МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №1

Пусть $x, y, z \in \mathbb{N}$ таковы, что

$$\begin{cases} ab = 2^{9} 3^{10} 5^{10} \cdot x \\ bc = 2^{14} 3^{13} 5^{13} y \\ ac = 2^{19} 3^{18} 5^{30} \cdot z \end{cases} \Rightarrow \quad ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = 2^{42} 3^{41} 5^{53} xyz$$

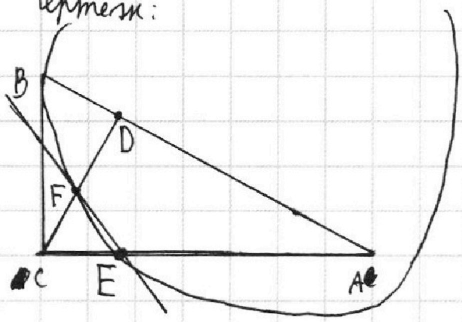
Заметим, что т.к. слева полный квадрат, то справа кол-во степеней двоек, троек и пятерок должно быть чётно, а по факту степени 3 и 5 - нечётны.

Значит $xyz = 15k^2$, где $k \in \mathbb{N} \Rightarrow (abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{54} k^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow abc = 2^{21} 3^{21} 5^{27} k$. Значит наименьшее ~~зна~~ возможное значение abc равно $2^{21} 3^{21} 5^{27}$ при $k = 1$.

Ответ: $2^{21} 3^{21} 5^{27}$

Задача №2.

Чертёж:



Пусть $AD = 3x$ и $BD = x$. Тогда по св-ву прямоуг. треугольника ~~$AD = \sqrt{AD}$~~ $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{3}x$.

Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}(AD + BD) \cdot CD = 2\sqrt{3}x^2$.

Заметим, что $\triangle ADC$ - прямоугольный, и в нём $tg\angle ACD = \frac{AD}{CD} = \frac{3x}{\sqrt{3}x} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACD = 60°$, и по теореме о сумме углов в треугольнике $\angle CAB = 30°$; $\angle ABC = 60°$; $\angle BCD = 30°$, откуда $BC = 2x$ и $AC = 2\sqrt{3}x$

Заметим, что $S_{ACD} = \frac{AD}{AB} \cdot S_{ABC} = \frac{3}{4} S_{ABC}$. Тогда т.к. $AB \parallel EF$, то $\angle CEF = \angle CAD$ и т.к. $\angle DCA$ - общий, то $\triangle ACD \sim \triangle ECF$ по двум углам. Если $\frac{FE}{AD} = k$ - коэффициент подобия, то $S_{ECF} = k^2 S_{ACD} = \frac{3k^2}{4} S_{ABC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{4}{3k^2}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

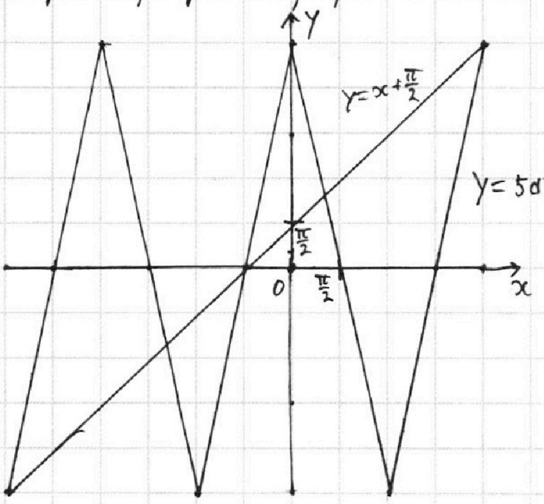
Задача №3

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

Заметим, что $\arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 5\arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow x \in [-3\pi; 2\pi]$.

