



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
- [6 баллов] Дано треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1.

$$ab : 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^{14}, \quad bc : 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^{10}, \quad ac : 2^{14} \cdot 3^7 \cdot 5^{43}$$

найдите
 $b = 2^x_1 \cdot 3^y_1 \cdot 5^{z_1}$,
 $c = 2^x_2 \cdot 3^y_2 \cdot 5^{z_2}$,
 $a = 2^x_3 \cdot 3^y_3 \cdot 5^{z_3}$

Тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_2 + x_3 \geq 13 \\ x_1 + x_3 \geq 14 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 \geq 11 \\ y_2 + y_3 \geq 15 \\ y_1 + y_3 \geq 17 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 + z_2 \geq 14 \\ z_2 + z_3 \geq 18 \\ z_1 + z_3 \geq 43 \end{cases}$$

~~Задача~~ решением трех систем независимых уравнений, которые, в свою очередь, решают системы уравнений $x_1 + x_2 = 7$, $y_1 + y_2 = 11$, $z_1 + z_2 = 14$, $x_1 + x_3 = 13$, $y_2 + y_3 = 15$, $z_2 + z_3 = 18$, $x_2 + x_3 = 14$, $y_1 + y_3 = 17$, $z_1 + z_3 = 43$.

~~Задача~~ $x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{7+13+14}{2} = 17$, при этом забывая о z получим

$$\rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (4, 3, 10)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{11+15+17}{2} = \frac{43}{2} = 21,5 \text{, а т.к. она целое, то получим}$$

$$- 22. - \text{ при } (y_1, y_2, y_3) = (6, 5, 11)$$

$z_1 + z_2 + z_3 \geq z_1 + z_3 = 43$. Система бесконечна
при исключении $(z_1, z_2, z_3) = (21, 0, 22)$.

~~Задача~~ $\min(abc) = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

$$\text{Ответ: } \min(abc) = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\sin x) = -\frac{3\pi}{2} + 2x$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{3\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right),$$

значит, т.к. аркосинус имеет в промежутке $[0, \pi]$,

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + 2x \leq \pi$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right)$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \pi = \pi - \frac{4\pi}{5} - \frac{\pi}{5} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ -\frac{3\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

$$\cancel{4x = 4\pi + 10\pi n, n \in \mathbb{Z}}$$

$$6x = \pi + 10\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x = \pi + \frac{5}{2}\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2)$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$$

использовано (1) в обратном направлении.

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x + \frac{5}{2}\pi n \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$-3 \leq 2 + 5n \leq 7$$

$$-1 \leq n \leq 1, \text{значит, } x = \pi - \frac{5}{2}\pi = -\frac{3}{2}\pi$$

$$\begin{cases} x = \pi \\ x = \pi + \frac{5}{2}\pi = \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Поставили (2) :

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot 6$$

$$-18 \leq 1 + 10k \leq 21$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq k \leq 2, \text{ значит, } \\ x &= \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = -\frac{3\pi}{2} \\ x &= \frac{\pi}{6} \\ x &= \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} - \frac{11\pi}{6} \\ x &= \frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{21\pi}{6} = \frac{7\pi}{2} \end{aligned}$$

Ответ: $x = -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \pi; \frac{7\pi}{2};$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

