МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

$ab: 2^8 3^{14} 5^{12}$ $bc: 2^{12} 3^{20} 5^{17}$ $ac: 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

$abc \geqslant \sqrt{2^{34} \cdot 3^{55} 5^{68}} = 2^{17} \cdot 5^{34} \cdot 3^{27} \cdot 3$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$(y-10)^2 + x^2 - 36 = 0$

$(y-10)^2 + x^2 = 36$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$a, b, c \in \mathbb{N}$ $ab \vdots 2^8 3^{14} 5^{12}$, $bc \vdots 2^{12} 3^{20} 5^{17}$, $ac \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

$\min abc - ?$ Найдём наим. степень 2, на которую должна д-ся abc: Пусть x, y, z — 2-показатели a, b, c соответст. Тогда $\begin{cases} x+y \geq 8 \\ y+z \geq 12 \\ z+x \geq 14 \end{cases}$ $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \\ z=9 \end{cases}$ — подходят, потому что реш., когда не-во превращается в р-во. $x+y+z=17$. Найдём наим 3-показатель abc:

Пусть x, y, z — 3-показатели a, b, c соответст. Тогда $\begin{cases} x+y \geq 14 \\ y+z \geq 20 \\ z+x \geq 21 \end{cases}$

Когда все не-ва превращаются в р-ва эти сист. не имеет реш. Понятно, что если мы увеличим одну из правых частей на 1 и новая сист. будет иметь реш., их сумма будет наим. (потому что $(x+y)+(y+z)+(z+x) = 2(x+y+z)$).

$\begin{cases} x+y=14 \\ y+z=21 \\ z+x=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=7 \\ z=14 \end{cases}$ $x+y+z=28$. Найдём наим. 5-показатель abc: Пусть x, y, z — 5-показатели a, b, c соответственно. Тогда $\begin{cases} x+y \geq 12 \\ y+z \geq 17 \\ z+x \geq 39 \end{cases}$: Т.к. $y \geq 0$, $(x+y)+(y+z) \geq z+x \geq 39$. Значит $x+y+z \geq \frac{78}{2} = 39$.

При $x=12$ $y=0$ $z=27$ — удовлетворяют системе. Значит $\min x+y+z = 39$. Значит наим. знач abc равно $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

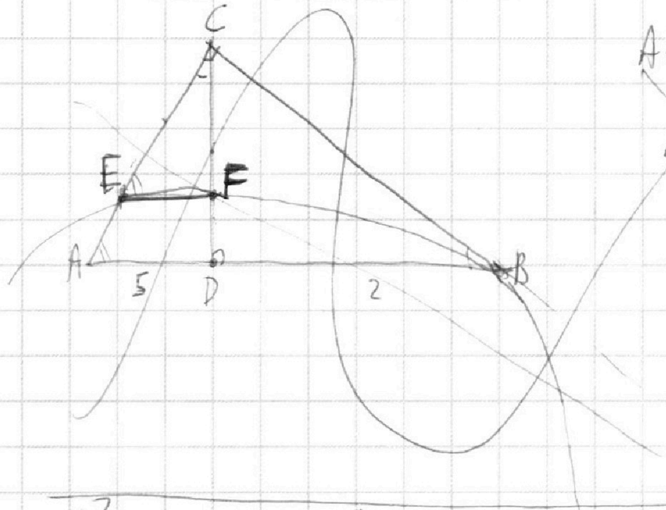
Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☑ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

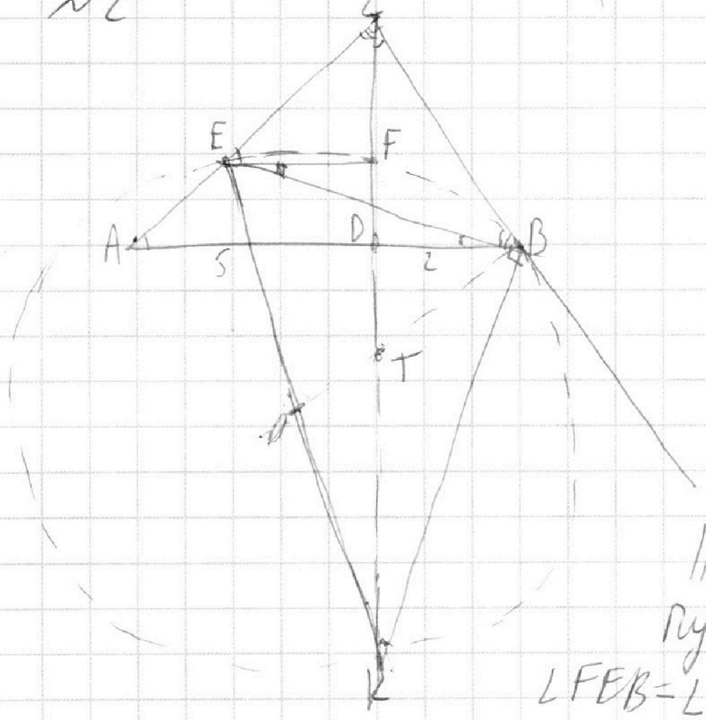


~~$AB \parallel EF$ $AD \setminus DB = \frac{5}{2}$ $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$~~

~~Пусть $DB = 2x \Rightarrow AD = 5x$~~

~~$CD = \sqrt{DB \cdot AD} = \sqrt{10}\,x$~~

№2



$AB \parallel EF$ $\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$ $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$

Пусть $BD = 2$. Тогда $AD = 5$.