Тогда нарисуем графики обеих сторон уравнения при $x \in [-3\pi; 2\pi]$:



Из графика получаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 5x + \frac{25\pi}{2} \\ y = x + \frac{\pi}{2} \\ x \in [-3\pi; -2\pi] \end{cases} \\ \begin{cases} y = -5x - \frac{15\pi}{2} \\ y = x + \frac{\pi}{2} \\ x \in [-2\pi; -\pi] \end{cases} \\ \begin{cases} y = 5x + \frac{5\pi}{2} \\ y = x + \frac{\pi}{2} \\ x \in [-\pi; 0] \end{cases} \\ \begin{cases} y = -5x + \frac{5\pi}{2} \\ y = x + \frac{\pi}{2} \\ x \in [0; \pi] \end{cases} \\ \begin{cases} y = 5x - \frac{15\pi}{2} \\ y = x + \frac{\pi}{2} \\ x \in [\pi; 2\pi] \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3\pi \\ x = -\frac{4\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} \\ x = 2\pi \end{array}\right.$$

— итоговый ответ.

Ответ: $-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$

Задача №4.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \\ (x-6)^2+y^2=2^2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Заметим, что 1ое ур-ние полученной системы задаёт прямую с направляющим вектором $\vec{n}(a;2)$, которую назовём l, 2ое ур-ние задаёт окружность с центром в $A(0;0)$ и радиусом 3, и 3ье ур-ние задаёт окружность с центром в $B(6;0)$ и радиусом 2.

Таким образом, чтобы исх. система имела ровно 4 решения необходимо, чтобы прямая l дважды пересекалась с каждой окружностью. Это возможно если $\begin{cases} \rho(l;A)<3 \\ \rho(l;B)<2 \end{cases}$ — обозначение расстояния от точки до прямой.

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{|a\cdot 0+2\cdot 0-3b|}{\sqrt{a^2+4}}<3 \\ \dfrac{|a\cdot 6+2\cdot 0-3b|}{\sqrt{a^2+4}}<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b|<\sqrt{a^2+4} \\ |b-2a|<\frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{a^2+4}<b<\sqrt{a^2+4} \\ 2a-\frac{2}{3}\sqrt{a^2+4}<b<2a+\frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} \end{cases}$$

Чтобы найти все подходящие значения a найдём сначала мн-во C таких значений a, что для каждого из них не нашлось подошедшего значения b. Для всех таких a

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{a^2+4} \le 2a-\frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} \\ 2a+\frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} \le -\sqrt{a^2+4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \ge \frac{10}{\sqrt{11}} \\ a \le -\frac{10}{\sqrt{11}} \end{array}\right. \Rightarrow C \in \left(-\infty; \frac{-10}{\sqrt{11}}\right] \cup \left[\frac{10}{\sqrt{11}};+\infty\right)$$

Значит мн-во всех подходящих под условие значений a — это мн-во $\mathbb{R}\setminus C = \left(\frac{-10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

Ответ: $a \in \left(\frac{-10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №5

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \Leftrightarrow \log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\log_3 x} - 8.$

$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2} 3^{11} - 8 \Leftrightarrow \log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} = \frac{11}{2}\cdot\frac{1}{\log_3(5y)} - 8.$

Тогда проведём замену $a = \log_3 x$ и $b = \log_3(5y)$. Тогда

$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^5 + 16a + 7 = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^5 + 16b - 7 = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$, следовательно,

$\begin{cases} a^5 + 8a + b^5 + 8b = 0 \\ a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^5 + 8a = -(b^5 + 8b) \\ a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ Далее, рассмотрим функцию $f(x) = x^5 + 8x$. У неё $f'(x) = 5x^4 + 8 > 0$ для любого x,

значит $f(x)$ ~~монотонно~~ ~~возра~~ ~~возр~~ возрастает на $\mathbb{R}$,

и при этом $f(-x) = (-x)^5 - x = -f(x)$. Заметим что

$\begin{cases} f(a) = -f(b) \\ a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) = f(-b) \\ a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ и т.к. $f(x)$ ~~монотонно~~ возрастает на $\mathbb{R}$, то $\begin{cases} a = -b \\ a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \log_3(x) + \log_3(5y) = 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5xy = 1 \\ x \neq 1 \\ y \neq 1 \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}.$

~~Отв~~

Ответ: $xy = \frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №6

Заметим, что всего в параллелограмме $43 \cdot 21 = 903$ точки с целыми координатами.

