



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- ✖1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- ✖2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- ✖3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
- ✖4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- ✖5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
- ✖ а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
- б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 01

$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$   
 $ac: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$   
 $abc \rightarrow \min$   
 Пусть  $a = 2^d 3^\beta 5^\gamma$  ( $d \leq 9; \beta \leq 10; \gamma \leq 10$ )  
 Тогда  $b \geq 2^{9-d} 3^{10-\beta} 5^{10-\gamma}$ ;  $c \geq 2^{14-d} 3^{13-\beta} 5^{13-\gamma}$   
 Т.е.  $abc \geq 2^{23-d} 3^{23-\beta} 5^{23-\gamma}$   
 $2^{23-d} 3^{23-\beta} 5^{23-\gamma} \rightarrow \min$   
 $d \leq 9; \beta \leq 10; \gamma \leq 10 \Rightarrow 2^{23-d} 3^{23-\beta} 5^{23-\gamma} \geq 2^{14} 3^{13} 5^{13}$   
 (Оценка достигается при  $a = 2^9 3^{10} 5^{10}$ ;  $b = 1$ ;  $c = 2^5 3^3 5^3$ )  
 Ответ:  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$

№ 02

№ 01

$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$   
 $bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$   
 $ac: 2^{19} 3^{17} 5^{30}$   
 $\Rightarrow abc: 2^{19} 3^{17} 5^{30}$   
 Оценка достигается при  $b = 1$   
 Пусть  $d, \beta, \gamma$  — степени входящих в  $a, b, c$ .  
 Тогда  $\begin{cases} d + \beta \geq 9 \\ \beta + \gamma \geq 14 \\ d + \gamma \geq 19 \end{cases}$  (след, что нам нужны миним. равенства, поэтому  $d + \beta + \gamma = 21$ ). Пробуем аналог. рассуждения для 345 получаем  $abc \geq 2^{21} 3^{21} 5^{27}$  Ответ:  $2^{21} 3^{21} 5^{27}$

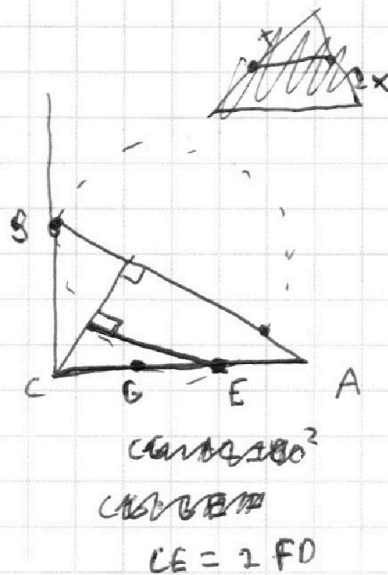
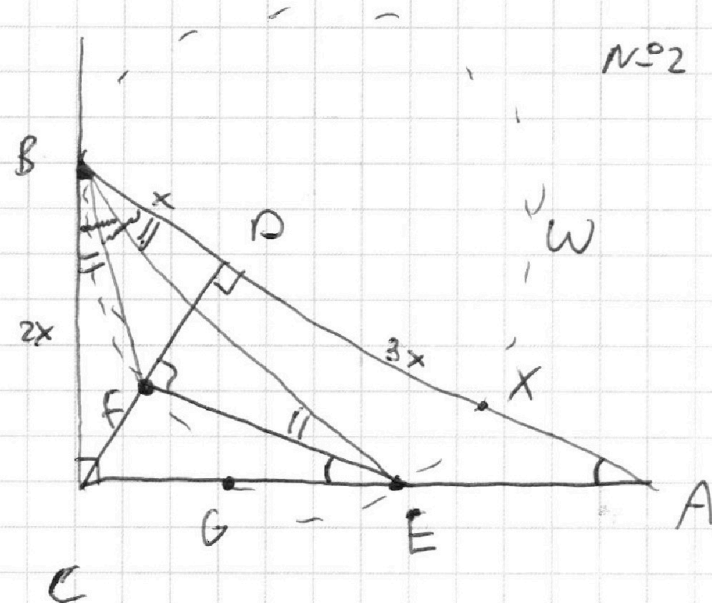
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1)  $CD = \sqrt{BD \cdot AD} = x\sqrt{3} \Rightarrow AC = \sqrt{3x^2 + 9x^2} = 2x\sqrt{3}$ ;  $BC = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x$

