



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 1

$$a^2 b^2 c^2 : 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \quad a^2 b^2 c^2 : 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{25} \rightarrow \text{нельзя иметь } a^2 b^2 c^2 ; ac$$

$$b^2 c^2 : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \quad a^2 c^2 : 2^{28} \cdot 3^{39} \cdot 5^{86}, \text{ значит } a^2 b^2 c^2 : 5^{86}$$

$$a^2 c^2 : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \quad a^2 b^2 c^2 : 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{86}, \text{ так как } a^2 c^2$$

нельзя иметь, значит  $a$  и  $c$  произвольные

только  $b$  имеет ограничения, значит

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{34} \cdot 3^{44} \cdot 5^{86} \text{ (так как } a^2 c^2 \text{ или } b^2 c^2 \text{ или } a^2 b^2 \text{ или } a^2 c^2)$$

нельзя  $b^2$  <sup>43</sup>, то получим, что произвольные

нельзя иметь,  $a^2 b^2 c^2$  произвольные

нельзя,  $a^2 b^2 c^2$  <sup>44</sup> ~~нельзя~~ <sup>3</sup> или

нельзя, так как  $a^2 b^2 c^2$  <sup>43</sup> ~~нельзя~~ <sup>3</sup> или

$$a^2 b^2 c^2 : 3^{44} \cdot 5^{43}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43} \rightarrow a^2 b^2 c^2 \text{ имеет } a^2 b^2 c^2 \text{ или } a^2 c^2 \text{ или } b^2 c^2$$

значит  $a^2 b^2 c^2$  и  $a^2 c^2$  или  $b^2 c^2$ .

Произведем пример  $a^2 b^2 c^2$  или

$$a = 2^4 \cdot 5^{20} \cdot 3^4 \quad ab = 2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^{20} ; 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{19}$$

$$b = 2^3 \cdot 5^0 \cdot 3^5 \quad bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{23} ; 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$c = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \quad ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} ; 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43} \quad \text{Ответ: } 2^7 \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2 *выполнено*

Каждым изобразим *проекции*

*треугольников*  $\triangle ABC$  и  $\triangle AED$ ,  $k = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{0,3}} =$

$= \frac{\sqrt{0,3}}{0,3}$

~~Каждым изобразим треугольники~~  
~~треугольников  $\triangle ABC$  и  $\triangle AED$ .  $k = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{0,3}} =$~~   
 ~~$= \frac{\sqrt{0,3}}{0,3}$~~





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3

$$5 \sin \cos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi - x}{2}\right)$$

Определим

$$5 \sin \cos\left(\cos\left(\frac{\pi - x}{2}\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$$

Размножим синусы, кососа

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$\frac{\pi - x}{2} \in [2\pi k; \pi + 2\pi k]$$

$$\Rightarrow \frac{x - \pi}{2} \in [0; \pi]$$

$$5\left(\frac{\pi - x}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{\pi - x}{2} \in [-4\pi; -3\pi]$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5\left(4\pi + \frac{x - \pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5\pi = 6x$$

$$20\pi + \frac{5x}{2} - 5\pi = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x = \frac{\pi}{6} \rightarrow \text{не подходит}$$

$$21\pi = 6x$$

$$\frac{x - \pi}{2} \in [-2\pi; -\pi]$$

$$x = \frac{27\pi - 4\pi}{6} = \frac{23\pi}{6}$$

$$5\left(2\pi + \frac{\pi - x}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{\pi - 23\pi}{2} = -3\pi \rightarrow \text{не подходит}$$

$$10\pi + \frac{5\pi - 5x}{2} = \frac{3\pi}{2} + x$$

Клима или будем еще больше умножить на косинусы, то значение x будет увеличиваться и выйдет за ОДЗ.

$$6x = 10\pi + \pi$$

$$x = \frac{11\pi}{6}$$

$$\text{Таким образом } \frac{\pi - x}{2} \in [2\pi; 3\pi]$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{6} = -\frac{8\pi}{6} \rightarrow \text{не подходит}$$

$$5\left(\frac{\pi - x - 2\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{\pi + 3\pi}{2} = 2\pi \rightarrow \text{не подходит}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 10\pi - \frac{3\pi}{2} = 6x$$

$$6x = -9\pi \Rightarrow x = \frac{-3\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*и 3 (проверим)*

Если мы еще увеличим параметр, то  $\alpha$  станет еще меньше, а значит войдет в ОДЗ.

