



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } a = 2^{l_a} \cdot 3^{\beta_a} \cdot 5^{\gamma_a} \cdot k_a$$
$$b = 2^{l_b} \cdot 3^{\beta_b} \cdot 5^{\gamma_b} \cdot k_b$$
$$c = 2^{l_c} \cdot 3^{\beta_c} \cdot 5^{\gamma_c} \cdot k_c$$

где $l_a, \beta_a, \gamma_a, k_a, l_b, \beta_b, \gamma_b, k_b, l_c, \beta_c,$
 γ_c, k_c - ~~натуральные~~ целые неотриц. числа

~~Заметим, что k_a, k_b и k_c не равны
нулю, т.к.~~

и k_a, k_b, k_c не кратны 2, 3 и 5

т.к. $a, b \leq c$ натуральные числа,
то $k_a, k_b < k_c$ не равны нулю

Тогда из условия следует, что:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} l_a + l_b \geq 7 \\ l_b + l_c \geq 13 \\ l_c + l_a \geq 14 \end{array} \right. \Rightarrow l_a + l_b + l_c \geq \frac{7+13+14}{2} = 17$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \beta_a + \beta_b \geq 11 \\ \beta_b + \beta_c \geq 15 \\ \beta_c + \beta_a \geq 17 \end{array} \right. \Rightarrow \beta_a + \beta_b + \beta_c \geq \frac{11+15+17}{2} = 22$$

т.к. $\beta_a, \beta_b, \beta_c$ - целые, то

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \begin{cases} \gamma_a + \gamma_b \geq 14 \\ \gamma_b + \gamma_c \geq 12 \Rightarrow \gamma_a + \gamma_b + \gamma_c \geq \gamma_a + \gamma_c \geq 43 \\ \gamma_c + \gamma_d \geq 43 \end{cases}$$

В 1) равенство достигается при $\gamma_a = 4$,

$$\gamma_b = 3, \gamma_c = 10$$

В 3) равенство достигается, например, при
 $\gamma_a = 20, \gamma_c = 23, \gamma_b = 0$

В 2) равенство достигается, например, при

~~$$\beta_a = 7, \beta_b = 5, \beta_c = 10$$~~

Тогда $abc = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot 2^{\frac{\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c}{2}} \cdot 3^{\frac{\beta_a + \beta_b + \beta_c}{2}}$.

$$\cdot 5^{\frac{\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c}{2}} \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^{20}$

$$b = 2^3 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{23}$$

Ответ: $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

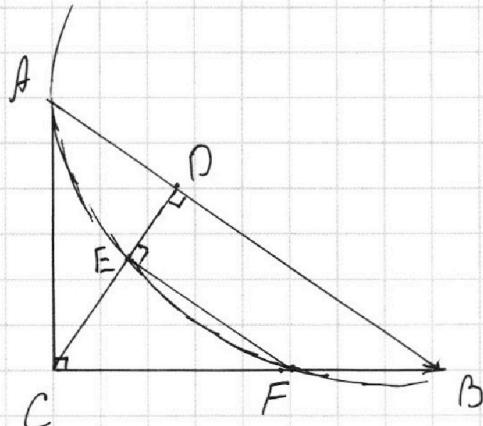
4

5

6

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Рисунок } S_{ABC} = a$$

$$S_{CEF} = b$$

$$S_{ACD} = c, \quad S_{CBD} = d$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,3 \Rightarrow BD = \frac{AB}{1,3} \Rightarrow AD = AB - BD = 0,3 \frac{AB}{1,3}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{AD}{AB} = \frac{0,3}{1,3} \Rightarrow c = \frac{0,3}{1,3} a$$

$$\frac{d}{a} = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{1,3} \Rightarrow d = \frac{1}{1,3} a$$

$$\text{Т.к. } EF \parallel AB, \text{ то } \frac{b}{d} = \left(\frac{CE}{CD} \right)^2 \Rightarrow b = \frac{a}{1,3} \cdot \left(\frac{CE}{CD} \right)^2$$

\Downarrow

$$\triangle CEF \sim \triangle CBD$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [0; 5\pi]$$

$$x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{2} \right]$$

$$\text{При } x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \dots \right)$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$\text{При } x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right]$$

$$5 \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = 5 \arccos(\cos(x + \frac{3\pi}{2})) = \\ = 5(x + \frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x = -\frac{3\pi}{2}$$

$$\text{При } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$$

$$2 \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = 5 \left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) \right) = \\ = 5 \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \cancel{\frac{5\pi}{2} + 5x = \cancel{\frac{3\pi}{2}} + x} \\ & \cancel{\frac{5\pi}{2} - 5x} \\ & \cancel{x - \frac{5\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 5\arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 5\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \\ & 5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{5\pi}{2} - 5x \end{aligned}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x \quad 6x = \frac{5\pi}{2} \quad x = \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{Решение } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$5\arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 5x - \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x \quad 4x = \frac{4\pi}{2} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Решение } x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} & 5\arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 5\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \\ & 5\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{25\pi}{2} - 5x \\ & \frac{25\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6x = 22\pi + 11\pi$$