~~$CE = \frac{2x \cdot x\sqrt{3}}{2x\sqrt{3}} = x$~~

~~2)  $\frac{CE}{AC} = \frac{CF}{BC}$~~

2)  $\triangle CEF \sim \triangle BAC$  ( $\angle FEC = \angle BAC$  и  $EF \parallel AB$   
 $\angle CFE = \angle BCA = 90^\circ$  и  $EF \parallel AB$ )

$\angle EBA = \angle BEF$  (и  $EF \parallel AB$ ) =  $\angle CBF$  (и  $\text{век. } w \text{ и } BC$ )  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EBA = \angle CBF \Rightarrow \angle DBF = \angle CBE \Rightarrow \triangle BDF \sim \triangle BCE \Rightarrow$

$\Rightarrow CE = \frac{FD \cdot BC}{BD} = 2FD$

3) и  $\triangle CEF \sim \triangle BAC$   ~~$\frac{CE}{AC} = \frac{CF}{BC}$~~

~~$\Rightarrow \frac{CE}{2x\sqrt{3}} = \frac{CF}{2x}$~~   $\Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) FD = x\sqrt{3} \Rightarrow FD = x\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{3}{2+\sqrt{3}} x \Rightarrow$

~~$\Rightarrow CF = \frac{2x\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2+\sqrt{3}} = \frac{6x\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^2}$~~

$\frac{CF}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{BAC}} = \frac{3}{7+4\sqrt{3}}$  Ответ:  $\frac{3}{7+4\sqrt{3}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \text{ из } \triangle CEF \sim \triangle BAC \quad CF = CE \cdot \frac{1}{2} = FD \Rightarrow$$
$$\Rightarrow CE = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{4} AB \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{BCA}} = \frac{3}{16}$$

Ответ:  $\frac{3}{16}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N°3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

~~5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}~~

~~5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}~~

~~5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}~~

~~5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}~~

~~5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}~~

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

~~5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}~~

~~5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}~~

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} + 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

~~abs: \sin(\dots)~~

$$x + \frac{\pi}{2} \in [-5; 5] \Rightarrow x \in [-5 - \frac{\pi}{2}; 5 - \frac{\pi}{2}]$$

~~5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}~~

~~5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}~~

~~5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}~~

$$1) x = \alpha + 2\pi k; \alpha \in [0; \pi]$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow 5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\alpha \Rightarrow \alpha = -x + 2\pi k$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5\alpha = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi - 5\alpha = x \Rightarrow 2\pi - 5\alpha = \alpha + 2\pi k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\alpha = 2\pi - 2\pi k \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi k}{3} \Rightarrow x \in \frac{\pi}{3} - \frac{\pi k}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi k}{3} \in [0; \pi] \Rightarrow k = 1, 2, 3 \Rightarrow x = -\pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x = \beta + 2\pi n, \beta \in [\pi; 2\pi]$$

$$\cos x = \cos \beta \Rightarrow \arcsin(\cos \beta) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)) = x + \frac{\pi}{2}$$

~~$$\arcsin(\sin(\beta - \frac{3\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$$~~

$$5\beta - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5\beta - 8\pi = x = \beta + 2\pi n$$

$$4\beta = 2\pi + 2\pi n$$

$$\beta = 2\pi + \frac{\pi n}{2} \in [\pi; 2\pi] \Rightarrow n = -4; -3; -2; -1; 0$$

~~$$x = -7\pi; -4\frac{3}{4}\pi; -2\frac{1}{2}\pi; -\frac{\pi}{4}; 2\pi$$~~

~~Ответ:~~  $-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; -7\pi; -\frac{19\pi}{4}; -\frac{5\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}; 2\pi$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