Рассмотрим сначала пары, в которых $y_1 = y_2$. Тогда $3x_2 - 3x_1 = 33 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_2 - x_1 = 11$. Значит таких ~~точек~~ пар при одном $y_1 = y_2 = k$ – 11 штук, и всего таких пар $11 \cdot 43 = 473$.

Аналогично, пар, в которых $x_1 = x_2$ имеется $10 \cdot 21 = 231$, т.к. тогда $y_2 - y_1 = 33$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a = \cancel{2}$

$a+b = 9k$

$b+c = 14k$

$a+c = 19k$

$ab = 2^{9}\, 3^{10}\, 5^{10}\, x$

$bc = 2^{14}\, 3^{13}\, 5^{13}\, y$

$ac = 2^{19}\, 3^{18}\, 5^{30}\, z$

$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{42} \cdot 3^{41}\, 5^{53}\, xyz = (abc)^2$

$2^{27} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

$4\cdot 5 + 2\cdot 4 + 6 =$
$= 34$

$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2} : \frac{7}{a} - 8$

$\frac{2a^5}{2a} + \frac{12}{2a} = \frac{5}{2a} - \frac{16a}{2a}$ $\frac{2a^5 + 12 - 5 + 16a}{2a} = 0$

$\frac{2a^5 - 16a + 17}{2a} = 0$

$\begin{cases} 2a^5 + 16a + 7 = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8$

$\frac{2b^5}{2b} + \frac{4}{2b} = \frac{11}{2b} - \frac{16b}{2b}$

$\begin{cases} 2b^5 + 16b - 7 = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

$(2a^5 + 2b^5) + (16a + 16b) = 0$

$(a^5 + b^5) + 8(a+b) = 0$

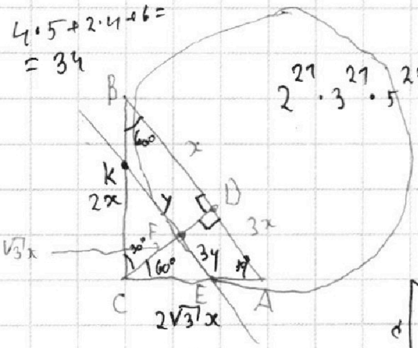
$\bar{n} = \{a; 2\}$ $|\bar{n}| = \sqrt{a^2+4}$

$l: ax + 2y - 3b = 0$ $|b| < \sqrt{a^2+4}$

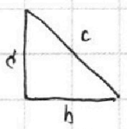
$\rho(l, A) < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|3b|}{\sqrt{a^2+4}} < 3 \\ \frac{|6a - 3b|}{\sqrt{a^2+4}} < 2 \end{cases}$

$\rho(l, B) < 2$

$|2a - b| < \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4}$



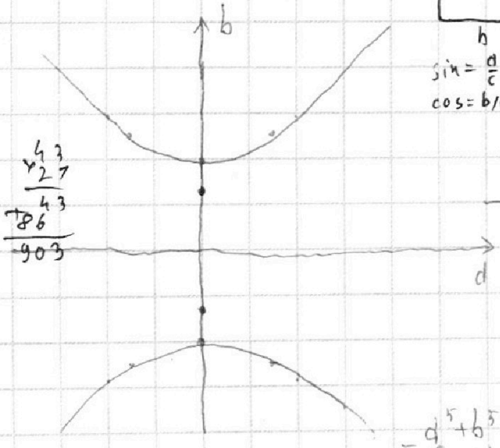
$\frac{1}{2} \cdot 4x \cdot \sqrt{3}x =$
$= 2\sqrt{3}x$