$\frac{2}{2}$

$$x = \frac{11\pi}{6}$$

$$\text{Решение } x \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right]$$

$$5\arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = 5\arccos(\cos(x - \frac{5\pi}{2})) =$$

$$= 5x - \frac{25\pi}{2}$$

$$5x - \frac{25\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x = \frac{28\pi}{2} = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{2}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \pi, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{2} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

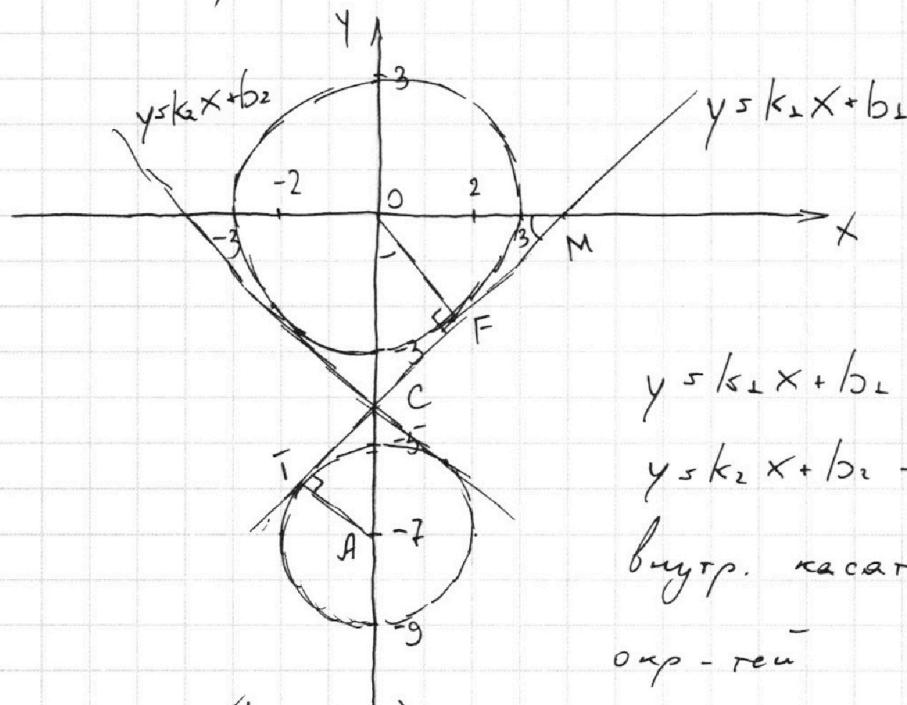
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 3ay - 7b \\ (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{array} \right.$$



При $\alpha \in (k_2; k_1)$ можно подобрать β
такое, что мы получим 4 точки пересечения.

С-точка пересечение касательных
В силу симметрии $C \in OY$ (симметрия относительно оси OY).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

осн OY)

A - центр окр-ти $(x+r)^2 + y^2 = 9$

$T \cup F$ - пересечение осн. $y = k_1 x + b_1$

с окр-тии A и O соот-но

B сим подобия $\Delta ACT \sim \Delta OCF$:

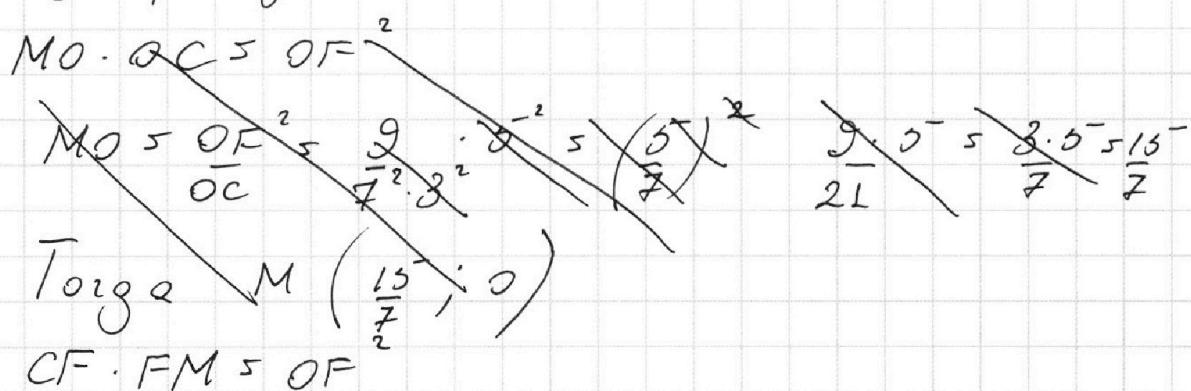
$$\frac{OC}{CA} = \frac{OF}{AT} = \frac{3}{2}$$

$$OC + CA = OA = 7 \Rightarrow OC = OA \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{5} = 4,2$$