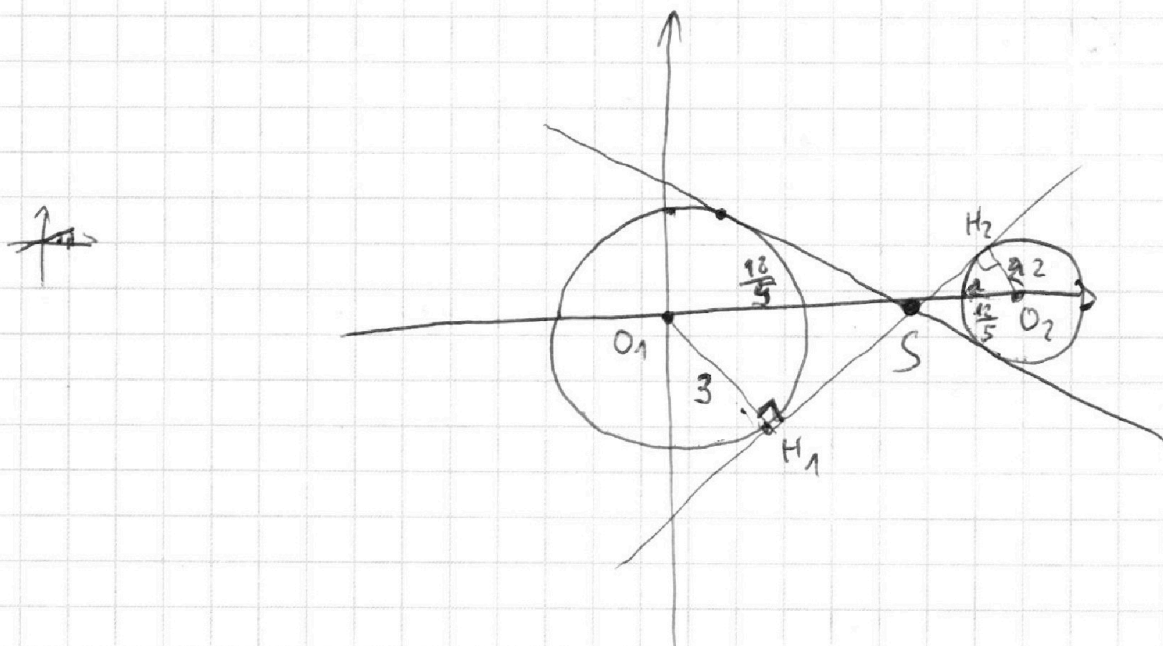
N=4

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & (1) \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 & (2) \end{cases} \quad \text{— две окр-ти}$$

(1)  $O(0; 0)$   $r=3$

(2)  $O(6; 0)$   $r=2$



$ax + 2y - 3b = 0$  — прямая  $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$  при  $a \neq 0$

Если  $a=0$ , то, очевидно, можно получить 4 р-ти.

Рассмотрим общую внутреннюю касательную этим  
двух окр-тей (с полост. условием касат.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если уменьшится угловой коэффициент этой прямой, то она пересечёт окружность по 4-м точкам, а значит из любой прямой с таким наклоном можно получить <sup>требуемую</sup> параллельные переносом. Если же его увеличит или не поменять, то в любом положении при параллельном переносе будет не более двух точек ~~касания~~ пересечения. Значит, при ~~а ≤ 0~~  $-\frac{a}{2} \leq K$ , где  $K$  - угловой коэффициент касательной. Аналогично, при  $a > 0$   $-\frac{a}{2} \leq K$  (из симметрии относительно  $Ox$ ), т.е.  $\frac{a}{2} \leq K$   
из геометрии из геометрии  $K = \frac{5}{6}$  (подобие  $O_1H_1S$  и  $O_2H_2S$ ,  $O_1O_2 = 6$ )

Т.е.

$$\begin{cases} a < 0 \\ \frac{a}{2} > -\frac{5}{6} \\ a > 0 \\ \frac{a}{2} < \frac{5}{6} \end{cases}$$

Ответ: ~~а ∈ (-5/6; 5/6)~~  $a \in (-\frac{5}{12}; \frac{5}{12})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N°5

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$x > 0 \Rightarrow \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

$$\log_3 x = t$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8$$

$$t^5 + 8t + \frac{7}{2} = 0$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

$$5y > 0 \Rightarrow \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8$$

$$\log_3 5y = u$$

$$u^4 + \frac{2}{u} = \frac{11}{2u} - 8$$

$$u^5 + 8u - \frac{7}{2} = 0$$

$$t^5 + 8t + u^5 + 8u = 0$$

$$(u+t)(8 + t^4 + t^3 u + t^2 u^2 + t u^3 + u^4) = 0$$

$$\Downarrow$$
$$u = -t$$

$$\log_3 x = -\log_3 5y$$

$$\log_3 x = \log_3 \frac{1}{5y} \Rightarrow x = \frac{1}{5y} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