$$\text{Пусть } \frac{\pi - \alpha}{2} \in [-\pi + 2\pi k; \pi + 2\pi k]$$

$$\frac{\pi - \alpha}{2} \in [-\pi; \pi]$$

$$\frac{\pi - \alpha}{2} \in [-3\pi; -\pi]$$

$$5\left(-\frac{\pi - \alpha}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$$

$$5\left(\frac{2\pi + \pi - \alpha}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$$

$$\frac{5\pi}{2} + 5\alpha = \frac{3\pi}{2} + \alpha$$

$$5\alpha - 10\alpha - 5\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \alpha$$

$$4\alpha = 4\pi$$

$$4\alpha = 4\pi$$

$$\alpha = \pi \rightarrow \text{не подходит}$$

$$\alpha = \frac{4\pi}{2} \rightarrow \text{не подходит}$$

*не подходит  
не подходит!  
не подходит, войдет  
и войдет в ОДЗ*

$$\frac{\pi - \alpha}{2} \in [\pi; 2\pi]$$

$$5\left(-\left(\frac{\pi - \alpha}{2} - 2\pi\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$$

$$70\pi + 5\alpha - 5\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \alpha$$

$$4\alpha = 4\pi - 70\pi$$

$$4\alpha = -68\pi$$

$$\alpha = -\frac{3\pi}{2} \rightarrow \text{не подходит}$$

*и войдет в ОДЗ*

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{\pi}{5}; \alpha = \frac{12\pi}{5}; \alpha = \frac{2\pi}{2}; \alpha = \frac{-3\pi}{2}; \alpha = \pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2 ч упростим

~~$\lambda = -\frac{27a}{3a} = -9$~~   ~~$\lambda = -\frac{27a}{3a} = -9$~~

$\lambda = -3a \gamma + 2b \rightarrow$  упрощаем уравнение, где  $2b$  - то же  
переменная с 0  $2 \cdot a - 3a \rightarrow$  вынесем  $3a$   $\rightarrow$  упрощим  $\frac{1}{2}$   $0$   $2 \cdot \gamma$ .

~~Второй шаг упрощения~~

~~Упростим на упрощенном~~

случае, который будет упрощен

Книжка упрощенная

$a, \quad t_{\gamma} = -3a$

$\sin \alpha = \frac{3}{4b} \quad \cos \alpha = \frac{2}{\frac{27a-2b}{3a}} = \frac{6a}{27a-2b}$

~~$\cos \alpha = \frac{2}{\frac{27a-2b}{3a}}$~~   $-3a = \frac{3}{\frac{4b \cdot 6a}{27a-2b}}$

$-3a = \frac{(27a-2b)^3}{4b \cdot 6a}$

Поскольку  $a < 0$

$-42a^2 b = 27a - 2b$

$42a^2 b + 27a - 2b = 0 \quad | : b$

$42a^2 = 4 - \frac{27a}{b}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



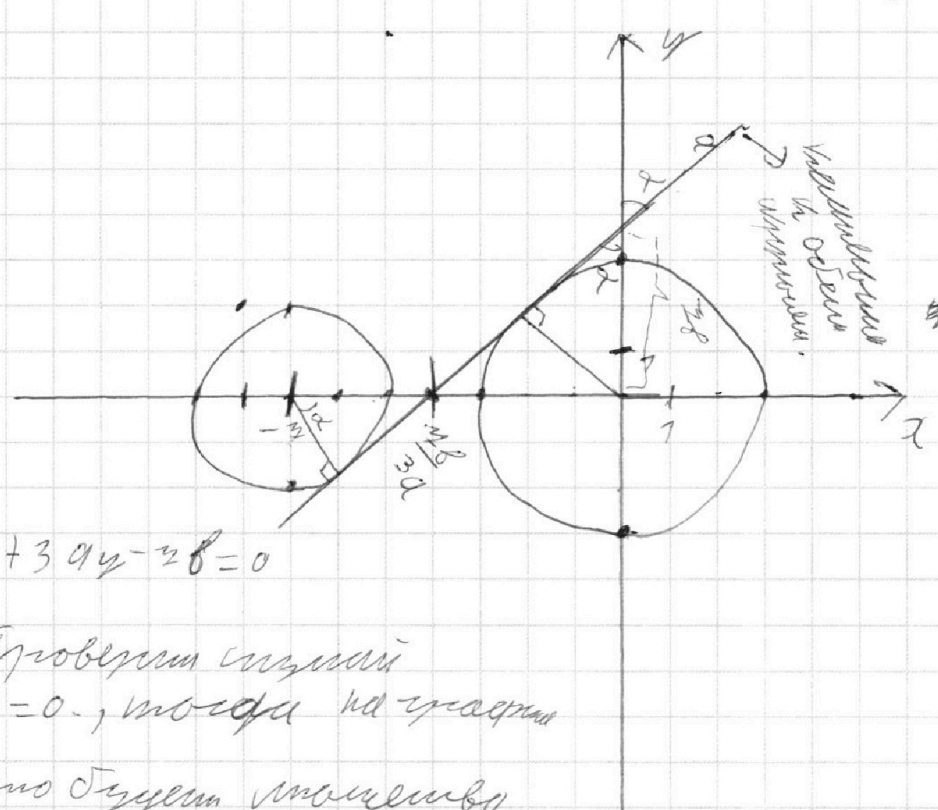
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x + 3ay - 2b = 0 \\ (x^2 + 74x + 4y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 74x + 4y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 74x + 49 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 37) + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Относительно  $x$  и  $y$   
в точке  $(-37, 0)$   
и радиусом 2.  
↓  
Относительно  $x$  и  $y$   
в точке  $(0, 0)$   
и радиусом 3.