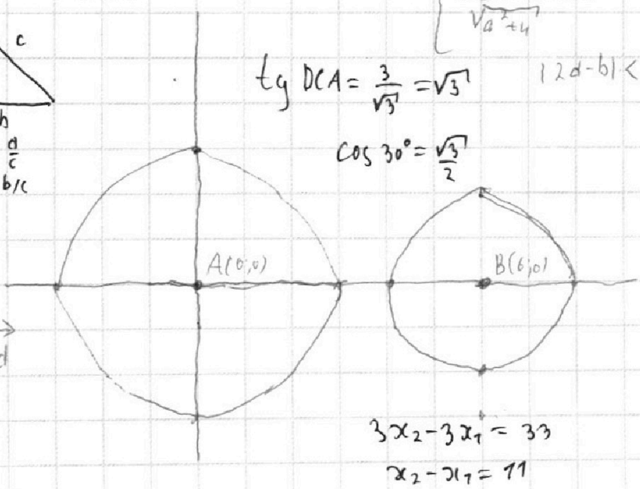
$\sin = \frac{a}{c}$
$\cos = b/c$

$tg\, DCA = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\times \frac{43}{21}$
43
86
903



$3x_2 - 3x_1 = 33$

$x_2 - x_1 = 11$

$|2 - b| < \frac{2\sqrt{5}}{3}$

$|b - 2| < \frac{2\sqrt{5}}{3}$

$\frac{2\sqrt{5}}{3} - 2 < b < \frac{2\sqrt{5}}{3} + 2$

$-\sqrt{a^2+4} < b < \sqrt{a^2+4}$

$-\frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} + 2a < b < \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} + 2a$

$$\begin{array}{l|l} a^5 + b^5 & a+b \\ \underline{a^5 + a^4 b} & a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4 + 8 = 0 \\ -a^4 b + b^5 & \\ \underline{-a^4 b - a^3 b^2} & \\ a^3 b^2 & \end{array}$$

$\sqrt{11} \approx \sqrt{9+2} \approx$

$\approx 3 + \frac{2}{2\sqrt{9}}$

$3{,}33$

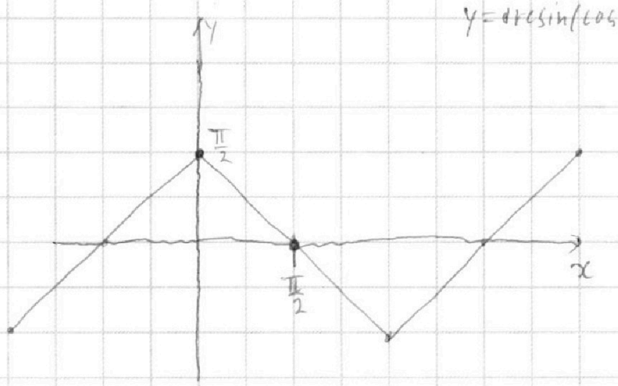
$(a+b)(-8) + 8(a+b)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$y = \arcsin(\cos x)$