Ответ:  $\frac{1}{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

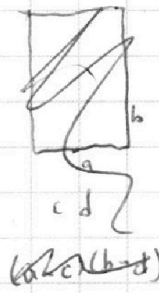
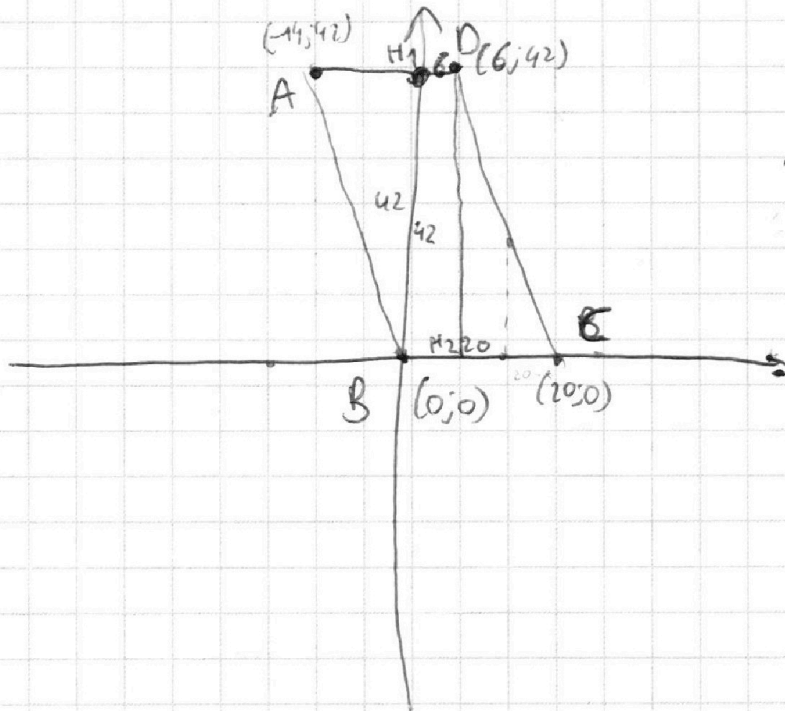
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6



$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$x_2 - x_1 = \{-3; -2; \dots; 20\}$$

$$y_2 - y_1 = \{42; 39; \dots; -27\}$$

*Множество точек с фиксированными разностями абсцисс и ординат задается прямой параллельно прямой  $3x + y = 33$ .  
Задача сводится к нахождению макс/мин точек с фикс. разностями абсцисс и ординат в  $\triangle AHB$ ,  $\triangle AHD$  и треугольнике  $HCDB$ .*

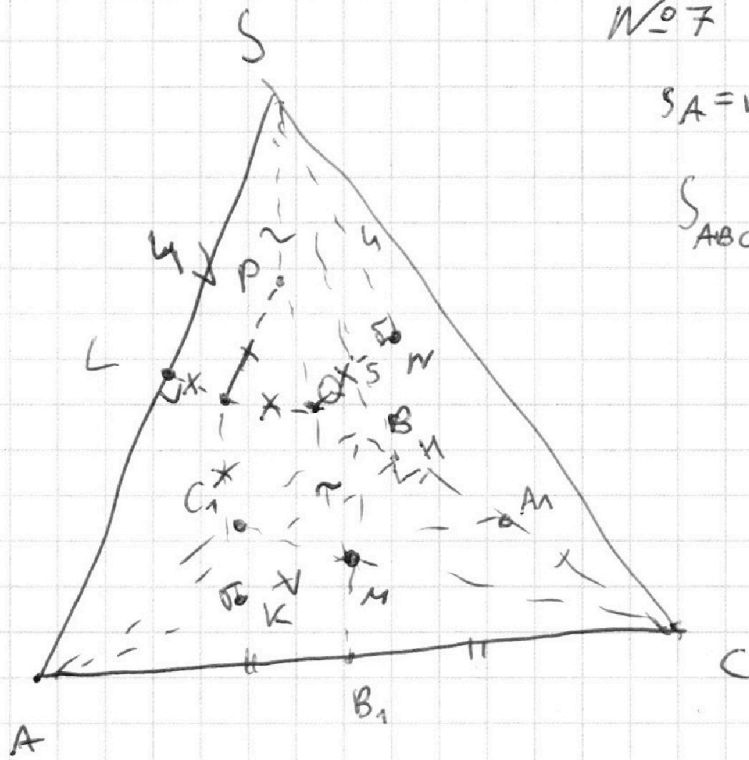
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