$$x + 3ay - 2b = 0$$

Положим  $a \neq 0$ , тогда на графике

это будет точка касания  
прямой к окружности  
 $O_1$  - если мы хотим  
4 решения, то прямая

должна пересекать обе окружности, но если  
прямая  $\parallel O_1O_2$ , то такое невозможно

$$a = 0 \text{ не подходит}$$

$$3ay = -x + 2b \quad | :3a \quad a \neq 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

023

$$\log_2^4(6x) - 2 \log_2^4 6x = \log_2^4 \frac{3 \cdot 3 - 4}{36^2}$$

270

$$6x = t$$

470

$$\log_2^4 t + 6 \log_2^4 t = \log_2^4 (3^3) - 4$$

471

~~471~~

$$\log_2^4 t - 2 \log_2^4 t = \log_2^4 (3^3) - 4$$

$$\log_2^4(3) + \log_2^4(3) = \frac{\log_2^4(3)}{\log_2^4(3)}$$

$$\log_2^4 t = \frac{3}{2} \log_2^4(3) + 2 \log_2^4(3) - 4$$

$$= \frac{1}{\log_2^4 3} + \frac{1}{\log_2^4 3} =$$

$$\log_2^4 t = \frac{7}{2} \log_2^4(3) - 4$$

$$= \frac{\log_2^4(3) + \log_2^4(3)}{\log_2^4(3) \log_2^4(3)}$$

$$\log_2^4 4 = \frac{5}{2} \log_2^4(3) - 6 \log_2^4(3) - 4$$

$$= \frac{\log_2^4(3)}{\log_2^4(3) \log_2^4(3)}$$

$$\log_2^4 4 = -\frac{7}{2} \log_2^4(3) - 4$$

$$\log_2^4 t - \log_2^4 4 = (\log_2^2 t - \log_2^2 4) \cdot$$

поочередно умножим

$$\log_2^4 4 = -\frac{7}{2} \log_2^4(3) - 4$$

$$\log_2^4 t = \frac{7}{2} \log_2^4(3) - 4$$

$$\cdot (\log_2^2 t + \log_2^2 4) =$$

⇓

$$\log_2^4 t - \log_2^4 4 = \frac{7}{2} (\log_2^4(3) + \log_2^4(3)) = (\log_2^2 t + \log_2^2 4) \cdot$$

$$\cdot (\log_2^2 t - \log_2^2 4) (\log_2^2 t + \log_2^2 4) = \log_2^4(t \cdot 4) (\log_2^2 \frac{t}{4}) \cdot$$

$$\cdot (\log_2^2 t + \log_2^2 4)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



и 5 выражения

$\log_2 t + \log_2 y$

$$\log_2(ty) \log_2\left(\frac{t}{y}\right) (\log_2^2 t + \log_2^2 y) = \frac{\log_2(ty)}{\log_2 t \log_2 y}$$

$$\log_2 t \neq 0 \text{ (MOD 3)}; \log_2 y \neq 0 \text{ (MOD 3)}$$

$$\log_2(ty) (\log_2\left(\frac{t}{y}\right) \log_2 t \log_2 y (\log_2^2 t + \log_2^2 y) - 7) = 0$$

$$\log_2(ty) = 0 \text{ или } \log_2\left(\frac{t}{y}\right) \log_2 t \log_2 y (\log_2^2 t + \log_2^2 y) = 7$$