$CD = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10}$ $CB = \sqrt{10+4} = \sqrt{14}$ Пусть продолжение прямой CD за т. D повторно пересекает окр. в т. K. Тогда по т. о степени точки $CF \cdot CK = CB^2 = 14$

~~Если O – центр окр., то OB ∥ AC, т.к. эти 2 прямые ⊥ CB,~~

Пусть O – центр окружности. $\angle FEB = \angle EBA$ (как накрест лежащие при ∥). $\angle FEB = \angle FKB$ (как опир. на одну хорду) $\Rightarrow \angle EBA = \angle FKB \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle EBK = 90^\circ$, $\Rightarrow$ EK – диаметр. ~~$CK = CF + EK = CF + \sqrt{EK^2 - EF^2}$~~

~~$14 = CF^2 + CF\sqrt{EK^2 - EF^2} =$~~ $CK = CD + DK$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☑ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$\cancel{10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x}$

$\cancel{10\arcsin(\cos x) = 10\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right.}$

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x \Leftrightarrow -10\left(\arccos(\cos x) - \frac{\pi}{2}\right) = \pi - 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = \pi - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 10\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \pi - 2x \\ 0 \le y \le \pi \end{cases}, y = \pm x + 2\pi k, k \in Z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\pi - 10y = \pi - 2x \\ 0 \le y \le \pi \\ y = \pm x + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi = 5y - x \\ 0 \le y \le \pi \\ y = \pm x + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$

1) $y = x + 2\pi k, k \in Z$: $2\pi = 5x + 10\pi k - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k, k \in Z$

$y = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k + 2\pi k = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\pi k, k \in Z$, т.к. $0 \le y \le \pi$ $k = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ или $k = 1$ $y = 0$ $x = -2\pi$ или $k = -1$ $x = 3\pi$

2) $y = -x + 2\pi k, k \in Z$: $2\pi = -5x + 10\pi k - x \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k, k \in Z$

$y = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi k + 2\pi k, k \in Z \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3}$, т.к. $0 \le y \le \pi$, либо $k = 0$ $x = -\frac{\pi}{3}$, либо $k = 1$ $x = \frac{4}{3}\pi$, либо $k = 2$ $x = 3\pi$, либо $k = -1$ $x = -2\pi$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}, -2\pi, 3\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi\right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☑ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

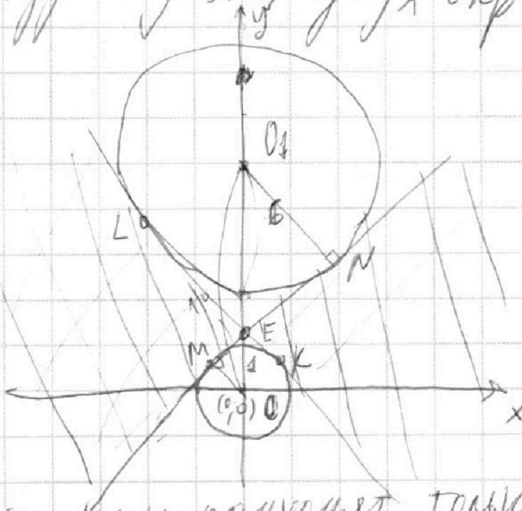
№4

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases}$$

$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-1=0 \\ x^2+y^2-20y+64=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=6^2 \end{array}\right.$ — уравнения окружностей. $ax-3y+4b=0$ — ур-ие прямой.

~~Значит~~ нам $ax-3y+4b=0 \Leftrightarrow y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$

Значит нам надо найти все значения ~~а~~ угловых коэфф, при которых сущ. прямая с этим коэфф., пересекающая каждую из этих двух окр. в 2 точках. Заметим, ~~что нам подходят только коэфф. прямых~~



Пусть O, O_1 центры окруж. KL и MN точки касания общих кас. с окружностями, E — точка пересеч. общих касат. Заметим, что нам подходят только те угловые коэфф, которые являются угловыми коэф. прямых проходящих через E и не лежащих в области, заштрихованной мной на рисунке. Их угловые коэфф. будут лежать между угл. коэфф. LK и MN. Угловой коэфф. $LK = ctg\angle KEO = EK = \sqrt{EO^2 - 1}$

$EO = \frac{1}{7}\cdot 10 = \frac{10}{7}$ (из подобия $\triangle O_1NE$ и $\triangle OME$). Угл. коэф. $LK = \sqrt{\frac{100-49}{49}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$

Угловой коэфф. $MN = -\frac{\sqrt{51}}{7}$. Значит $-\frac{\sqrt{51}}{7} < \frac{a}{3} < \frac{\sqrt{51}}{7}$

Ответ: $-\frac{3}{7}\sqrt{51} < a < \frac{3}{7}\sqrt{51}$.