Тогда $C(0; -4,2)$
 $b_1 = b_2 = -4,2$

M - пересечение $TF \cup OX$

Уз границ. Δ -ка MOC :



$$CF^2 = OC^2 - OF^2 \quad OM^2 = OF^2 + FM^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$OM^2 = OF^2 + \left(\frac{OF}{CF}\right)^2 = OF^2 + \left(\frac{OF}{\sqrt{OC^2 - OF^2}}\right)^2 = 9 + \left(\frac{9}{\sqrt{\frac{21^2 - 9^2}{5}}}\right)^2$$

$$= 9 + \left(\frac{9 \cdot 5}{\sqrt{21^2 - 9^2}}\right)^2 = 9 + \left(\frac{9 \cdot 5}{6\sqrt{6}}\right)^2 = 9 + \frac{81 \cdot 25}{36 \cdot 6} =$$

$$= 9 + \frac{3 \cdot 25}{2^3} = 9 + \frac{8 + 3 \cdot 25}{8} = \frac{147}{8}$$

$$\star \star \star OM = \sqrt{\frac{147}{8}}$$

$$M \approx \left(\sqrt{\frac{147}{8}}, 0\right)$$

$$k_L \cdot \sqrt{\frac{147}{8}} = -b_L = 4,2 = \frac{2L}{5}$$

$$k_L = \frac{2L}{5} \cdot \sqrt{\frac{8}{147}} = \frac{2L}{5 \cdot 7} \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

В силу симметрии относ. оси ОY:

$$k_2 = -\frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$a \in \left(-\frac{\sqrt{24}}{5}, \frac{\sqrt{24}}{5}\right)$$

$$\text{Отв: } a \in \left(-\frac{\sqrt{24}}{5}, \frac{\sqrt{24}}{5}\right) \quad \left(a \in \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}, \frac{2\sqrt{6}}{5}\right)\right)$$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4 6x - 2 \log_6 x 7 = \log_{36x} 343 - 4 =$$

$$= \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\begin{cases} 6x > 0 \\ 6x \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 6x} - 4 / \log_7 6x$$

~~6x ≠ 1~~

$$\log_7^5 6x + 4 \log_7 6x - \frac{7}{2} = 0$$

$$2 \log_7^5 6x + 8 \log_7 6x - 7 = 0$$

$$\begin{aligned} \log_7^4 y + 6 \log_7 y &= \log_7 \cdot (7^3) - 4 = \\ &= \frac{5}{2} \log_7 y - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4 / 2 \log_7 y$$

$$2 \log_7^5 y + 8 \log_7 y + 7 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7 6x = t$$

$$\log_7 y = k$$

$$\begin{cases} 2t^5 + 8t - 7 = 0 \\ 2k^5 + 8k + 7 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что обе функции возрастают

↑

Имеют максимум 1 корень

т.к. в задаче сказано, что решения
бываю не может быть, то этот корень существует

$$\text{Если при } t = a : 2a^5 + 8a - 7 = 0, \text{ то}$$

$$\text{затем при } k = -a : -2a^5 - 8a + 7 =$$

$$= -(2a^5 + 8a - 7) = 0$$

$$\log_7 6x = -\log_7 y = \log_7 \frac{1}{y}$$

$$6x = \frac{1}{y} \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$OR : y \leq 0$$

$$PQ : y = 68$$

$$OP : y = -\frac{68}{17}x$$

$$QR : y = -\frac{68}{17}(x - 19)$$

Т.к. обе точки внутри параллеля:

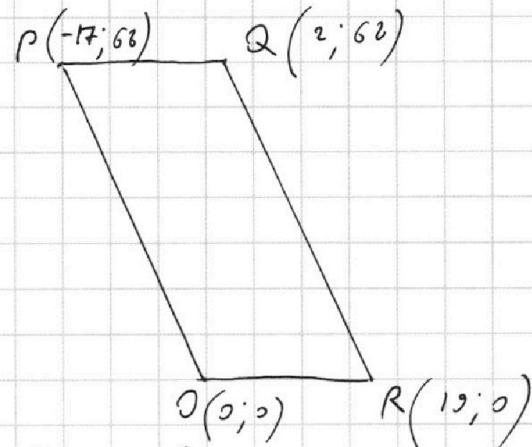
$$\begin{cases} y_1 \leq 68 \\ y_1 \leq -\frac{68}{17}(x_1 - 19) \\ y_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$y_1 \geq -\frac{68}{17}x_1$$

$$\begin{cases} y_2 \leq 68 \\ y_2 \leq -\frac{68}{17}(x_2 - 19) \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$y_2 \geq -\frac{68}{17}x_2$$

$$y_2 - y_1 \geq -\frac{68}{17}x_2 - \left(-\frac{68}{17}(x_1 - 19)\right) \Leftrightarrow -\frac{68}{17}(x_2 - x_1) \geq -\frac{68}{17} \cdot 19$$
$$y_2 - y_1 \geq -68$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y_2 - y_{\perp, \leq} = -\frac{68}{17} (x_2 - 19) + \frac{68}{17} x_{\perp} \leq -\frac{68}{17} (x_2 - x_{\perp}) +$$
$$+ \frac{68}{17} \cdot 19$$

$$y_2 - y_{\perp, \leq} \leq 68$$

$$4x_2 - 4x_{\perp} + y_2 - y_{\perp} \leq$$



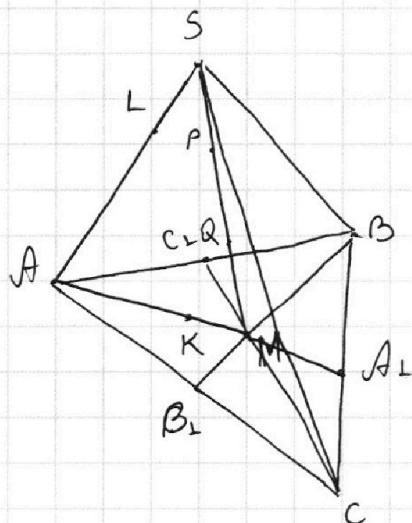
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим плоскость ASM и сечение шара - окр-гб $PQKL$