$$x^2 + 3xy - 7y = 0$$

$$(x^2 + 4y^2 + 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

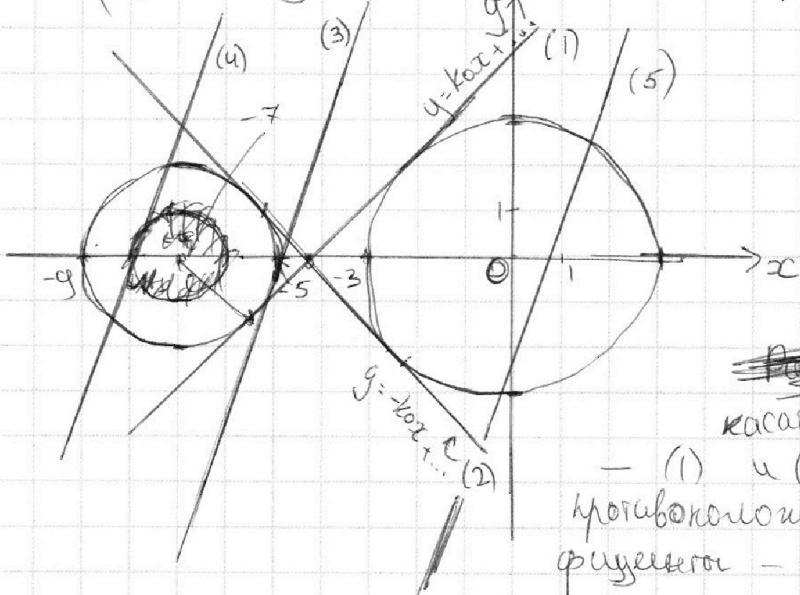
и реш

$$\begin{cases} 3xy = 7y - x \\ ((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

— прямая, не параллельная Оу

$$((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

: прасрек — 2 окружности



пункт

~~Рассмотрим~~ общие
касательные окружностей

— (1) и (2). Две из них
противоположные, удовле-
твующие — есть k_0 и $-k_0$
($k_0 > 0$).

Рассмотрим касательную к малой окружности, с коэффиц.

k^* Если $k > k_0$, то касательная (3) не дает касания/пересе-
жения второй окружности, и если ~~или~~ каса-
етя прямой, параллельной ей, выше этой касательной,
то тут более выше и второй окружности.

Если же эта прямая с коэффиц. к малой (3) то не имеет
пересечений с малой окружностью. Тогда образует
бах альгебра не дает решений.

Аналогично, для $k < -k_0$ тоже не возможны решения.

~~(*~~ никакую из 2 касательных (такие коэффиц.)

~~противоположных~~ касательных $x = d \rightarrow$ тоже ~~не~~ пересе-
жения.

Если же $-k_0 < k < k_0$, тогда найдется такое b , что
прямая с этим коэффиц. проходит через точку пересечения
(1) и (2), а значит, пересекает 2 окр-ти в 4 точках.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $a=0$ — не подходит, т.к. прямая $OC = 7b$ не может иметь
двойное 2 пересечений

2) $a \neq 0$:

$$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a} = kx + \frac{7b}{3a}$$

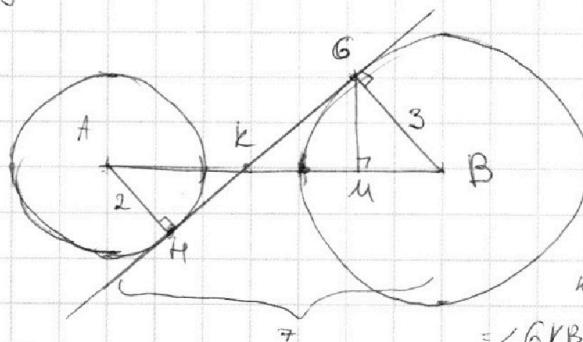
$$-k_0 < -\frac{1}{3a} < k_0$$

$$\left| \frac{1}{3a} \right| < k_0$$

$$\left| \frac{1}{3a} \right| > \frac{1}{k_0}$$

$$\begin{cases} a > \frac{1}{3k_0} \\ a < -\frac{1}{3k_0} \end{cases}$$

Находим k_0 :



нашёл H , G — т.дли
касание, $AB \cap HG = k$,
 $GM \perp kB$.

$BG \perp GH$, $AH \perp GH$

как радиусы, проведены.

