



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  
~~а~~  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .  
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам  
~~х~~  $\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$ , и  $\log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5$ .

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .

7. [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .

- а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .  
б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  $ab \cdot bc \cdot ac : 2^{6+14+16} \cdot 3^{13+21+25} \cdot 5^{11+13+28}$   
но  $abc = (abc)^2 \Rightarrow (abc)^2 : 2^{36} \cdot 3^{40} \cdot 5^{52}$ , т.к. все  
простые входят в квадрат в четной степени.  
 $\Rightarrow abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$  Но же:  $5^{28} \Rightarrow abc : 5^{28}$   
 $\Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Пример:  $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$

$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$

$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$

$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

$ab : 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14} : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14} : 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{13}$

$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

приимер подходит

ответ:  $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \bar{y} &\geq \frac{a+1-y}{a} \\ x &\geq \frac{\bar{y}-\bar{y}+a+\frac{1}{a}}{2} \geq \frac{\bar{y}-\frac{a+1}{a}+\frac{y}{a}+a+\frac{1}{a}}{2} \geq \frac{(a+1)y+a^2-a}{2a} \\ x &\geq \frac{\bar{y}-\bar{y}+a+\frac{1}{a}}{2} \geq \frac{\frac{a+1}{a}\cdot y - \frac{y}{a} + a + \frac{1}{a}}{2} \geq \frac{a^2+a+2-(a+1)y}{2a} \end{aligned}$$

из равенства углов  $\beta A F$  и  $EAC$  получаем:

$$\frac{\frac{a+1}{x+1}}{\frac{y+1}{1}} \geq \frac{\frac{a+1}{x+1}}{\frac{y+1}{1}}$$

Т.к. аргументы  
верхней и нижней  
частных равны

на частное действует

$$\frac{a+1}{(x+1)(y+1)} \geq \frac{\frac{a+1}{a}}{(\bar{x}+1)(\bar{y}+1)}$$

$$a(\bar{x}\bar{y} + \bar{x} + \bar{y} + 1) \geq xy + x + y + 1$$

$$\begin{aligned} a+x-y + \frac{a^2+a+2-(a+1)y}{2a} + a + (a+1-y)\left(a^2+a+2-(a+1)y\right) &\geq \\ \geq x+y + \frac{(a+1)y+a^2-a}{2a} + y \frac{(a+1)y+a^2-a}{2a} & \end{aligned}$$

действительно

$$2(a^2 - 2ay + a^3 + a^2 + 2a - a(a+1)y + (a+1)(a^2+a+2) - y((a+1)^2 + a^2 + a))$$

$$+ y^2(a+1) \geq 2ay + (a+1)y + a^3 - a + (a+1)y^2 + y(a^2 - a)$$

$$a^3 + 5a^2 + 2a + a^3 + 2a^2 + 3a + 2 = y(2a + a^2 + a + a^2 + 2a + 1 + a^2 + a + 2) \geq$$

$$= a^2 - a + y(2a + a + 1 + a^2 - a)$$

$$2a^3 + 8a^2 + 6a + 2 \geq y(4a^2 + 8a + 4)$$

$$4y(a+1)^2 = 2(a+1)^3 \Rightarrow y = \frac{a+1}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

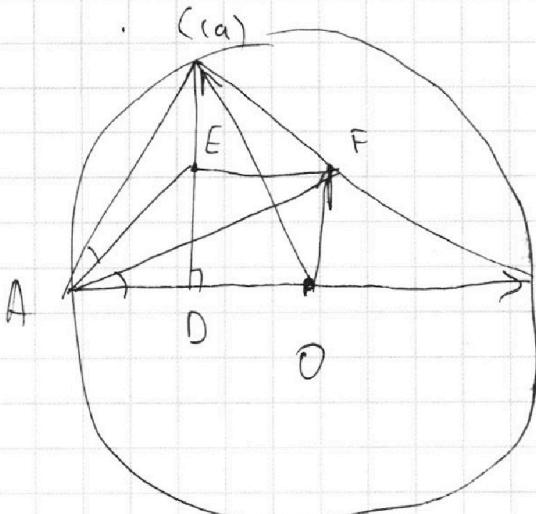
решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = \frac{a+1}{2} \geq \Rightarrow \Rightarrow \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} \geq \overrightarrow{OF} \geq$$

$$\Rightarrow F - \text{середина } BC \\ \text{но умножим } AB : BD = \frac{7}{5} \\ \Rightarrow AD = 2x, BD = 5x \\ \Rightarrow EF = \frac{1}{2}BD = 2,5x$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = x\sqrt{10}$$

$$S_{\triangle CEF} : S_{\triangle CEF} = \left(\frac{CD}{EF}\right)^2 \text{ T.k. } \angle CEF \sim \angle CDB \text{ и } \sim \triangle ADC$$

$\Rightarrow$  косв. подобие  $\triangle ADC$  и  $\triangle CEF \sim \frac{CD}{EF}$ , а  
площади относятся как квадраты косв-го подобия.

$$\left(\frac{CD}{EF}\right)^2 = \frac{10}{(2,5)^2} = \frac{10}{\frac{25}{4}} = \frac{40}{25} = \frac{8}{5}$$

$$\text{Ответ: } 8:5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

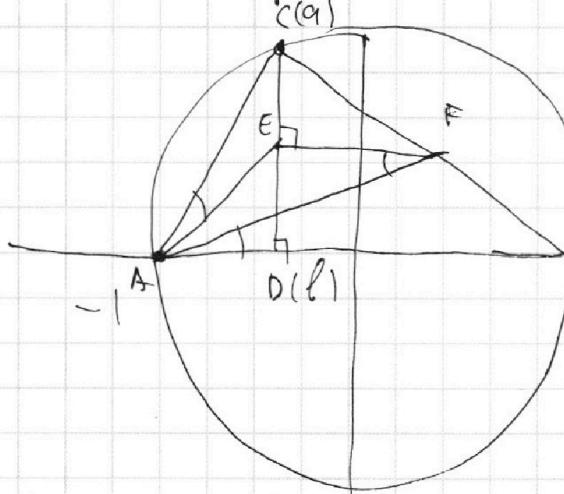


- |                               |  |                               |                               |                               |                               |                               |
|-------------------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1<br><input type="checkbox"/> | 2<br><input checked="" type="checkbox"/> | 3<br><input type="checkbox"/> | 4<br><input type="checkbox"/> | 5<br><input type="checkbox"/> | 6<br><input type="checkbox"/> | 7<br><input type="checkbox"/> |
|-------------------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Введем коорд. система координат так, чтобы  
 $AB \in Ox$        $O(0,0)$ -середина  $AB$ ,  $|AB|=2$   
 (отнош. от  $A$  к  $B$  не зависит)



Заметим, что  $\angle CAE = \angle EFA$ , так  
 между ними входит общая сторона  $AE$ ,  
 а  $\angle ACD = \angle FAB$  из  $\parallel$   
 $EF \perp AB$ .