$AL \perp AK$, так как \perp касательные

$$\begin{aligned} P \quad MQ \cdot MP &= MK^2 \\ SP \cdot SQ &= SL^2 \end{aligned}$$

$$MP = MQ + PQ$$

$$SQ = SP + PQ$$

$$SP = MQ \text{, т.к.}$$

$$MK^2 = MQ (MQ + PQ)'' = SP (SP + PQ) = SL^2$$

$$MK = SL$$

$$MA = SA = 10$$

Рассмотрим $\triangle ABC$:



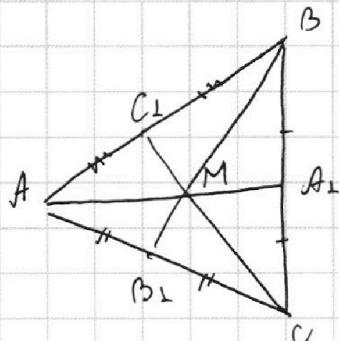
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$MA_1 = \frac{AM}{2} = 5$$

$$AA_1 = MA_1 + AM = 15$$

$$BA_1 = AL = 5$$

$\angle BAC = \angle ALC = 5^\circ$

и потому что, т.е. $\angle BMC = 90^\circ$

$$\angle C_1MB_1 = \angle C_1MB = \angle CMB_1 = 90^\circ$$

$$BM = \frac{2}{3} BB_1 \quad CM = \frac{2}{3} CC_1$$

$$BM \cdot CM = 2 S_{BMC}$$

$$S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = 20 \left(S_{BMC} = \frac{S_{ABC} \cdot MA_1}{AM} = \frac{S_{ABC}}{3} \right)$$

$$\Rightarrow BM \cdot CM = 40$$

$$BB_1 \cdot CC_1 \cdot AA_1 = 15 \cdot 40 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= 15 \cdot 40 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 10 \cdot 10 \cdot 9 = 900$$

a) Other: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 1350$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle C - \angle \beta = 7$$

$$\sin x = \cos \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\angle C + \angle \beta = x + 13$$

$$-2\pi; -\pi; 2\pi$$

$$2\angle C = 20$$

$$\angle C = 10$$

$$\angle \beta = 3$$

$$\angle a = 4$$

$$AC^2 = CF \cdot CB$$

$$\beta_c - \beta_b = 6$$

$$8\alpha^2 \beta < 90$$

$$\beta_c + \beta_b = 15^\circ$$

$$CD^2 = AC \cdot CB$$

$$\cos \cos + \sin \sin$$

$$\sqrt{\alpha \cos(\cos \frac{\pi}{2} - x)} =$$
$$\sqrt{\beta, -\frac{\pi}{2} + x}$$
$$\frac{\pi}{2} + x$$

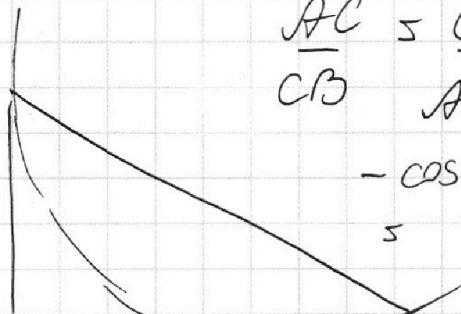
$$CF \cdot FB$$

$$\left(\frac{CE}{AD}\right)^2$$

рас

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CF}{AC}$$

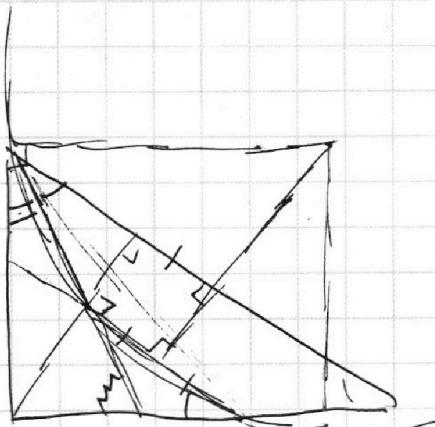
$$-\cos x =$$



$$\frac{CF}{AD} = \frac{CE}{CD}$$

$$0,3$$

$$0,3 \cdot \frac{AD}{CD} =$$



$$CF$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5 \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$
$$5 \cdot \frac{3\pi}{4} =$$
$$5 \cdot \frac{7\pi}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