K точкой касания, а $\angle AKH = \angle GKB$, поэтому $\triangle AKH \sim \triangle BKG$

$$\Rightarrow AK : KB = 2 : 3 \Rightarrow AK = \frac{2}{5}AB, KB = \frac{3}{5}AB$$

$$= \frac{21}{5}. \text{ Но в диаметре, } KG^2 = \frac{21^2}{5^2} - 9 = \frac{441 - 225}{25} = \frac{216}{25}$$

$$KG = \frac{3\sqrt{24}}{5} = \frac{6\sqrt{6}}{5}$$

Исходя из формулы площади архимедово дискоиди-
ческо, $\frac{1}{2}KG \cdot GB \cdot \frac{1}{2}KB \cdot GM \Rightarrow GM = \frac{KG}{KB} \cdot GB$

$$= \frac{\frac{6\sqrt{6}}{5} \cdot 3}{\frac{3 \cdot 21}{5} \cdot 7} = \frac{6\sqrt{6}}{7}$$

$$KM^2 = KG^2 - GM^2 = \frac{36 \cdot 6}{25} - \frac{36 \cdot 6}{49} = 36 \cdot 6 \cdot \frac{24}{35^2} =$$

$$= \frac{6^2 \cdot 6^2 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 7^2} \Rightarrow KM = \frac{36 \cdot 2}{35} = \frac{72}{35}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$k_0 = \frac{Gm}{km} = \frac{8\sqrt{6} \cdot 355}{7 \cdot 3212} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\left| \begin{array}{l} a > \frac{12^4}{355\sqrt{6}} = \frac{4}{5\sqrt{6}} \\ a < -\frac{4}{5\sqrt{6}} \end{array} \right.$$

Ответ: $a > \frac{4}{5\sqrt{6}}$ или $a < -\frac{4}{5\sqrt{6}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 5

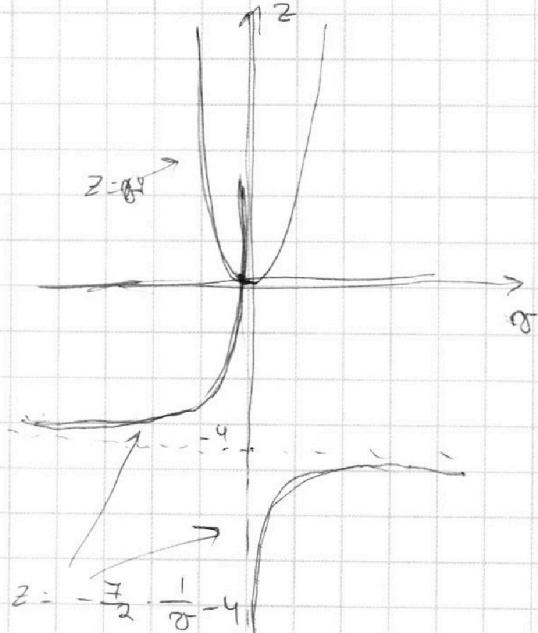
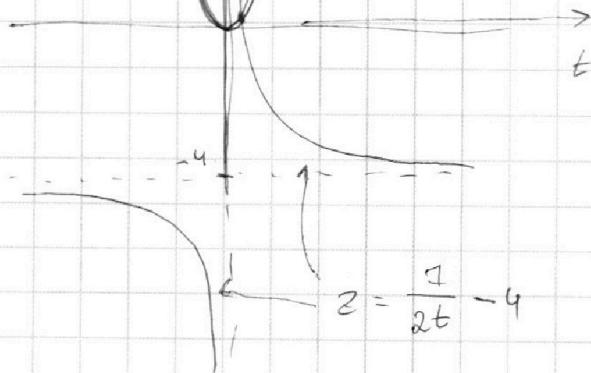
$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 743 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_y 2 (7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log_7(6x))^4 - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7(6x)} - 4 \\ (\log_7 y)^4 + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4 \end{cases}$$

Замена: $t = \log_7(6x)$, $v = \log_7 y$

$$\begin{cases} t^4 = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \\ v^4 = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{v} - 4 \end{cases}$$

$$z = t^4$$



Графики имеют пересеч. в точках $(\pm 2, 16)$ и $(\pm 1, 1)$, и в силу "отрезанности" кривых $t=0$.

$$\log_7(6x) + \log_7 y = 0$$

$$6xy = 1$$

$$\text{Одн. } \frac{1}{6}$$

* $\log_7(6x)$ и $\log_7(y)$ имеют все значения, поэтому для каждого t и v существует соответствующая x и y .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$a(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$$

Ряды для определения $x_2 \geq x_1$, т.е. для $x_2 - x_1 \geq 0$
 $(y_2 - y_1) \geq 0$ и вектора $\begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$ направлены в одну и ту же сторону.