И координаты  $C-a, D-l$

$$\frac{a-l}{1-0} = -\frac{\bar{a}-\bar{b}}{1-0} \quad \text{т.к. } CD \perp AB$$

$$b=6, \text{ т.к. } D \in Ox \Rightarrow ab = -\frac{1}{a} + b = -\frac{1}{a} + 6 \Rightarrow b = \frac{a^2+1}{2a} \quad \bar{a} = \frac{1}{a}, \text{ т.к. } (a \neq 0)$$

$$\angle E-X, F-y \text{ тогда: } \frac{x-y}{1-0} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{1-0} \quad \text{т.к. } EF \perp AB$$

$$\Rightarrow \boxed{x-y = \bar{x}-\bar{y}}$$

$$t \in CD \Rightarrow CE \perp AB \Leftrightarrow \frac{a-x}{1-0} = -\frac{(\bar{a}-x)}{1-0}$$

$$a-x = -\frac{1}{a} + \bar{x} \Rightarrow \boxed{x+\bar{x} = a+\frac{1}{a}}$$

$$F \in BC \Rightarrow BF \perp AC \Rightarrow$$

$$\frac{1-y}{a+1} = -\frac{\bar{1}-\bar{y}}{\bar{a}+\bar{1}} \Rightarrow (1-y)(a+1) = -a(a+1)(1-\bar{y})$$

$$(a+1)-y(a+1) = -a(a+1) \quad \boxed{1-y = -a+a\bar{y}}$$

$$\begin{cases} x-\bar{x} = y-\bar{y} \\ x+\bar{x} = a+\frac{1}{a} \\ 1-y = -a+a\bar{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y-\bar{y} + a+\frac{1}{a} \\ x = a+\frac{1}{a}-y+\bar{y} \\ 1-y = -a+a\bar{y} \end{cases}$$

①



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\text{Но } \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = 9\pi - 2x, & k \in \mathbb{Z} \\ 10\left(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 9\pi - 2x, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\pi - 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x \\ 10x - 5\pi + 20\pi k = 9\pi - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x = 20\pi k - 4\pi \\ 12x = 14\pi - 20\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi k}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(5k+1) \\ x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi k = \frac{\pi}{3}(7-5k) \end{cases}$$

$$\text{Общий: } \frac{\pi}{2}(5k+1); \frac{\pi}{3}(7-5k), k \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{-5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ \frac{-5}{6a} < \frac{-4\sqrt{2}}{7} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad 0 > \frac{35 + 24a\sqrt{2}}{a}$$

$$\Rightarrow a \in \left( -\frac{35\sqrt{2}}{48}, 0 \right)$$

$$\textcircled{2} \quad 0 > \frac{4a\sqrt{2} - 35}{a}$$

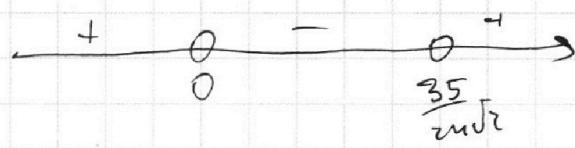
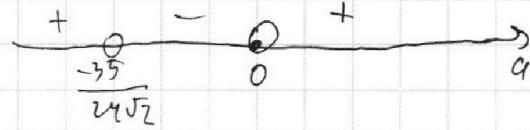
$$\Rightarrow a \in \left( 0; \frac{-35\sqrt{2}}{48} \right)$$

$$\Rightarrow a \in \left( -\frac{35\sqrt{2}}{48}; 0 \right) \cup \{0\} \cup \left( 0; \frac{-35\sqrt{2}}{48} \right)$$

$$\Rightarrow a \in \left( -\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$$

здесь включают ли также 0, ~~а~~,  $b = -\frac{45}{7} \cdot 6a$

$$\text{Ответ: } \left( -\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$$



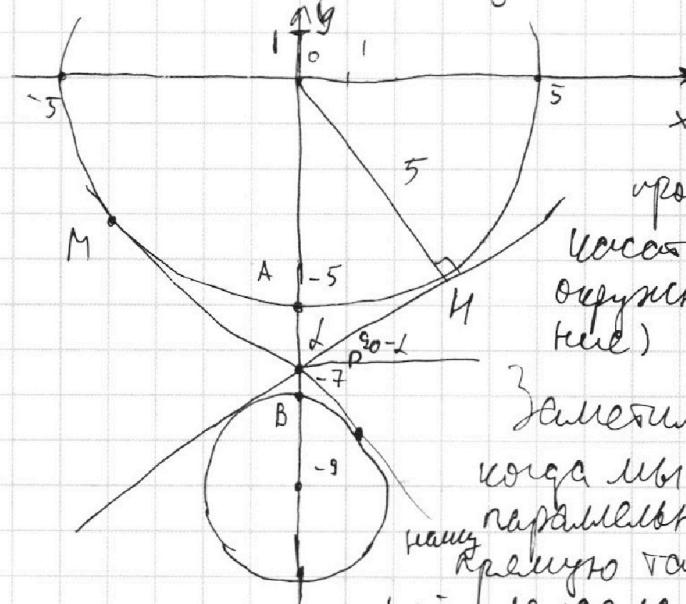
2

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

преобразуем ур-ние сис-мы:

$$\begin{cases} y \geq \frac{-5x + b}{6a}, a \neq 0 & - \text{ прямая} \\ x \geq \frac{b}{5}, a \geq 0 & - \text{ тоже прямая} \\ x^2 + y^2 \geq 5^2 & - \text{ окр-ть ц. } b(0,0) \text{ и } R=5 \\ x^2 + (y+9)^2 = 9^2 & - \text{ окр-ть ц. } b(0,-9) \text{ и } R=9 \end{cases}$$



проведём однократное  
касательные к  
окружностям (внтрн-  
тне)