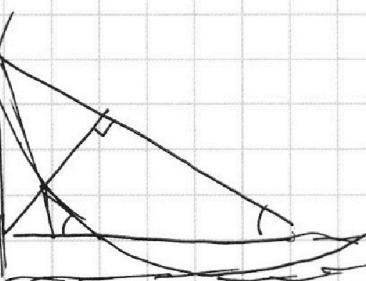


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$BM \perp M$$

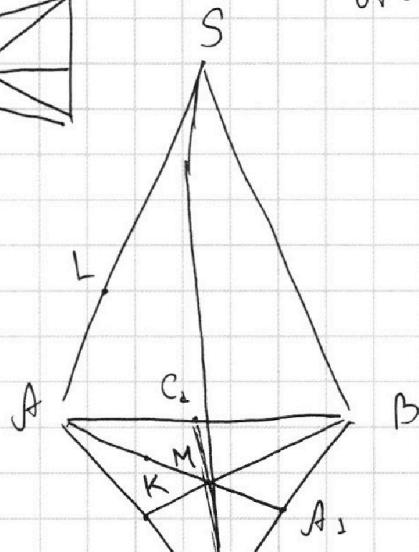
$$BM \cdot CM \cdot 1,5^2 \cdot AA_1$$

$$AA_1 = 15$$



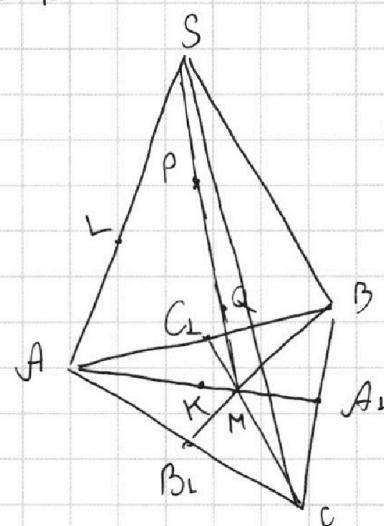
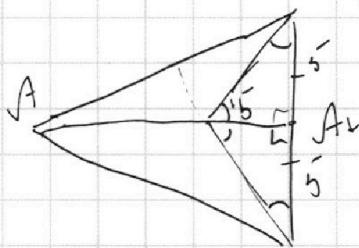
$$AK \leq AL$$

$$\begin{array}{r} \times 15 \\ 1350 \end{array}$$

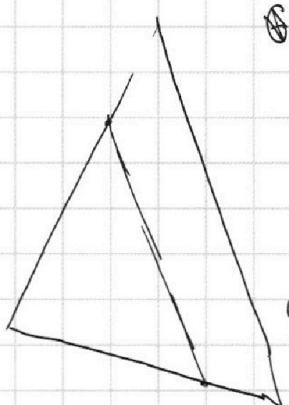


$$\begin{aligned} S_{ABC} &= 60 \\ SA &\leq BC \leq 10 \\ AL &\leq AK \end{aligned}$$

$$SP \leq MQ$$



$$\otimes 45$$



$$R$$

$$MK^2 \leq SL^2$$

$$MK \leq SL$$

$$AM \leq SA \leq BC$$

$$R \sqrt{A}$$

$$\begin{array}{l} 1,5^2 \\ R - X \end{array} \leq \begin{array}{l} 0,5^2 \\ R - X \end{array}$$