кот б. заложил ветер - а, берега измени -
- б, речи.

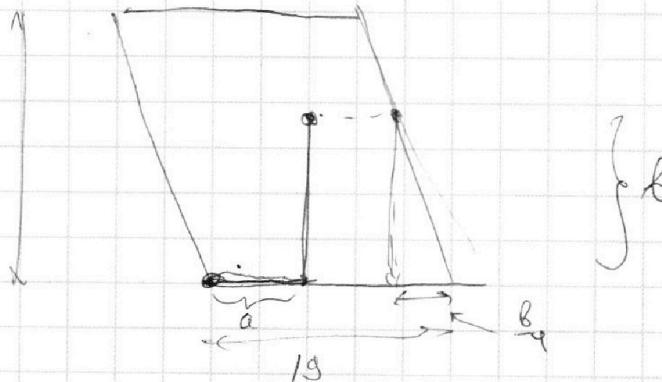
$$1) \quad y_2 > g_1 \quad . \quad 4a + b = 40 \\ (a, b) = (0, 40), (1, 36), (2, 32), \dots, (9, 10, 0)$$

$$2) g_2 < g_1$$

$$40 - 8 = 40$$

$f = 4(a-10)$, $a \leq 9$ — раб. время наработки лор.

$$(0, \theta) = (10, 0), (11, 4), (12, 5), \dots, (18, 32), (19, 36)$$



68

Кол-во безвозврат. задолж. ~~бюджет~~ ~~70 млн~~
количество ~~затрат~~ ~~с расчетом~~ 68 - 6 + 1

Re-60 безмоторное сопло: $y = \frac{b}{4} - a + 1$ rado

$1g - a - \frac{b}{4}$ (1 algrai - 0 yentzirelelmau



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(\log_7(6x)) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log_7(6x))^4 - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7(6x)} - 4 \\ (\log_7 y)^4 + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4 \end{cases}$$

Заменим: $t = \log_7(6x)$, $v = \log_7 y$

$$\begin{cases} t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \\ v^4 - \frac{6}{v} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{v} - 4 \end{cases}$$

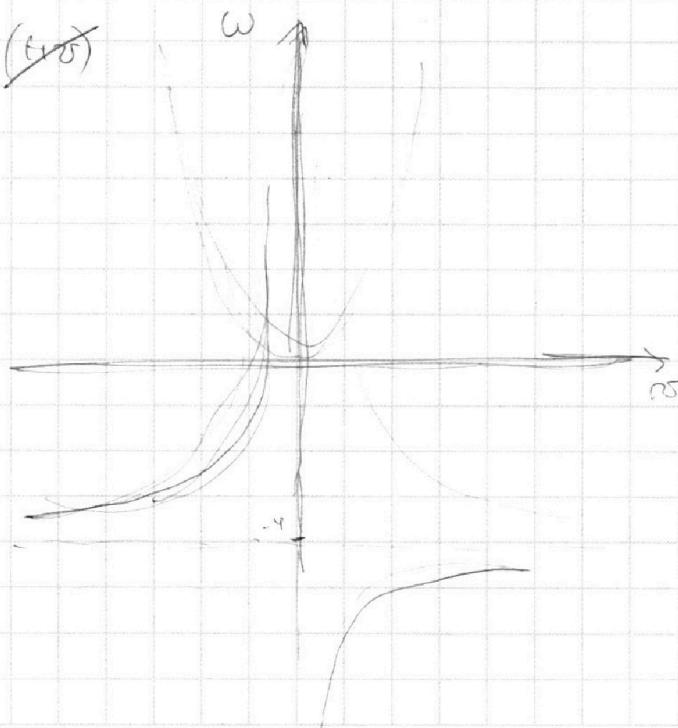
$$\begin{cases} t^4 = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \\ v^4 = \frac{-7}{2} \cdot \frac{1}{v} - 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} t \neq 0 \\ v \neq 0 \end{array}$$
$$4v^3 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{v^2} = 0 \quad | \cdot 2v^2$$
$$8v^5 + 7 = 0 \quad \sqrt[5]{-\frac{7}{8}}$$