Заметим, что если  
коэффициент в  
нашем параллельно перенесём  
прямую так, чтобы она  
не лежала, она не будет

лежать внутри угла РМ, то 4 решения не  
будут, т.к. она разделят 2 окр-ти  $\Rightarrow$  2 параллельные ей  
прямые  $\cap$   $\leq 1$  из них. Так же, если она совпадёт с  
касательной, коэффициент её склон  $\leq 2 \Rightarrow$  её умножит  
коэф-т надо делить, чем у РМ, что неверно, так  
как РМ. Числ. коэф  $PM = \operatorname{ctg}(20-2) = \operatorname{ctg}(2) = PM : OM$

$AP : PB = 5 : 2$ , т.к.  $\overline{AB}$  гипотенуза  $\triangle PAB$ , переводим

окр-ти окруж в группу  $\Rightarrow AP = \frac{5}{7} \cdot AB$ ,  $AB = 2 \Rightarrow AP = \frac{10}{7} \Rightarrow OP =$   
 $\sqrt{\frac{45}{7}} \Rightarrow PB = \frac{5}{7} \sqrt{81 - 49} = \frac{5\sqrt{32}}{7}$  по Пифагора  $\Rightarrow$

заметим, что при  $a \geq 0$   $b \geq 0$  - подходит, так как это равно 0

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$] a = \log_{11} x, b = \log_{11} 0.5y$$

$$a+b - ?$$

$$a^4 - \frac{6}{a} \geq \frac{-2}{3a} - 5 \quad | \text{ заменили на } a \text{ и } b, \text{ соотв. и сложили}$$

$$b^4 + \frac{1}{b} \leq \frac{-13}{3b} - 5$$

$$a^5 + b^5 + 5(ab) - 6 + \frac{2}{3} + 1 + \frac{13}{3} \geq 0$$

$$(a+b)(a^3 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + a^4 + 5) \geq 0$$

либо  $ab = 0$  - западнили

либо  $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + a^4 + 5 \geq 0$

$$] p = a+b, q = ab$$

$$\cancel{(p^2 - 2q)^2} (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 - ab(a^2 + b^2) + 5 \geq 0$$

$$5 + (p^2 - 2q)^2 - q^2 - (p^2 - 2q)q \geq 0$$

$$5 + p^4 - 4p^2q + 4q^2 - q^2 - p^2q + 2q^2 \geq 0$$

$$p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 \geq 0$$

Заметим, что если  $q > 0$ , то  $p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 > 0$

$\Rightarrow q \geq 0 \Rightarrow$

$$\textcircled{1} (a-b)^2 \geq ab \Rightarrow p^4 - 5p^2q \geq p^2(p^2 - 5q) \geq p^2(a^2 + b^2 - 2ab)$$

$$\geq p^2((a^2 - ab) \geq 0, \text{ т.к. } p \geq 0 \Rightarrow p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 \geq 0$$

$$\textcircled{2} (a-b)^2 < ab \Rightarrow p^4 - 4p^2q + p^2(a-b)^2 \geq 0$$

$$5q^2 + 5 - p^2q \geq 5a^2b^2 + 5 - (a^2 + ab + b^2)ab \geq$$

$$\geq 3a^2b^2 + 5 - ab(a^2 + b^2) \geq ab(3ab - a^2 - b^2) + 5 \geq ab(ab - (a-b)^2) + 5 \geq$$

$$abk \cdot \geq q(ab - (a-b)^2) + 5 \geq 0 \Rightarrow p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 \geq 0$$

$\Rightarrow$  это равносильно тому что можно  $\Rightarrow a+b \geq 0 \Rightarrow \log_{11}(\frac{1}{2}xy) \geq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}xy \geq 1 \Rightarrow xy \geq 2$  Ответ: 2

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заданы вершины  $\Delta ABC$ :  $A(6, 1)$ ,  $B(-15, 9)$ ,  $C(6, 9)$ .  
Задача: найти количество точек  $(x_1, y_1)$  в координатной плоскости, для которых выполняется неравенство  $|x_1 - 6| + |y_1 - 9| \leq 12$ .

Пусть  $(x_1, y_1)$  — любая точка, удовлетворяющая неравенству. Тогда  $|x_1 - 6| + |y_1 - 9| \leq 12$ .  
Так как сумма расстояний от любой точки до двух данных точек не может превышать расстояния между ними, то  $|x_1 - 6| + |y_1 - 9| \leq 12$  эквивалентно неравенству  $|x_1 - 6| + |y_1 - 9| \leq |A - C|$ .

Найдем  $|A - C|$ . Для этого определим координаты вектора  $\vec{AC}$ :  $\vec{AC} = (6 - 6, 9 - 1) = (0, 8)$ .  
Следовательно,  $|A - C| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$ .  
Таким образом,  $|x_1 - 6| + |y_1 - 9| \leq 8$  эквивалентно неравенству  $|x_1 - 6| + |y_1 - 9| \leq |A - C|$ .

Число точек, для которых выполняется неравенство  $|x_1 - 6| + |y_1 - 9| \leq 8$ , равно количеству точек, расположенных в полуплоскости  $x_1 \geq 6$  и  $y_1 \geq 9$ , на расстоянии от 6 до 8 единиц от точки  $(6, 9)$ .  
Это количество равно количеству точек, расположенных в полуплоскости  $x_1 \geq 6$  и  $y_1 \geq 9$ , на расстоянии от 6 до 8 единиц от точки  $(6, 9)$ , т. е. количеству точек, расположенных в полуплоскости  $x_1 \geq 6$  и  $y_1 \geq 9$ , на расстоянии от 6 до 8 единиц от точки  $(6, 9)$ .

Число точек, расположенных в полуплоскости  $x_1 \geq 6$  и  $y_1 \geq 9$ , на расстоянии от 6 до 8 единиц от точки  $(6, 9)$ , равно количеству точек, расположенных в полуплоскости  $x_1 \geq 6$  и  $y_1 \geq 9$ , на расстоянии от 6 до 8 единиц от точки  $(6, 9)$ .