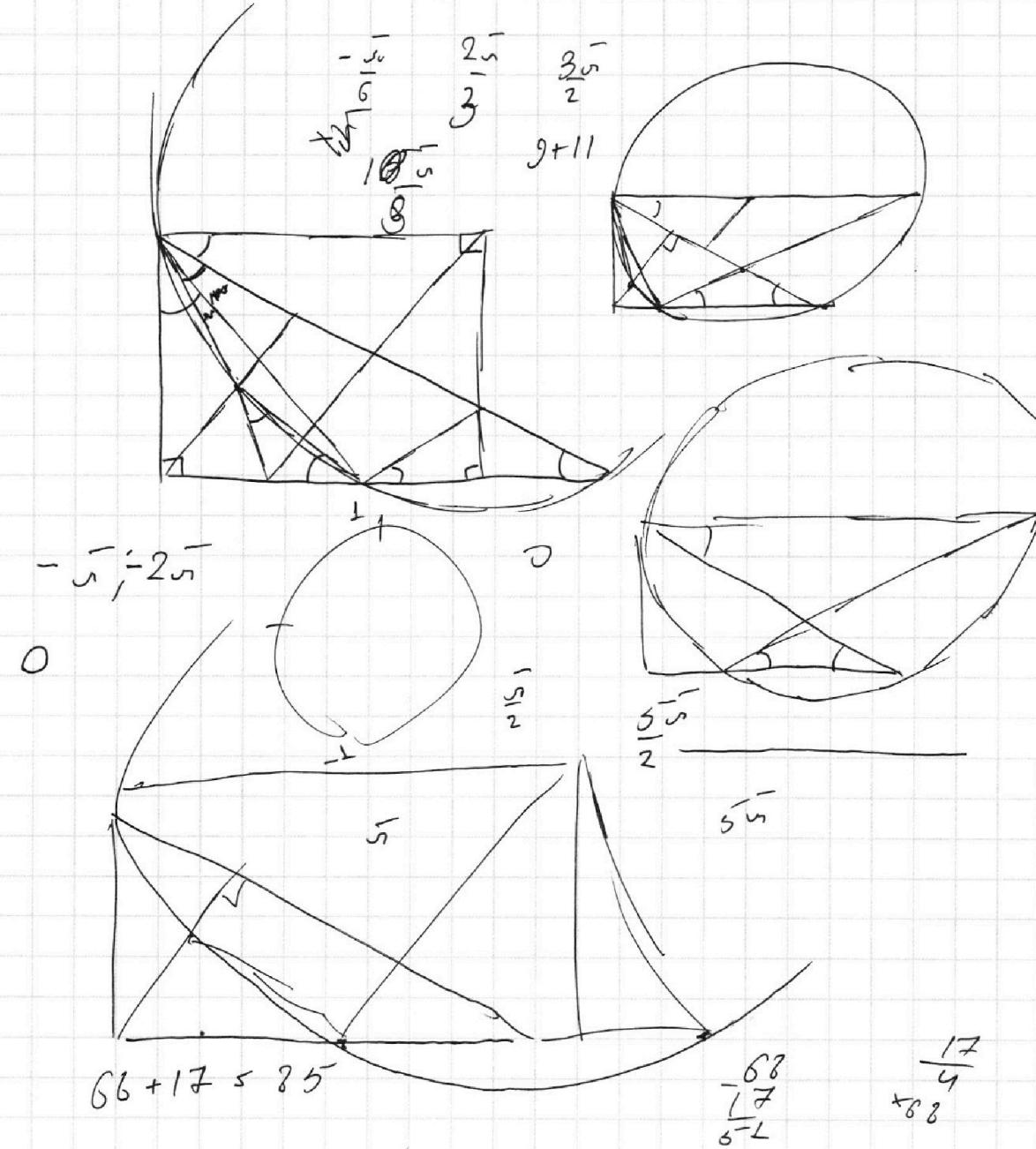
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 & Y_2 - Y_L \geq (R - x)(R + x) \leq \\
 & \geq R^2 - x^2 = AC^2 \\
 & R - x \leq \frac{AC}{R+x}
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Л МФТИ

5

$$\arccos \left(\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) =$$

$$\arccos \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$-\sqrt{9 - x_0^2} + \frac{x_0}{\sqrt{9 - x_0^2}} \left(x^0 - x_0 \right) \quad 9 - \frac{81 \cdot 5^2}{21^2}$$

$$-\frac{(9 - x_0^2)}{\sqrt{9 - x_0^2}} - x_0^2 = -4,2$$

$$= 9 \cdot \frac{(21 - 15)(21 + 15)}{21^2}$$

$$81 = 9 \cdot \frac{6 \cdot 36}{21^2}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{9}{4,2} = \sqrt{9 - x_0^2}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 4' \\ \hline 16 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 6 \\ 4 \\ \hline 1764 \end{array} \quad x_0 = \pm \frac{6\sqrt{6}}{7}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} \quad x_0^2 = 9 - \left(\frac{9}{4,2} \right)^2 = 9 - \frac{81}{1764}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} \quad \frac{5\sqrt{3}}{3} \quad \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{6} = \frac{10\sqrt{3}}{6}$$

$$\begin{array}{r} 8100 \\ 7056 \\ \hline 10440 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1764 \\ 4 \\ \hline 7056 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1764 \\ 2 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15676 \\ -2240 \\ \hline 1764 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1764 \\ 5 \\ \hline 8820 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4760 \\ -3528 \\ \hline 12320 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17640 \\ 1764 \\ \hline 15876 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$\left(\frac{1}{\log_{6x} 7}\right)^4 - 2\log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 343 - 4$$

$$\begin{array}{r} 7^3 \\ \times \frac{49}{7} \\ \hline 343 \end{array}$$

$$\begin{cases} 6x > 0 \\ 6x \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_{6x} 7 = t$$

$$t = 6x$$

$$\frac{1}{t^4} - 2t = \frac{3}{2}t - 4$$

$$\begin{array}{l} t = 8 \\ t = 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} * \\ -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} k \\ -7+8-2 \end{array}$$

$$t^5 - 8t^4 - 2 = 0 \quad t = -k$$

$$\begin{array}{l} \cancel{t^4(t-1)} \\ t^4 + 8 = 0 \\ t^4 = -8 \\ t = \sqrt[4]{-8} \end{array} \quad \begin{array}{l} y > 0 \\ y \neq 1 \end{array}$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_y t^5 - 4$$

$$\log_y 7 = -k \quad t = -k$$

$$2 + 12k^5 = 3k^5 - 8k^4$$

$$7k^5 + 8k^4 + 2 = 0 \approx 7(-k^5) - 8(-k^4) - 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