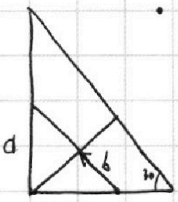


$a + b =$

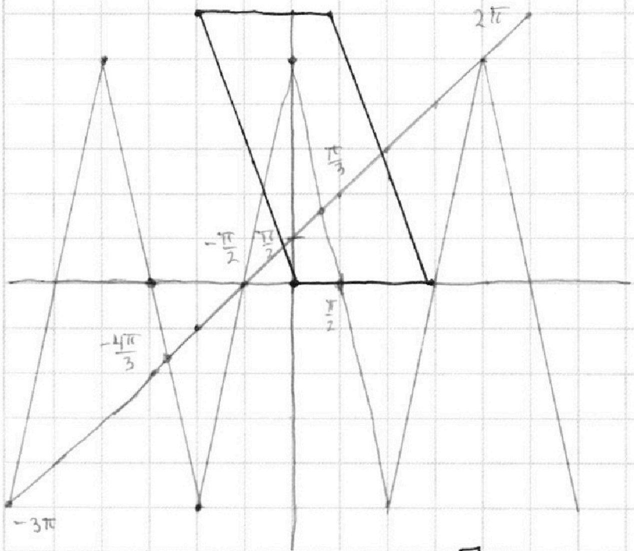
$2a^5 + 16a + 7 = 0$

$2b^5 + 16b - 7 = 0$

$(r; 2a)$



$2\sqrt{3}x \cdot a \cdot \sin 30°$



$y = -5x + \frac{5\pi}{2}$

$x + \frac{\pi}{2} = -5x + \frac{5\pi}{2}$

$6x = 2\pi$

$x = \frac{\pi}{3}$

$(x - r)^2 + (y - 2a)^2 = r^2$

$y = \sqrt{3}x$

$y = -5x - \frac{15\pi}{2}$

$-5x - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}$

$3ax \cdot tg\, 30° = \sqrt{3}ax$

$-8\pi = 6x$

$x = -\frac{4\pi}{3}$

$y = 0$

$x^2 - 2xr + \ldots + 4a^2 = \ldots$

$y = \sqrt{3}x$

$3x_2 - 15 + y - 5 = 33$

$x_1 = 5$

$y_1 = 5$

$3x_2 + y_2 - 53 = 0$

$D = 4r^2 - 16a^2 =$

$= 2\sqrt{r^2 - 4a^2}$

$x = \frac{2r \pm 2\sqrt{r^2 - 4r^2}}{2} = r - \sqrt{r^2 - 4}$

$y = 0$

$x^2 - 2xr + \ldots +$

$+ 3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = \ldots$

$4x^2$

$\frac{5}{3}\sqrt{a^2 + 4} \leq 2a$

$\frac{25}{9}(a^2 + 4) \leq 4a^2$

$\frac{100}{9} \leq \frac{36a^2 - 25a^2}{9}$

$100 \leq 11a^2$

$a \leq -\frac{10}{\sqrt{11}}$ $\quad$ $\frac{10}{\sqrt{11}} \leq a$

$\frac{5}{3}\sqrt{a^2 + 4} \leq -2a$

$\frac{25}{9}(a^2 + 4) \leq 4a^2$

$\frac{100}{11} + 4 = \frac{144}{11}$

$\frac{12}{\sqrt{11}} \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{\sqrt{11}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{d^2}{3} - \frac{2d}{\sqrt{3}}\cdot r + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2+12}{3} = \frac{2dr}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow r = \frac{d^2+12}{2\sqrt{3}d}$

$\left(\frac{d}{\sqrt{3}} - r\right)^2 + (0-2)^2 = r^2$

$\left(\frac{d}{2\sqrt{3}} - r\right)^2 + \left(\frac{d}{2} - 2\right)^2 = r^2$

$\frac{d^2}{12} - \frac{d}{\sqrt{3}}\cdot r + \frac{d^2}{4} - 2d + 4 = 0$

$\frac{d^2}{12} - \frac{d}{\sqrt{3}}\cdot r + \frac{d^2}{4} - 2d + 4 = 0$

$\frac{d^2}{12} - \frac{(d^2+12)}{6} + \frac{d^2}{4} - 2d + 4 = 0$

$\frac{d^2}{12} - \frac{d}{\sqrt{3}}\cdot\frac{d^2+12}{\cancel{2\sqrt{3}d}\,6} + \frac{d^2}{4} - 2d + 4 = 0$

$\frac{d^2}{12} - \frac{2d^2+24}{12} + \frac{3d^2}{12} - \frac{24d}{12} + \frac{48}{12} = 0$

$\frac{2d^2-24d-24}{12} = 0$

$y = -$

$b\cdot tg\,30° = d\sqrt{3}\,x$

$(4dx-b)\,tg\,60° = d\sqrt{3}\,x$

$\frac{d^2}{12} - \frac{2d^2+24}{12} + \frac{3d^2}{12} - \frac{24d}{12} + \frac{48}{12} = 0$

$\frac{2d^2-24d+24}{12} = 0$

$d^2 - 12d + 12 = 0$

$D = \cancel{144 - 4\cdot 12} = 96 = 6\cdot 16$

$d = \frac{12 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 6 \pm 2\sqrt{6}$