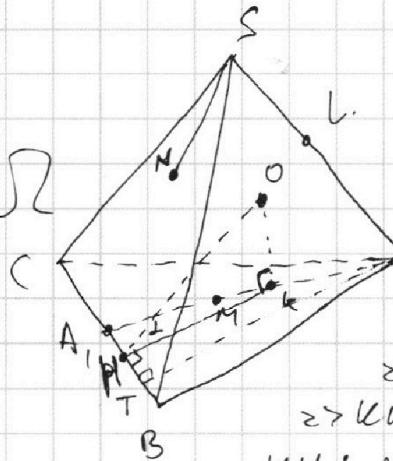
Число точек, расположенных в полуплоскости  $x_1 \geq 6$  и  $y_1 \geq 9$ , на расстоянии от 6 до 8 единиц от точки  $(6, 9)$ , равно количеству точек, расположенных в полуплоскости  $x_1 \geq 6$  и  $y_1 \geq 9$ , на расстоянии от 6 до 8 единиц от точки  $(6, 9)$ .



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

**МФТИ.**Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3)



Т - основание высоты из А  
на ВС  
Берем ] НЕ ВС :  
 $KH \perp BC$ .

$SN = SL \geq 6$  как

касательные  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AK = 20 - 6 = 14 \Rightarrow AK \geq$$

$$\geq KH = 20 - 14 = 6$$

$KH : AT = AK : AA_1$ , т. к. ~~одинаково~~

$\triangle A_1HK \sim \triangle A_1BA$

$$\frac{AK}{AA_1} = \frac{16}{30} \Rightarrow KH = AT \cdot \frac{16}{30}$$

$$\frac{1}{2} \cdot AT \cdot CB = 180 \Rightarrow AT = 18 \Rightarrow KH = \frac{18 \cdot 8}{15} = \frac{48}{5}$$

$OK \perp A_1AC$ , т. к. ~~ок~~  $A_1BC$  касается  $\odot$

$$\Rightarrow \text{но } \angle O_1B_1O \text{ и } \angle O_1K \perp BC \Rightarrow \text{искомый угол} - \angle O_1HK. \quad \text{tg} \angle O_1HK = \frac{OK}{KH} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \angle O_1HK = \arctg \frac{5}{6}$$

Ответ:  $\arctg \frac{5}{6}$

(7)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

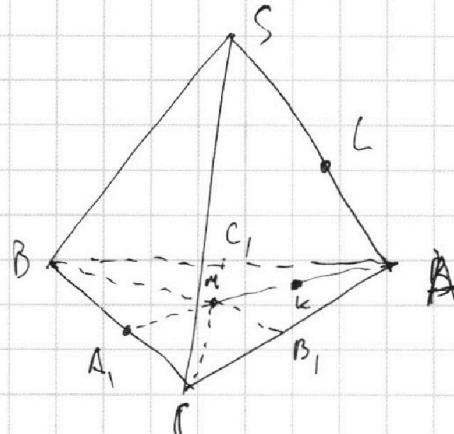
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

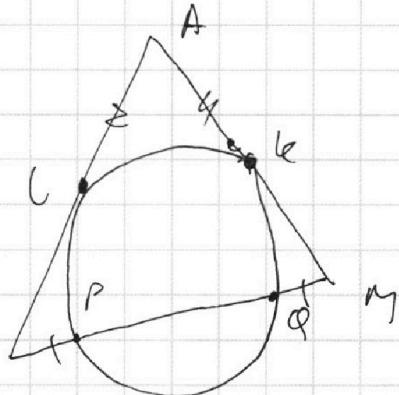
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a)



$$SA_1 \cdot BC = 20, \quad S_{A_1 B C} = 180$$

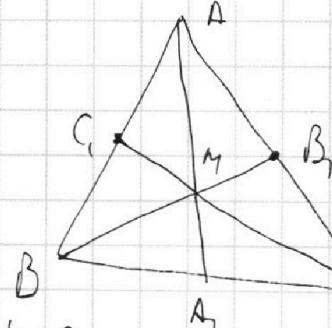
(ну - гд АСМ:



середине середины ил-ю

Замечаем что  $SP \cdot SQ = SL^2$  и  $MP \cdot MQ = MK^2$   
из тн о о вде в сект. то  $SP = MQ$ ,  $SQ = MP$   
 $\Rightarrow SL = MK \Rightarrow AS = AM \Rightarrow AM = 20$

•  $\triangle ABC$



$A_1, B_1, C_1$  - середины сторон

$B_1, A_1$  и  $AB$  соотв.

$$AM = 20 \Rightarrow MA_1 = A_1B_1 = A_1C_1 = 10$$

$$\Rightarrow \angle B_1 M C_1 = 90^\circ$$

$$S_{B_1 M C_1} = \frac{1}{3} S_{ABC}, \text{ но } S_{B_1 M C_1} = \frac{1}{2} BM \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot BB_1$$

$$\cdot CC_1 \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 180 \cdot \frac{3}{2} = 270$$

$$AA_1 = \frac{3}{2} \cdot 20 = 30 \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 270 = 8100$$

Окружность а: 8100

①

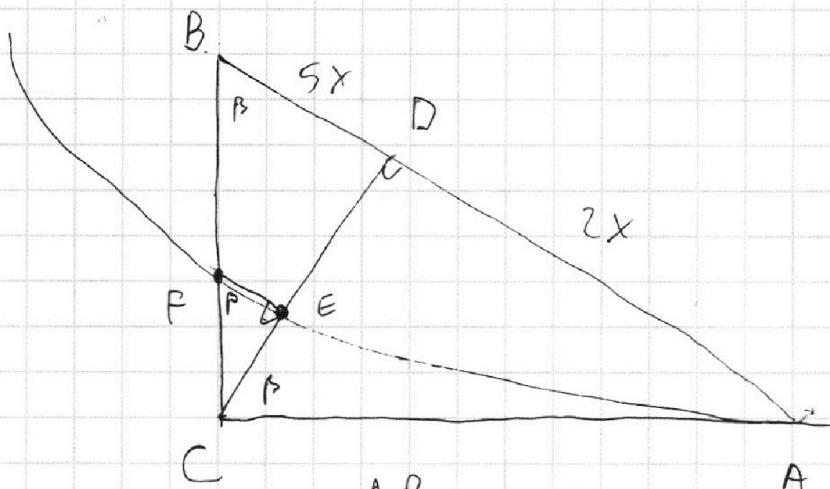
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