$$\log_2(ty) = 0 \Rightarrow ty = 7 (\log_2 t - \log_2 y) \log_2 t \log_2 y$$

$$8xy = 7 \cdot (\log_2^2 t + \log_2^2 y) = 7$$

$$xy = \frac{7}{8} \text{ Это целочисленный смысл}$$

Проверим

$$x = \frac{7}{64}$$

$$-\frac{7}{2} \log_2(2) - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{7}{2} - 4 \geq 0$$

$$\frac{7}{2} \log_2(2) - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{7}{2} - 4 \geq 0$$

$$\log_2^4 y = -\frac{7}{2} \log_2^4(2) - 4$$

$$\log_2^4\left(\frac{1}{2}\right) = +\frac{7}{2} \log_2^4(2) - 4$$

$$\log_2^4 y = -\frac{7}{2} \log_2^4(2) - 4 \text{ работает; } x = \frac{7}{64} \text{ возможно.}$$

$$\text{Ответ: } xy = \frac{7}{8}$$

$$\log_2 t = a > 0$$

$$\log_2 y = b < 0$$

$$(a-b) \sqrt{a} \sqrt{b} (a^2 + b^2) = 7, \text{ значит это произведение}$$

$\sqrt{0}$      $\sqrt{0}$      $\sqrt{0}$   
 или так  $b < 0$

Если  $a$  и  $b$  взаимно просты, значит не можем получить 7