$$vt(t^2v^2)(t-v)(t+v) = \frac{7}{2}(t+v)$$

$$v = -t$$

$$v \neq 0$$

$$\log(vt+0) \checkmark$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Угол между осями (a, b) . $(69-a - \frac{b}{4})(17-\frac{b}{4}) +$
 $+ (68-a - \frac{b}{4})(52-\frac{3b}{4}) = 69 \cdot 17 - \frac{69b}{4} - 17a + \frac{ab}{4} + \frac{b^2}{16} - \frac{17b}{4} +$
 $+ 68 \cdot 52 - \frac{3 \cdot 68b}{4} - 52a + \frac{3ab}{4} - \frac{52b^2}{16} + \frac{3b^2}{16} =$
 $= (17+17^2 \cdot 4 + 17 \cdot 4 \cdot 52) - \frac{69+17}{4}b - (51+13)b - 52a - 69a -$
 $+ ab + \frac{b^2}{4} = 17(1+4+17(52+17)) - 17(1+4 \cdot 17 \cdot 68) +$

$$5 \cdot 4 + 7 = 61$$

$$\underline{\underline{68}} \cdot \underline{\underline{69}}$$

$$\underline{\underline{61}} \cdot \underline{\underline{2}}$$

$$\underline{\underline{46}} \underline{\underline{3}}$$

$$\underline{\underline{46}} \underline{\underline{9}} \underline{\underline{2}}$$

$$\underline{\underline{69}} \underline{\underline{-117}}$$

$$= \frac{86}{4} = \frac{43}{2}$$

$$\frac{43}{2} \cdot 164 = 21 \cdot 164 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 85 \frac{1}{2}$$

$$= 17 \cdot 4693 - (85 \frac{1}{2} b) - 69a + ab + \frac{b^2}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

11

$$\begin{array}{cccccc} \text{ab}_3 & 2^+ & 3^{11} & 5^{14} \\ \text{bc}_3 & 2^3 & 3^5 & 5^{18} \\ \text{ac}_3 & 2^4 & 3^7 & 5^{42} \end{array}$$

A hand-drawn diagram of a wave on graph paper. The wave has several peaks and troughs. Labels are placed above or below the wave at various points: 1, 2, 3, 7, 11, 13, 14, and 15. The labels 1, 2, 3, 7, 11, 13, and 14 are clearly visible, while 15 is partially cut off at the right edge.

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f = 2^{x_2} 3^{y_2} 5^{z_2}$$

$$C = 2^{x_3} 3^{y_3} 5^{z_3}$$

$$ab : x_1 \cdot x_2 \geq 7$$

$$6c: x_2 + x_3 \geq 3$$

$$60 : \quad \quad \quad - 4 = 10$$

$$x_1 + x_3 \leq 14$$

$$abc \geq \frac{7+13+14}{2} = 15, \quad 3 \leq \frac{11+15+17}{2} = 16, \quad 5 \leq \frac{14+18+19}{2} = 17.$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r} \text{68} \\ \text{1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} abc = 2^{17} 3^{22} 5^{38} \\ 14 \\ 2^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y_1 + y_2 \geq 17 \\ y_2 + y_3 \geq 15 \\ y_1 + y_3 \geq 16 \\ \hline y_1 + y_2 + y_3 \geq 48 \end{array}$$