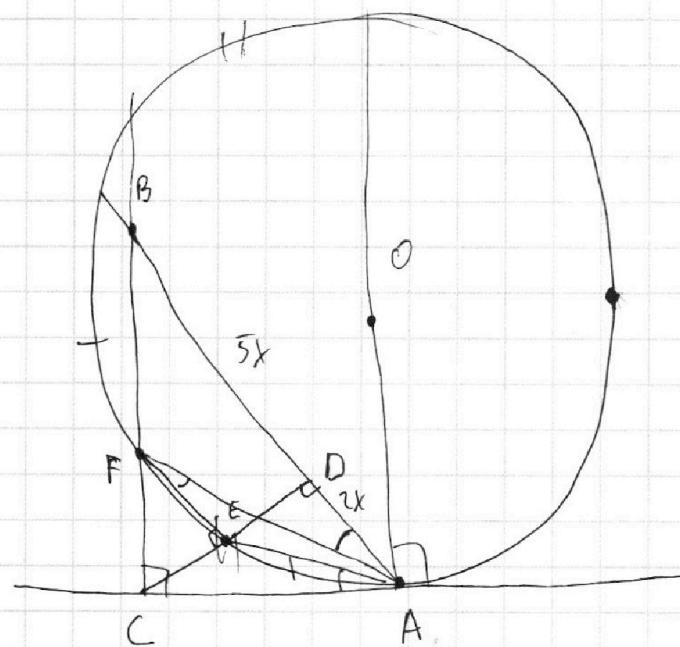
- |                                     |                          |                                     |                                     |                          |                                     |                                     |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                                   | 4                                   | 5                        | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{BD} \approx \frac{7}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

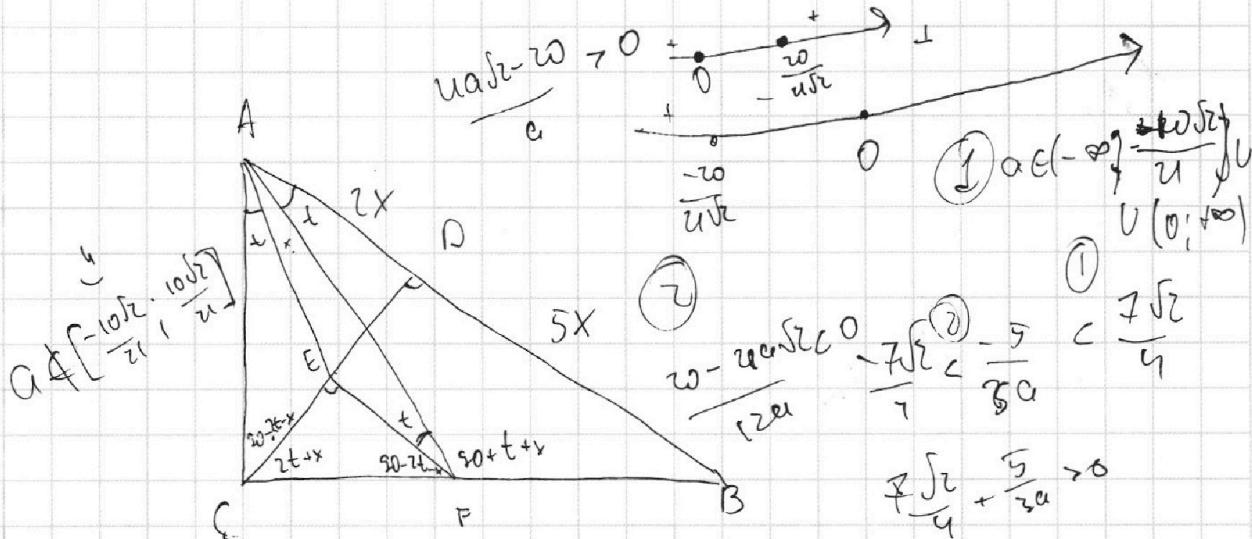
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AE}{\sin t} > \frac{EF}{\sin x}$$

$$\frac{\omega \sin \omega}{r^a} > 0$$

$$\frac{\omega \sin \omega + \omega}{a} > 0$$

$$tg L = \frac{35}{48} \cdot \frac{20\sqrt{2}}{7} = \frac{CE}{\sin t} \geq \frac{AE}{\sin \omega \cos(2\pi x)} \geq \frac{AE \cdot AC}{AD}$$

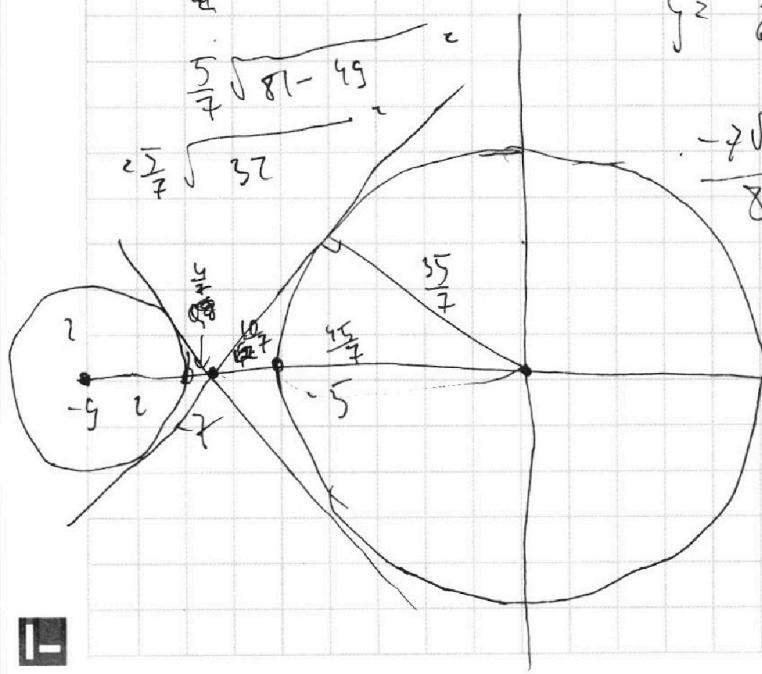
$$\geq \frac{20\sqrt{2}}{7} \geq \frac{7\sqrt{2}}{8} \left( \frac{7\sqrt{2}}{8} \right) \frac{CE}{AD}$$

$$\sin t + x = \frac{CF}{AF}$$

$$y = \frac{-5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

$$-\frac{7\sqrt{2}}{8} < \frac{-5}{6a} < \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

$$\frac{5\sqrt{81-49}}{6 \cdot 7\sqrt{2}} < \frac{5\sqrt{2}}{6a} < \frac{10\sqrt{2}}{6a}$$





