 0 \quad | \cdot 2 \\ (p+1)^5 &= p^5 + 5p^4t + \\ &+ 10p^3t^2 + 10p^2t^3 + 5pt^4 + 2t^5 + 16t^3 + 7 = 0. \end{aligned}$$

$$p^5 - \frac{7}{2p} + 8p = 0$$

$$7p^5 + 16p - 7 = 0.$$

$$2t^5 + 16t^3 + 7 = 0$$

$$\therefore t + p = 0.$$

$$\begin{aligned} & \downarrow 12^5. \quad 12^4 + 16 = 0. \quad \text{r.e. } (-1; 0) \\ & 12^4 + 16 = 0. \quad \text{r.e. } (-1; 0) \end{aligned}$$

$$2(p^5 + 1^5) + 8(t + p) = 0.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^9 3^{10} 5^{10}; \quad bc : 2^4 3^{13} 5^{13}, \quad ac : 2^{10} 3^{18} 5^{30}$$

$$\begin{array}{r} 10 : 5 \\ 8 : 4 \end{array} \rightarrow 80 : 20$$

$$\min(abc) - ?$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^3 3^5$$

$$a = 2^4 3^5 5^2 \cdot F$$

$$b = 2^2 3^2 5^2 \cdot g$$

$$c = 2^3 3^5 5^2 \cdot h$$

$$y_1 + y_2 + z_3$$

$$y_1 + y_2 = 9$$

$$y_1 + y_2 = 10$$

$$z_2 + z_3 = 10$$

$$x_2 + x_3 = 14$$

$$y_2 + y_3 = 13$$

$$z_2 + z_3 = 13$$

$$\begin{array}{r} 70 \\ 14 \\ \hline 28 \\ 28 \\ \hline 42 \\ 13 \\ \hline 23 \\ 23 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 13 \\ \hline 23 \\ 13 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$6 : 2 \cdot 3$$

$$x_3 : 2 \cdot 3$$

$$y_2 : 3^2 \cdot 5$$

$$x_2 : 2$$

$$x^2 y^2 z^2 : 2^2 3^3$$

$$6 \cdot 2 \cdot 45 =$$

$$= 540.$$

$$2(x_1 + x_2) +$$

$$2(y_1 + y_2 + z_3) + x_2 + y_2 + z_2 +$$

$$\min(a+b+c+d)$$

②

$$y_1 + y_2 = 10$$

$$y_2 + y_3 = 13$$

$$y_3 + y_1 = 18$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_1 + y_3 + y_1 = 10 + 13 + 18 = 41$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad x_1 = 7 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad x_1 = 7 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad x_1 = 7 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad x_1 = 7 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 12$$

$$y_1 + y_2 = 11$$

$$y_1 = 8$$

$$y_2 = 3$$

$$y_3 = 10$$

$$y_1 = 12 + 3, \quad y_1 = 15, \quad y_1 = 18$$

$$y_2 = 3$$

$$y_3 = 12$$

③

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10 + 13 + 18 = 41$$

$$x_1 + x_2 = 10 \quad x_2 = -3,5$$

$$x_2 + x_3 = 13 \quad x_3 = 16,5$$

$$x_3 + x_1 = 18 \quad x_1 = 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad x_1 = 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad x_1 = 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad x_1 = 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad x_1 = 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad x_1 = 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad x_1 = 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad x_1 = 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad x_1 = 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad x_1 = 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad x_1 = 14$$

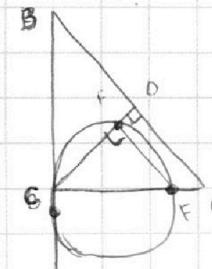
$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad x_1 = 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad x_1 = 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad x_1 = 14$$

$$3^8 \cdot 8^{10} \quad 3^8 \cdot 5^{14}$$

$$3^8 \cdot 5^{14}$$



$$2x_1 + 2x_2 = 20 \quad x_2 = 0$$

$$2x_1 + 2x_3 = 20 \quad x_3 = 10$$

$$2x_2 + 2x_3 = 20 \quad x_2 = 10$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