$(d^5+d) = -(b^5+b)$

$f(x) = x^5 + x$

$f'(x) = 5x^4 + 1$

$f(d) = -f(b) \Leftrightarrow d = -b$

$(6-2\sqrt{6})^2 = 36 + 24 - 24\sqrt{6} + 12 = 72 - 24\sqrt{6} = 24(3-\sqrt{6})$

$2\sqrt{3}(6-2\sqrt{6}) = \frac{24(3-\sqrt{6})}{12\sqrt{3} - 12\sqrt{2}} = \frac{6-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

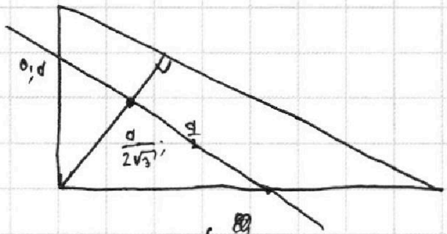
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases}(x-r)^2+(y-2)^2=r^2\\ y=\sqrt{3}x\end{cases}$$



$x^2-2xr+\cancel{r^2}+3x^2-4\sqrt{3}x+4=\cancel{r^2}$

$4x^2-(2r+4\sqrt{3})x+4=0$

$\left(\frac{d}{\sqrt{3}};0\right)$ $y=-\sqrt{3}x+d$

$D=(2r+4\sqrt{3})^2-64=4r^2+16\sqrt{3}r-16$

$y=\sqrt{3}x$

$y=-\sqrt{3}x+d$

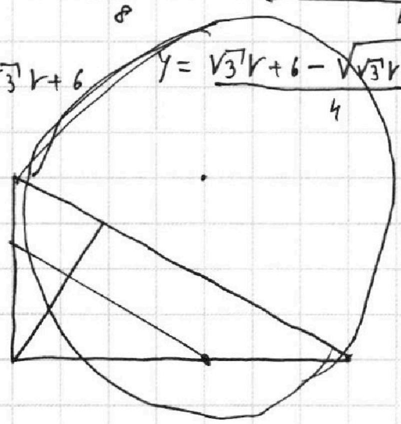
$x=\dfrac{2r+4\sqrt{3}\pm\sqrt{D}}{8}=\dfrac{r+2\sqrt{3}\pm\sqrt{r^2+4\sqrt{3}r-4}}{4}$

$\sqrt{3}r+6$ $\quad y=\dfrac{\sqrt{3}r+6-\sqrt{3r^2+12r-4\sqrt{3}}}{4}$

$2\sqrt{3}x=d$

$x=\dfrac{d}{2\sqrt{3}}$

$\sqrt{3}\approx\sqrt{4-1}\approx$



$x=r-\sqrt{r^2-4}$

$y=0$

$(-2\sqrt{3};2)t+(r-\sqrt{r^2-4};0)=$

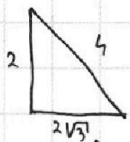
$=$

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$

$2t=\sqrt{3}\left(-6t+r-\sqrt{r^2-4}\right)$

$y=\sqrt{3}x$

$2t=-6t+r-\sqrt{r^2-4}$



$t=\dfrac{r-\sqrt{r^2-4}}{8}$

$x^2-4x+4+3x^2-4\sqrt{3}x=0$

$4x^2-(4+4\sqrt{3})x+4=0$

$-2\sqrt{3}x+2y+b=0$

$D=(4+4\sqrt{3})^2-64=$

$=16+48-64+32\sqrt{3}=32\sqrt{3}$

$(2;0)$

$-2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}=$

$=-12$

$b=-4$

$x=\dfrac{4+4\sqrt{3}-\sqrt{32\sqrt{3}}}{8}$

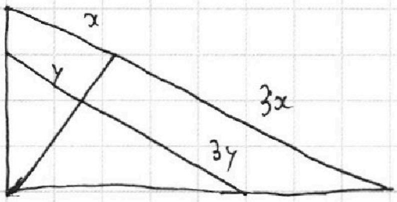
$(-2\sqrt{3};2)$

$2\sqrt{3};-2$

$-2\sqrt{3}x+2y+b=0$

$-2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}x-2y$



$y=-\sqrt{3}x+2$

$y=-\sqrt{3}x+d,\ d\in[0;2]$

$x=$