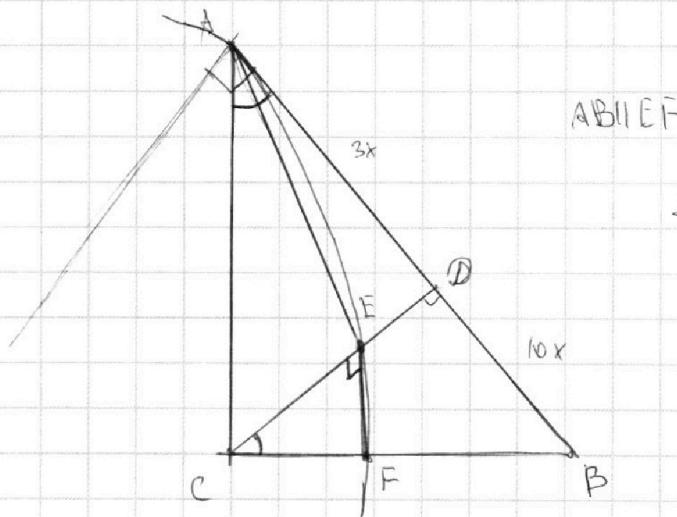
Z, 4th, 23 & 22

$$\begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 10 \end{array}$$

$$\begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 5 \\ y_3 = 11 \end{cases}$$

$$29 + 14 = 43$$

~2



ABII EF

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

$$\frac{AB}{DB} = \frac{3}{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

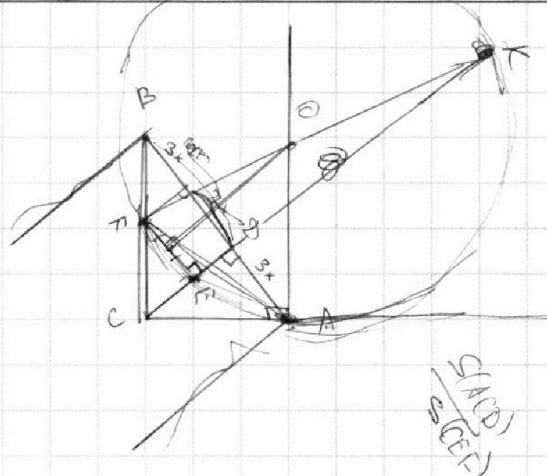
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



AB || FE

$$\sqrt{2} \angle FBA = \angle FAG \Rightarrow \frac{FC}{AC} \checkmark$$

$$\frac{BC}{AG} \checkmark$$

$$\frac{BC}{FC} \checkmark$$

№3

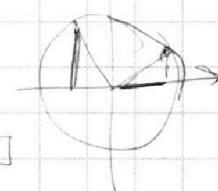
$$[0, 5\pi]$$

↙

$$[0, 5\pi]$$

↙

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow x \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$$



$$\sin x = \cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+x}{5}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{x}{5} + \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \pi - \frac{4\pi}{5} - \frac{x}{5} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = 5c - 4\pi - 10\pi n \\ 5x = 5\pi - 4\pi - x + 10\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5c = \pi + \frac{5}{2}\pi n \\ 5c = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{3\pi}{2} \leq \pi + \frac{5}{2}\pi n \leq \frac{7\pi}{2} \\ -\frac{11\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \leq \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq 5n \leq 7 \\ -16 \leq 5k \leq 11 \end{cases}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{5}{3} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{3} = \frac{11\pi}{6} = \frac{11}{6}$$

$$-3 \leq 5n \leq 7$$

$$-1 \leq n \leq 1$$

$$x = -\frac{3\pi}{2} \quad \text{(circle)} \quad \frac{7\pi}{2} \quad \text{(circle)}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot \frac{6}{5\pi}$$