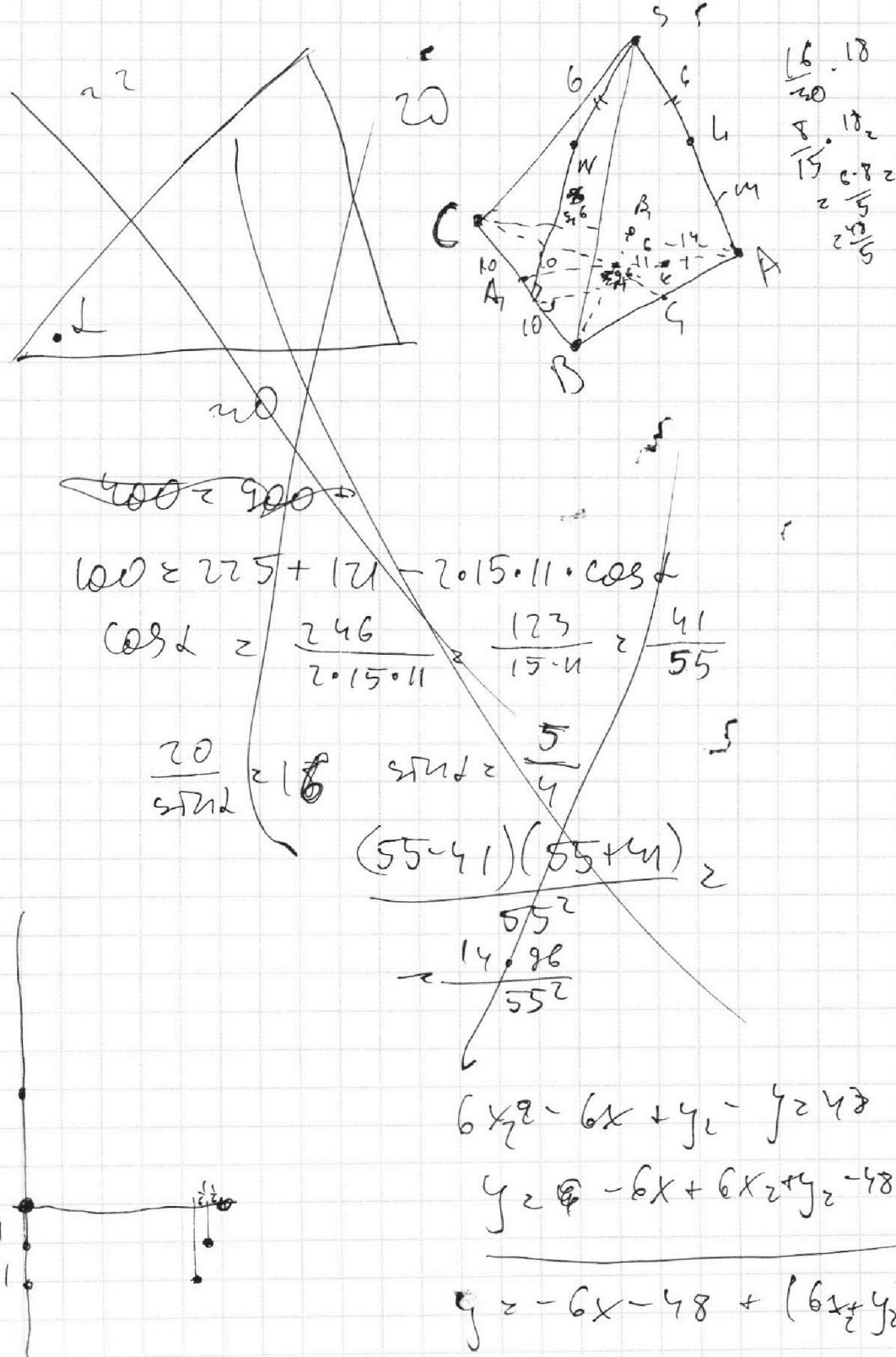
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

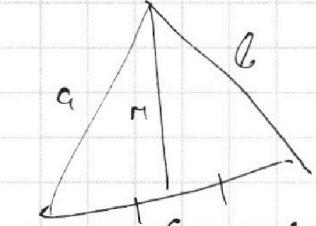
решение которой представлено на странице:

- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

 **МФТИ**

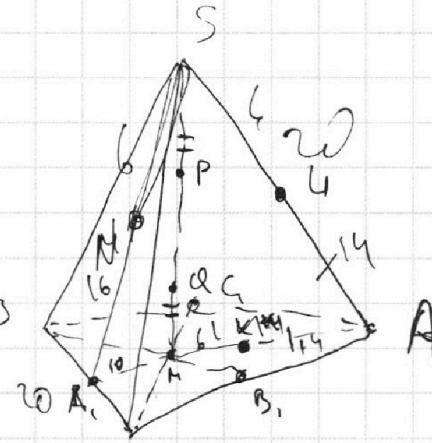
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \approx 48$$



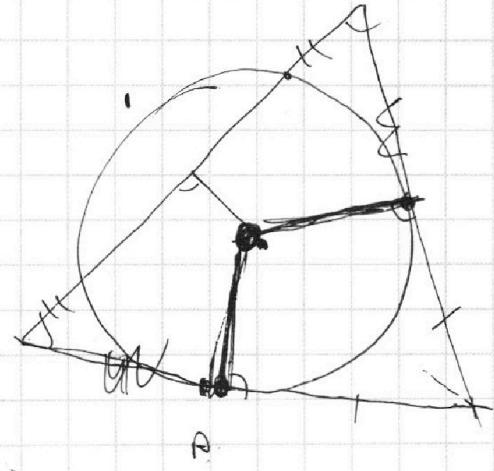
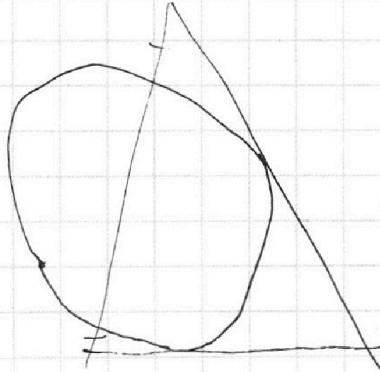
$$m^2 + \frac{c^2}{4} = a^2 + b^2$$
$$m^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