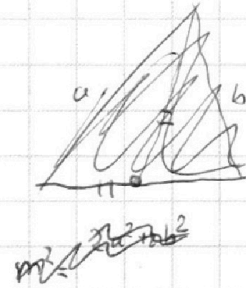
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



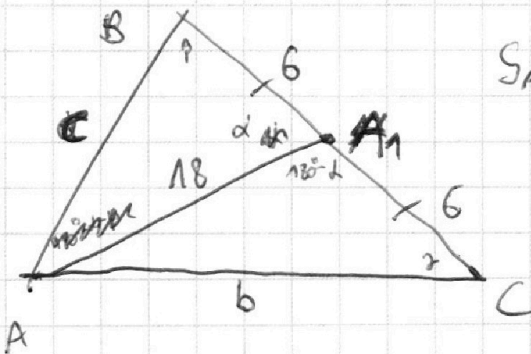
№7

$$S_A = BC = 12$$

$$S_{ABC} = 90$$



$$\begin{aligned}
 & a) \begin{cases} MQ \cdot MS = KM^2 \\ SP \cdot SM = SL^2 \end{cases} \Rightarrow KM = SL \\
 & \Rightarrow AS = AM \Rightarrow AM = 12 \Rightarrow AA_1 = 18 \\
 & AL = AK \text{ (вып. кат.)}
 \end{aligned}$$



$$S_{ABC} = 90$$

$$b \cdot 18 \cdot \sin \alpha = 90 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{11}{12}$$

$$S_{AA_1B} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 \cdot \sin \alpha = 90 \cdot \frac{5}{12} = 37.5$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{12}, \cos \alpha = \frac{11}{12}$$

$m_{AB}^2 = 36 + 324 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{11}{12} = 360 - 36 \cdot 11 = 360 - 396 = -36$   
 $m_{AB} = 6i$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \alpha = \frac{45 \cdot 2}{6 \cdot 18} = \frac{5}{6} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6} \quad \left( S_{\Delta A_1 B_1} = \frac{90}{2} = \frac{6 \cdot 18 \cdot \sin \alpha}{2} \right)$$

по по m. кол.

$$AB^2 = 324 + 36 - 7 \cdot 18 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = 360 - 36\sqrt{11}$$

$$AC^2 = 360 + 36\sqrt{11}$$

по ср. медианам:

$$m_{AB}^2 = \frac{720 + 72\sqrt{11} + 288 - 360 + 36\sqrt{11}}{4} = 162 + 27\sqrt{11}$$

$$m_{AC}^2 = \frac{720 - 72\sqrt{11} + 288 + 360 - 36\sqrt{11}}{4} = 162 - 27\sqrt{11}$$

$$m_{BC}^2 \cdot m_{AB}^2 \cdot m_{AC}^2 = 18 (162^2 - 27^2 \cdot 11) \Rightarrow m_{BC} \cdot m_{AB} \cdot m_{AC} =$$

$$= \sqrt{18(162^2 - 27^2 \cdot 11)} = \sqrt{18 \cdot 18225} = \sqrt{328050}$$

$$\begin{array}{r} 162 \\ \times 162 \\ \hline 324 \\ 972 \\ \hline 26244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27^2 = 729 \\ \times 11 \\ \hline 729 \\ 729 \\ \hline 8019 \end{array}$$

$$= \sqrt{328050} = 30$$

$$= 3 \sqrt{36450} = 15 \sqrt{1458} =$$

$$\begin{array}{r} 36450 \mid 25 \\ \underline{25} \\ 114 \\ \underline{100} \\ 145 \\ \underline{125} \\ 206 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} = 15 \cdot 729 \\ = 15 \cdot 27 \sqrt{2} = \\ = 405 \sqrt{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 27 \\ \hline 105 \\ 30 \\ \hline 405 \end{array}$$

Ответ:  $405\sqrt{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