$$> 8k$$

$$-8 \leq 1 + 10k \leq 21$$

$$-10 \leq 10k \leq 20$$

$$-1 \leq k \leq 2$$

$$x = -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

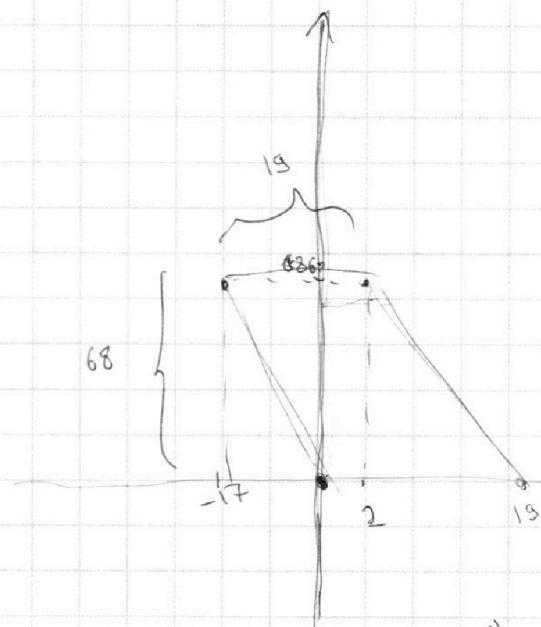
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

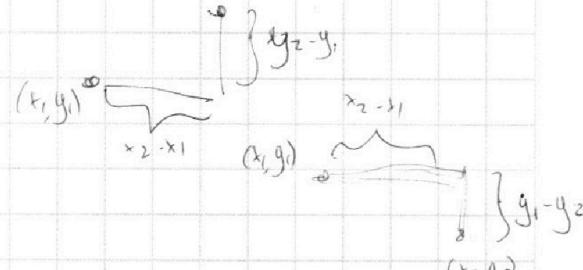
$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$$

$O(0,0)$, $P(-17,68)$, $Q(2,68)$, $R(19,0)$



Пусть $x_2 > x_1$,

(x_2, y_2)



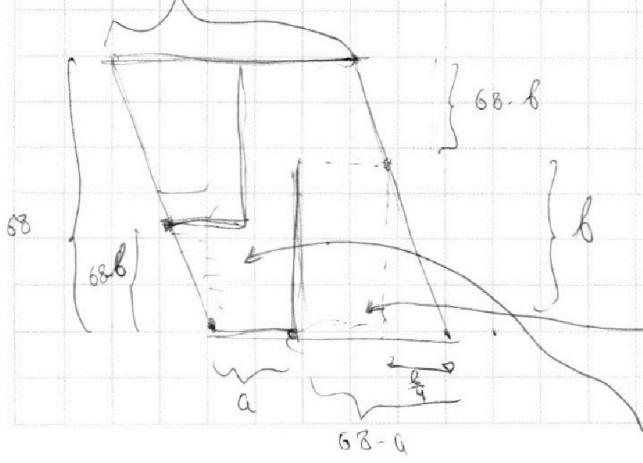
1) $y_2 > y_1$
 $4a + b = 40$

$$(a, b) = (0, 40), (1, 36), (2, 32), \dots, (8, 4), (10, 0)$$

2) $y_2 < y_1$
 $4a - b = 40$

$$68 \geq b = 4(a-10) \quad | 10 \leq a \leq 19$$

$$(a, b) = (10, 0), (11, 4), (12, 8), (13, 12), (14, 16), (15, 20), (16, 24), (17, 28), (18, 32), (19, 36)$$



$$\frac{68}{4} - \frac{b}{4} = z = \frac{l}{4}$$

$$68 - 17 = 52$$

Найдено квадратное уравнение:
 $68 - a - \frac{b}{4} - 1 = 0 \quad (*)$

или $68 - a - \frac{b}{4} = 1 \quad (***)$

из уравнения $68 - b = \frac{68 - b}{4} - 17 = \frac{l}{4}$

$\Rightarrow (***) - (****) \Rightarrow 68 - b - 17 - \frac{b}{4} = 52 - \frac{3b}{4}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