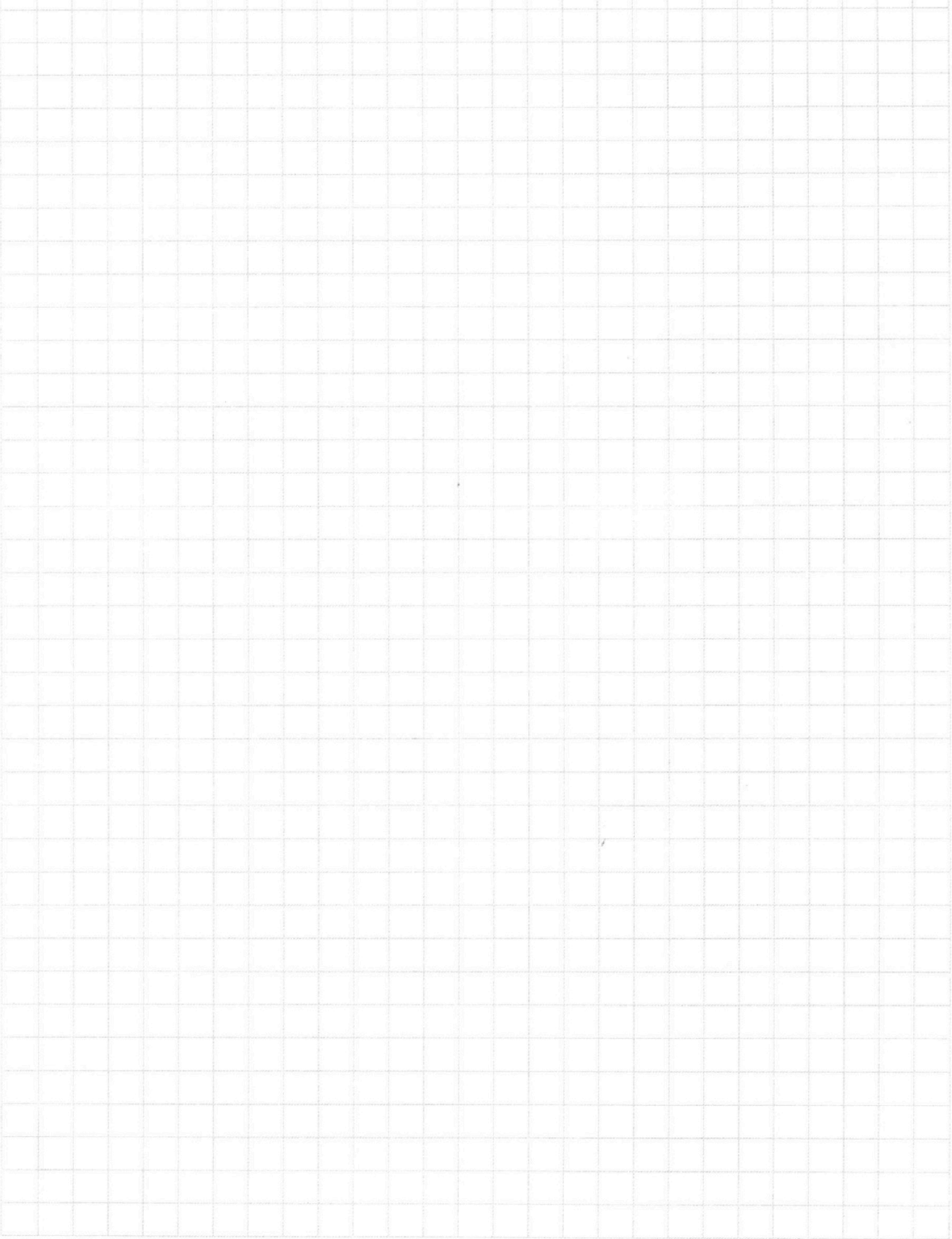


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.  
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} + 77 \\ 75 \\ 73 \\ \hline + 28 \\ 75 \\ \hline 43 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 78 \\ 74 \\ \hline + 32 \\ 43 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a^2 = 20 \\ a = 2^2 \\ b = 2^6 \end{array}$$

$$a = 2^7$$

$$b = 2^3$$

$$c = 2^4$$

$$d = 2^4$$

$$a_1 = 34$$

$$c = 2^{10}$$

$$a^2 = 2^8$$

$$b = 5^0$$

$$b = 2^8$$

$$d = 5^{20}$$

$$c = 5^{23}$$

$$b = 3^5$$

$$c = 3^{20}$$

$$a = 3^4$$

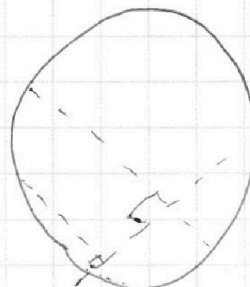
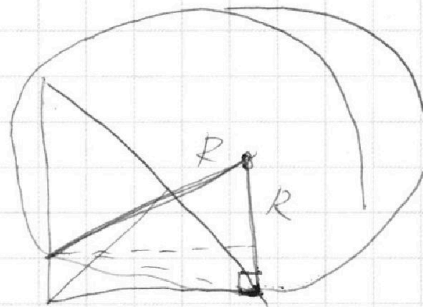
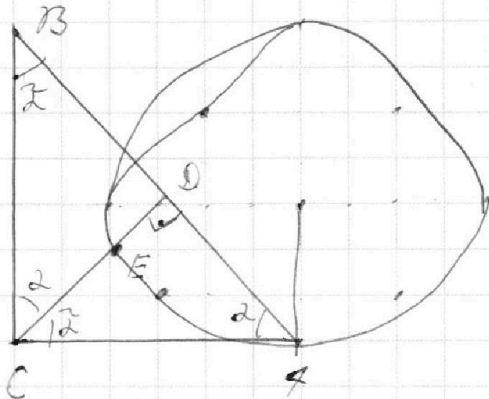
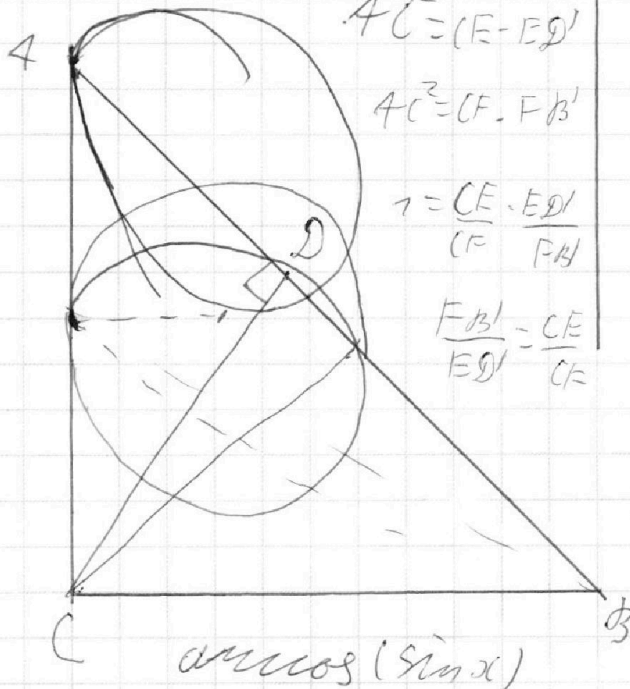
$$a = 2^4 \cdot 5^{20}$$

$$AC^2 = (E - ED')$$

$$AC^2 = (CF - FB')$$

$$r = \frac{CE \cdot ED'}{CF \cdot FB'}$$

$$\frac{FB'}{ED'} = \frac{CE}{CF}$$



$$\sin x = \frac{\cos(\pi - x)}{2}$$