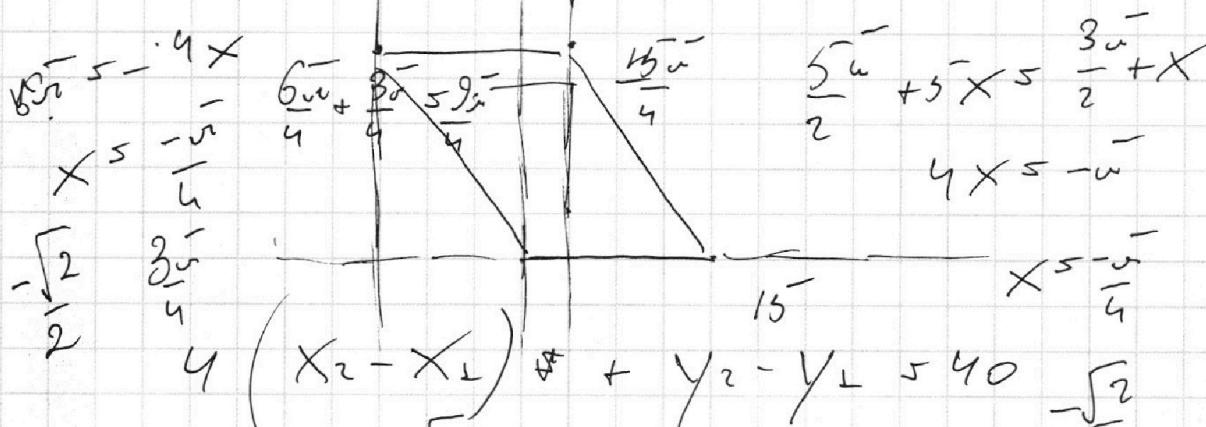
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{x} \quad xy^{kt} = \left(\frac{7}{6}\right)^k \cdot 7^t \quad 7 - 3 \cdot 5^t$$

$$21 - 15^t = 6$$

$$xy = \sqrt[kt]{\left(\frac{7}{6}\right)^k \cdot 7^t} = \sqrt[t]{\frac{7}{6}} \cdot \sqrt[k]{7} \quad 21 + 15^t = 36$$



$$y_2 \geq -\frac{68}{17}(x_2 - 17) + 68 \quad x_2 \in [-17; 19] \quad y_2 \geq 0 \quad x_2 \in [0; 36]$$

$$y_2 \leq 68 \quad y_2 \geq -\frac{68}{17}(x_2 - 36) + 68 \quad -\frac{OF}{OC} = \frac{FM}{OM}$$

$$y_L \geq -\frac{68}{17}(x_L - 17) + 68 \quad y_L \geq 0 \quad \underline{OM} = \frac{FM}{OF} \cdot OC$$

$$y_L \leq -\frac{68}{17}(x_L - 36) + 68 \cdot 2 + \frac{1}{34}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

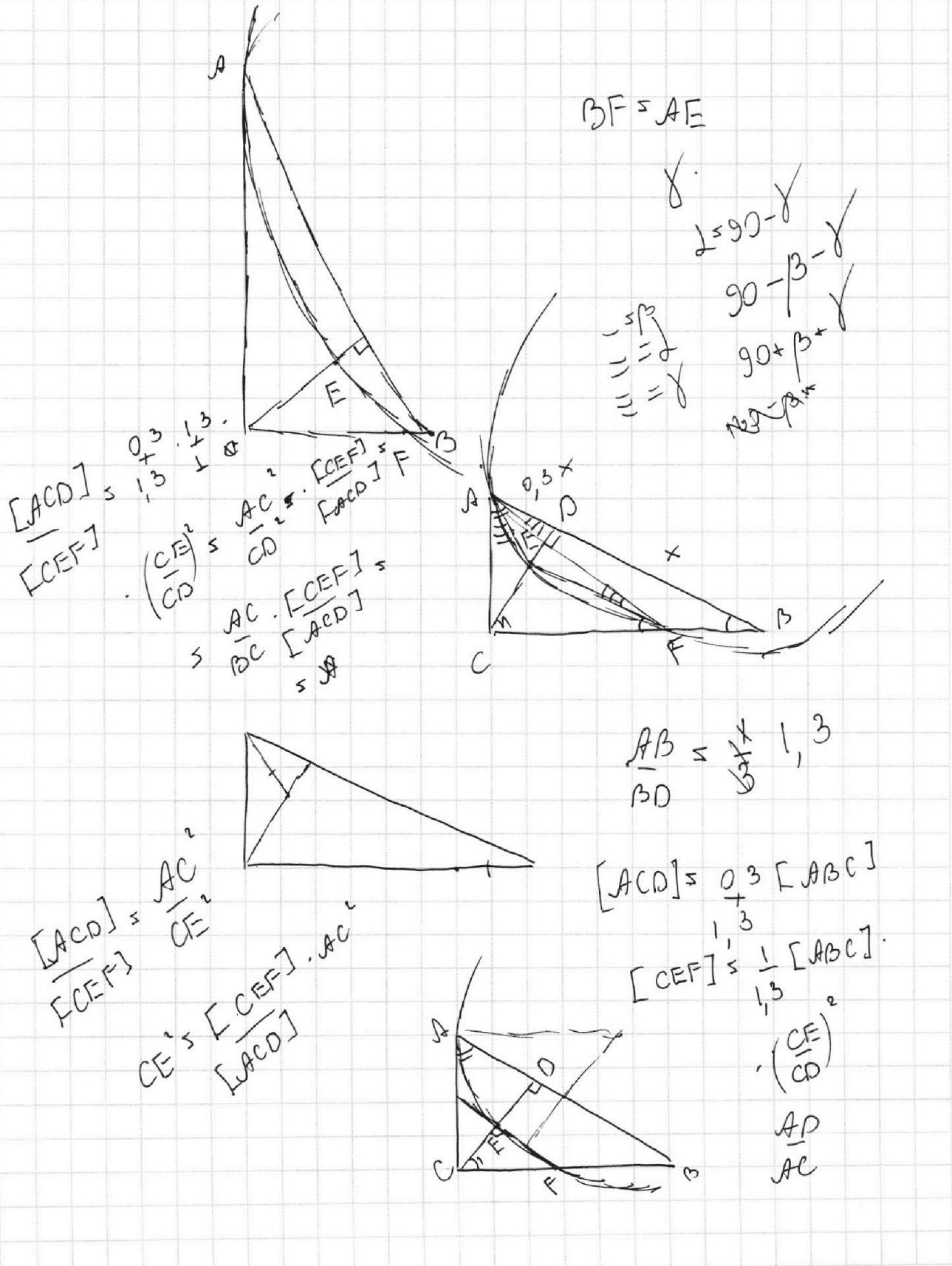
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