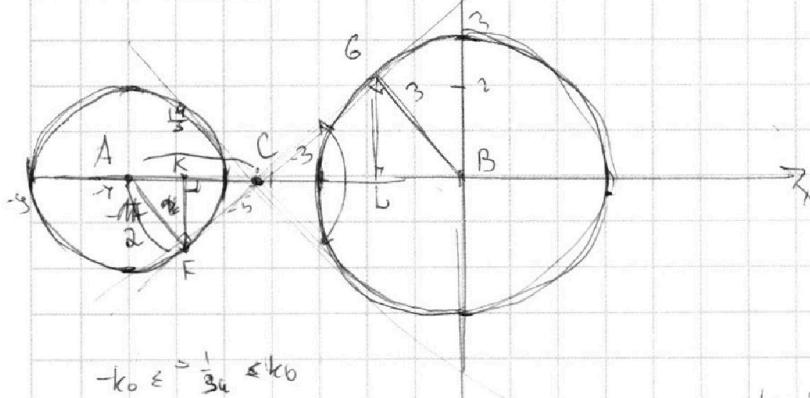
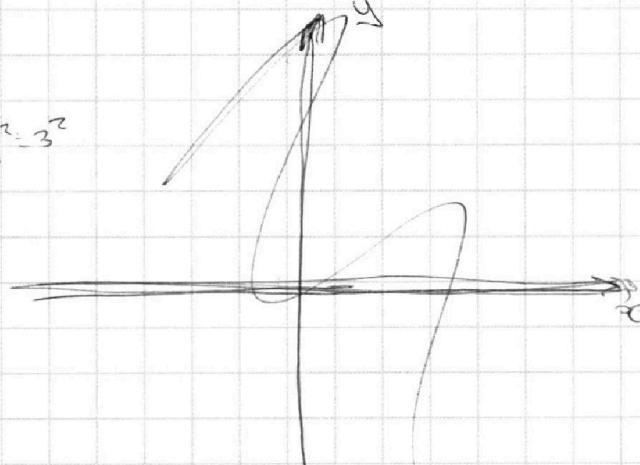
решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & x + 3ay - 7b = 0 \\ & \cancel{(x^2 + 14x + y^2 + 45)} \quad (x^2 + y^2 - 9) = 0 \\ & \quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ & (1 - 7)^2 + y^2 + 45 = 49 \\ & (8 - 7)^2 + y^2 - 2^2 \qquad \qquad \qquad x^2 + y^2 - 3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \text{1) } a=0: & \text{2) } a \neq 0: \\ x = 7b & y = -\frac{x}{2a} + \frac{7b}{3a} \end{array}$$



$$-k_0 \leq \frac{1}{3a} \leq k_0$$

$$AC = \frac{2}{5} \cdot 7 = \frac{14}{5}$$

$$CB = 76! \frac{3 \cdot 7}{5} = \frac{21}{5}$$

$$FC^2 = \frac{196}{25} - 4 = \frac{96}{25} = \frac{4.24}{25} = \frac{4.4 \cdot 6}{25 \cdot 5}$$

$$FC = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

$$FK \cdot \frac{\frac{4}{5}}{5} = 2 \cdot \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

$$FK = \frac{Gv_0}{T}$$

$$Gb = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{2}{7}\sqrt{6}}{7} = \frac{6\sqrt{6}}{7}$$

14

$$k_0 \geq \frac{1}{3\alpha} \geq -k_1$$

$$\frac{1}{\lambda d} \leq \frac{5\sqrt{6}}{4}$$

$$a \geq \frac{4}{5\sqrt{6}} \text{ with } b < 0 \quad -\frac{1}{5\sqrt{6}} \leq a \leq \frac{1}{5\sqrt{6}}$$

$$k_0 = \frac{GL}{CL} = \frac{\frac{6\sqrt{15}}{7}}{\frac{72}{7}} = \frac{5}{36} = \frac{5\sqrt{15}}{12}$$

$$k_0 = \frac{GL}{CL} = \frac{\frac{6\sqrt{15}}{7}}{\frac{72}{7}} = \frac{5}{36}$$