$$m^2 = \frac{c^2}{4}$$



$$\angle AAS = 120^\circ$$

$$(a^2 + b^2 - c^2)$$
$$(a^2 + c^2 - b^2)$$



$$(a+b-c)(a+c-b)(a+b+c)(b+c-a)$$

$$\approx (a^2 - (b-c)^2)((b+c)^2 - a^2)$$

$$\frac{2}{3} \cdot 180 = \beta M \cdot MC = \frac{4}{3} \cdot BB_1 \cdot CC_1$$

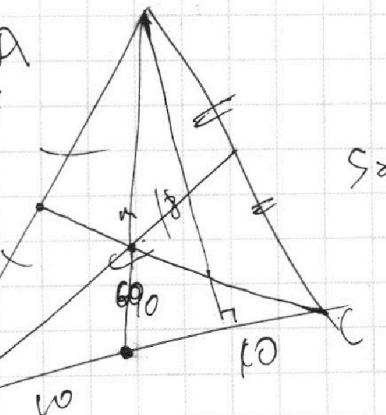
$$120$$

$$9 \cdot \frac{120}{3} = 270$$

$$+ 30 =$$

$$270 + 30 = 300$$

$$S \approx 180$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = -6x - 48 + (6x_0 + y_0)$$

(-15, 20)

(2, 20)

$$6x_0 + y_0 = c$$

$$y_0 = -6x_0 + c$$

$$6 \cdot 2 + 20 = 102$$

$$-6x + 102 - 48 =$$

$$-6x + 54$$

$$\cancel{6 \cdot 17} \quad 27 \cdot 2$$

$$6 \cdot 9$$

$$x = 9$$

$$-6x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5ab^2 \geq 3a^2b + b^3a + 2a^2b^2$$

$$3a^2b^2 - 5 \geq ab(a^2 + b^2)$$

$$ab(3ab - a^2 - b^2) + 5 \geq 0$$

$$ab(ab - (a-b)^2) + 5 \geq 0$$

$$4\pi x \geq \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) \geq 9\pi - 2x$$

$$\left[ 10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) \geq 9\pi - 2x \right]$$

$$\left[ 10\left(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \leq 9\pi - 2x \right]$$

$$5\pi - 5\pi - 10x + 20\pi k \geq 9\pi - 2x$$

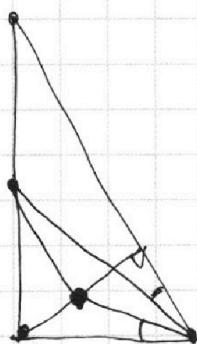
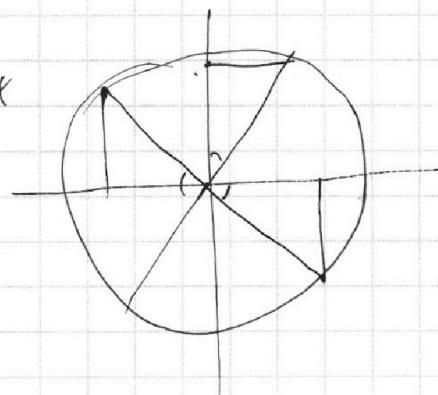
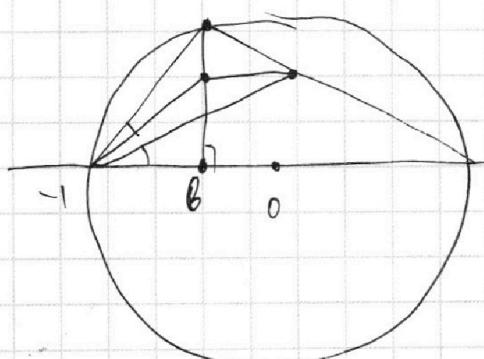
$$8x \geq 20\pi k - 4\pi$$

$$x \geq \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}$$

$$10x - 5\pi + 20\pi k \geq 9\pi - 2x$$

$$12x \geq 14\pi - 20\pi k$$

$$x \geq \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi k$$



$$\frac{a-b}{1} = -(\bar{a}-\bar{b}) \quad \bar{b} = b$$

$$a-b = -\frac{1}{a} + b$$

$$2b = a + \frac{1}{a} \quad \text{or} \quad b = \frac{a^2 + 1}{2a}$$



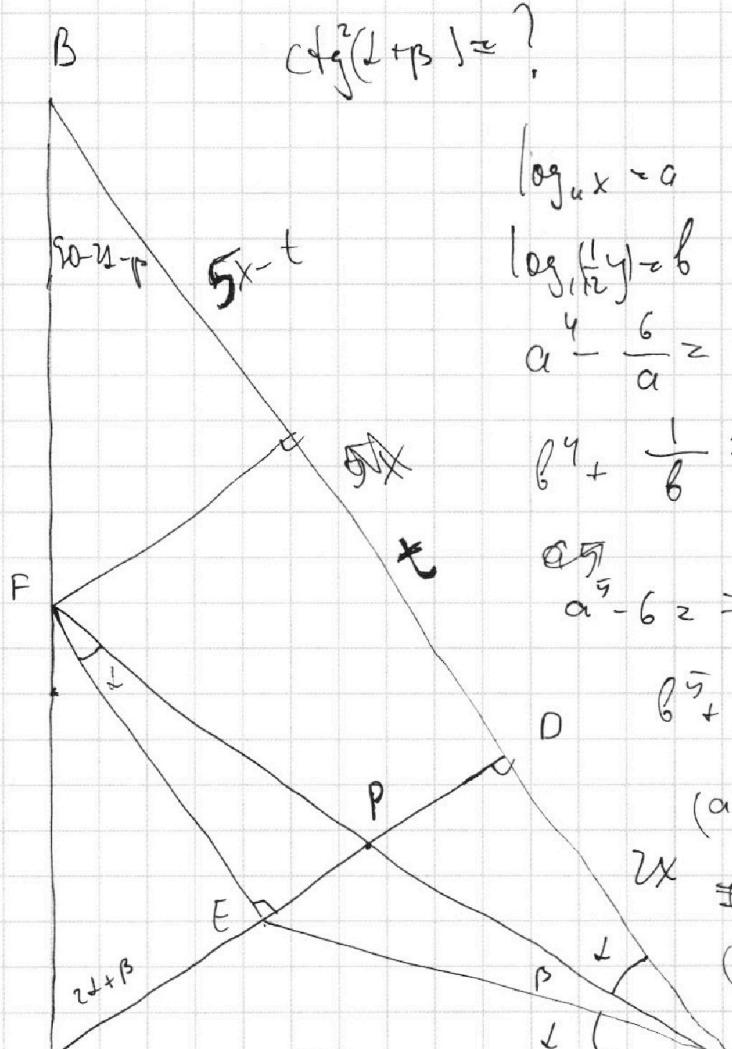
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\operatorname{ctg}(2\alpha + \beta) = ?$$