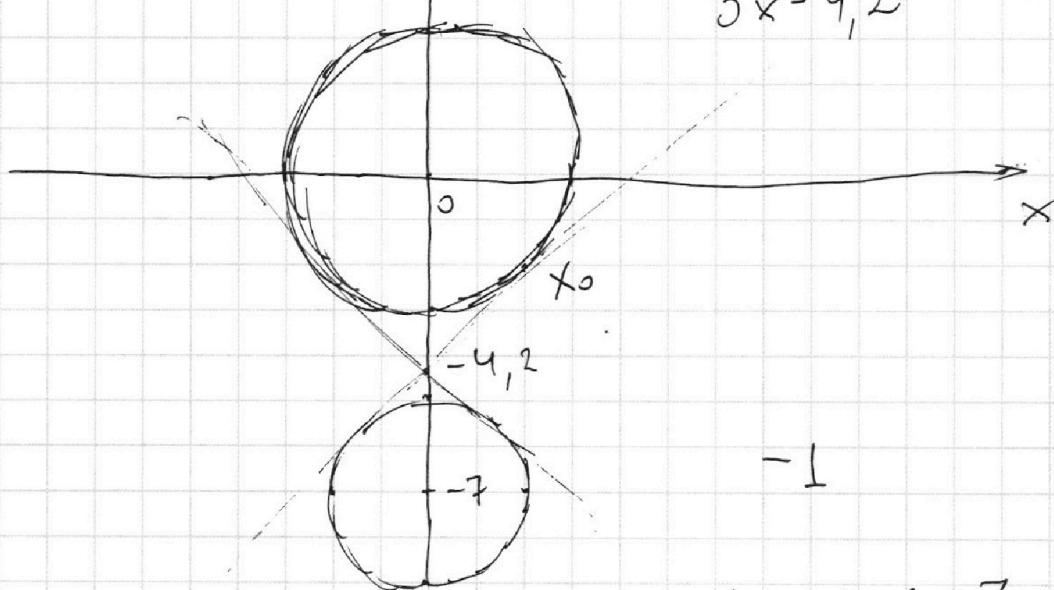
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ [x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$(x + 7)^2 + y^2 = 4$$

$$7 = 2x + 3x$$

$$x = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$3x = 4,2$$



$$1 \quad 1+6-7$$

$$y = -\sqrt{9-x^2}$$
$$f(x)' = \frac{2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{14} \quad \beta c + \beta b \geq 6+4=11$$

$$bc : \beta c - \beta b \geq 6 \quad \beta b + \beta c \geq 15 \quad \beta c \leq 11$$

$$a = 2^{2a} \cdot 3^{\beta a} \cdot 5^{-\gamma a} \cdot k_a$$

$$b = 2^{2b} \cdot 3^{\beta b} \cdot 5^{-\gamma b} \cdot k_b \quad 11$$

$$c = 2^{2c} \cdot 3^{\beta c} \cdot 5^{-\gamma c} \cdot k_c \quad 6$$

$$\lambda_a + \lambda_b \geq 7$$

$$\lambda_b + \lambda_c \geq 13$$

$$\lambda_a + \lambda_c \geq 14$$

$$\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c \geq \frac{7+13+14}{2} = 17 \quad \beta \rho \leq 11$$

$$5 \arccos(\sin x) = 3\pi + x$$

$$3\pi + x \in [0; \pi]$$

$$\sin x =$$

$$= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad x \in [-3\pi; -2\pi]$$

$$x - \frac{\pi}{2} \in [-3, 5\pi; -2, 5\pi]$$

$$[5, 6\pi] \cup [5, 2\pi]$$