$$\log_a x = a \quad a+b = ?$$

$$\log_{(1/t_2)} y = b$$

$$a^4 - \frac{6}{a} \geq \frac{-2}{3a} - 5$$

$$b^4 + \frac{1}{b} \geq \frac{-13}{3b} - 5$$

$$a^4 - 6 \geq \frac{-2}{3} - 5a$$

$$b^4 + 1 \geq \frac{-13}{3} - 5b$$

$$(a^4 + b^4) + 5(a+b) \geq 0$$

$$(a+b)(a^4 - ab + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 5) \geq 0$$

$$(a+b) = 0 \quad 5a^2b^2 + 5 \geq (a+b)^2ab$$

$$(a^4 + b^4 - ab(a^2 + b^2) + a^2b^2 + 5) \geq 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 - ab(a^2 + b^2) - a^2b^2 + 5 \geq 0$$

$$(p^2 - 2q)^2 - q(p^2 - 2q) - q^2 + 5 \geq 0$$

$$(a+b)^2 - 5ab \geq 0$$

$$(a-b)^2 - ab \geq 0$$

$$(p^2 - 2q)^2 - p^2q + 2q^2 - q^2 + 5 \geq 0$$

$$p^4 - 4p^2q + 4q^2 + q^2 - p^2q + 5 \geq 0$$

$$p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 \geq 0$$

$$p^2(p^2 - 4q) + 5q^2 + 5 \geq 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

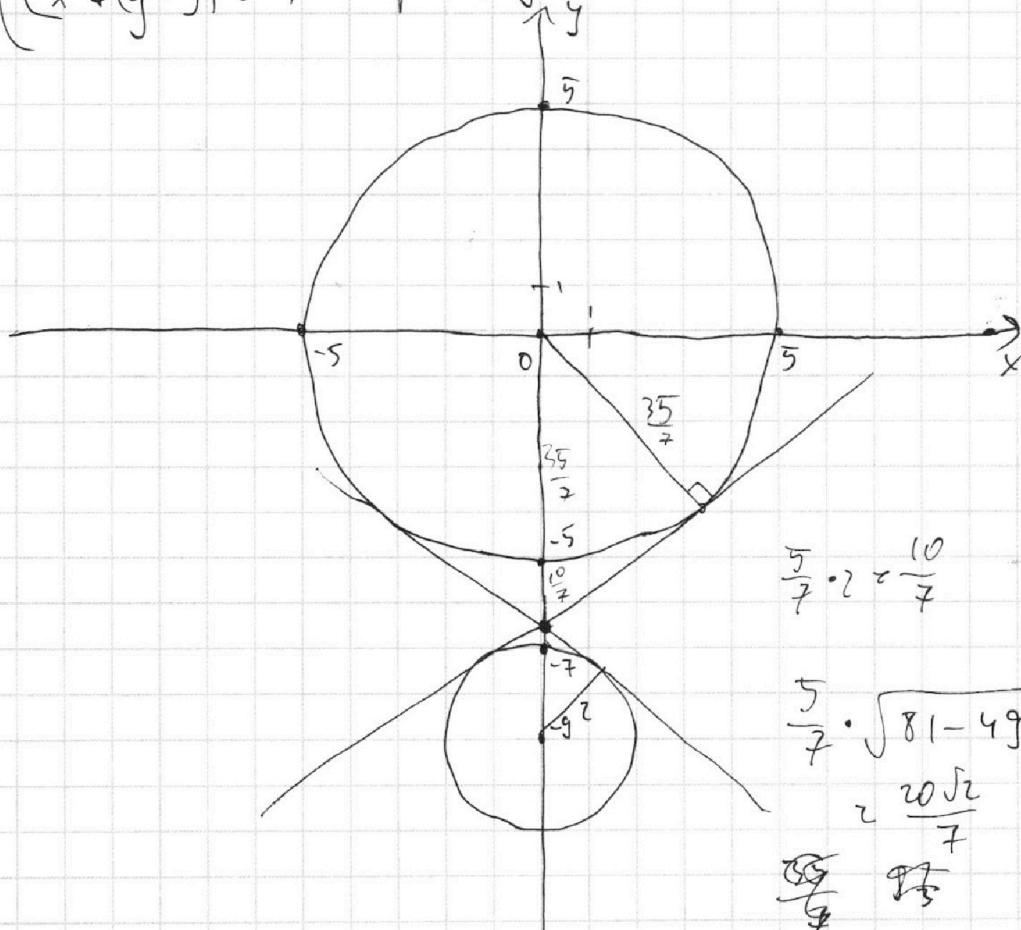
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-5x+6}{6a}, a \neq 0 & \text{если } a \geq 0, \text{ то } 5x = 6 \\ x^2 + y^2 = 25 & \text{окр-тк с ц. } (0,0) \text{ и } R = 5 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 & \text{окр-тк с ц. } (0,-9) \text{ и } R = 2 \end{cases}$$

$x = \text{const}$   
разделя  
отдельно



$$\frac{5}{7} \cdot 2 = \frac{10}{7}$$

$$\frac{5}{7} \cdot \sqrt{81 - 49} =$$

$$= \frac{20\sqrt{2}}{7}$$

~~$\frac{20\sqrt{2}}{7}$~~

$$\frac{7}{\sqrt{32}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^6 b^2 c^2 : 2^{6+14+16} \cdot 3^{13+21+25} \cdot 5^{13+11+28}$$

$$< 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \Rightarrow > 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$$

$$\underbrace{abc}_{\substack{1 \\ a=2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^1}} \geq 2^{32} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$a=2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^1$$

$$b=2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^0$$

$$c=2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$

$$a+b=11$$

$$b+c=13$$

$$a+c=28$$

$$a+b \geq 13 \quad (14)$$

$$a+c \geq 25$$

$$b+c \geq 28 \quad ?$$

$$(C=16)$$

$$a>b$$

$$a-b=4$$

$$(a=6, b=4)$$

$$a+b=26+4=26$$

$$b+2=7$$

$$(B=5, a=9)$$