№5

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3 \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}0{,}2 - 3 \end{cases}$$

xy — ?

Зона опр: $x, y > 0$.

Сделаем замену

$\log_5 2x = z$. $z^4 - \frac{3}{z} = \log_{(2x)^3}5^4 - 3 = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z} - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^4 - \frac{13}{3z} + 3 = 0 \Leftrightarrow z^5 - \frac{13}{3} + 3z = 0 \Leftrightarrow z^5 + 3z - \frac{13}{3} = 0$

Сделаем замену $\log_5 y = v$. Тогда $v^4 + \frac{4}{v} = -\frac{1}{3v} - 3$

$\Leftrightarrow v^4 + \frac{13}{3v} + 3 = 0 \Leftrightarrow v^5 + 3v + \frac{13}{3} = 0$

$\log_5 2x = z \Leftrightarrow 5^z = 2x \Leftrightarrow x = \frac{5^z}{2}$ $\log_5 y = v \Leftrightarrow y = 5^v$

$xy = \frac{5^{z+v}}{2}$ Так чему же может быть равна сумма z и v, если $\begin{cases} v^5 + 3v + \frac{13}{3} = 0 \\ z^5 + 3z - \frac{13}{3} = 0 \end{cases}$ Обе функции монотонно возрастают, поэтому имеют ровно 1 реш. (то есть у сист. обе ур-ия одно реш.) Т.к. начальная система $\Leftrightarrow$ сист. $\begin{cases} v^4 + \frac{13}{3v} + 3 = 0 \\ z^4 - \frac{13}{3z} + 3 = 0 \end{cases}$

~~если $(v; z)$ — реш сист, то и~~ Это решение сист. имеет вид $(v; -v)$. ~~или оно вообще сущ.~~

Значит $xy = \frac{5^{z+v}}{2} = \frac{5^{v+(-v)}}{2} = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4 (2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3$

$\log_t 5 = z$ $\quad \frac{1}{z^4} - 3z = \frac{4}{3}z - 3$

$\log_{(2x)^3} 625 = \log_{2x}$ $\quad \frac{1}{v^4} + 4v = -\frac{1}{3}v - 3$

$\frac{1}{z^4} - \frac{13}{3}z + 3 = 0$ $\quad \frac{1}{v^4} + \frac{13}{3}v + 3 = 0$

$xy = \frac{t}{2}$ $\quad y = \frac{\log_5 \frac{1}{z}}{2}$ $\quad \log_5 \frac{1}{v} = \frac{\log_5 z}{z}$

$= \frac{5^{\frac{1}{z}} \cdot 5^{\frac{1}{v}}}{2} = \frac{5^{\frac{1}{z}+\frac{1}{v}}}{2}$

Если z — решение перво, то $-z$ второго

$x, y > 0$ $\quad t^z = 5$

$t = 5^{\frac{1}{z}}$ $\quad \frac{1}{z} = \log_5 t$

$\frac{13}{3}v^5 + 3v^4 + 1 = 0$

$\frac{13}{3}(v^5 - z^5) + 3(v^4 - z^4) = 0$ $\quad v = z$

$v^5 - z^5 = (v^4 - z^4)(v$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} x+y=8 \\ z+y=12 \\ x+z=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \\ z=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y\geq 14 \\ y+z\geq 20 \\ z+x\geq 21 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=7 \quad 36-21=15 \quad z=14$$

$x+y=14$

$x=$

$$\begin{cases} x+y=12 \\ y+z=17 \\ z+x=39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=17 \\ y=-5 \\ z=22 \end{cases}$$

$x+y\geq 14$
$y+z\geq 21$
$z+x\geq 21$

$x=y=7$
$z=14$

№3

$10\arcsin(\cos x)=\pi-2x$

$10\left(\frac{\pi}{2}-\arccos(\cos x)\right)=\pi-2x$

$10-x=\pi-2x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

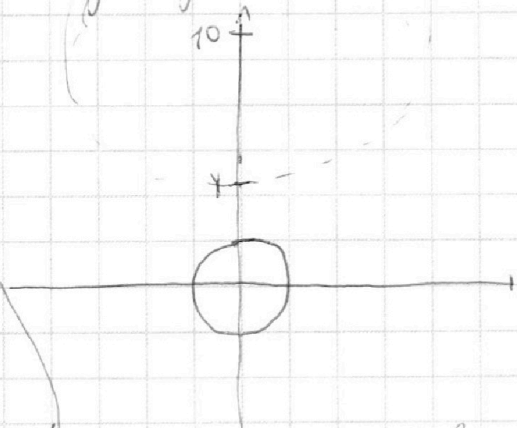
№4

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases}$$

— уравнения окр.

$x^2+y^2-1=0$

$x^2+y^2-20y+64=x^2+(y-10)^2-36=0$

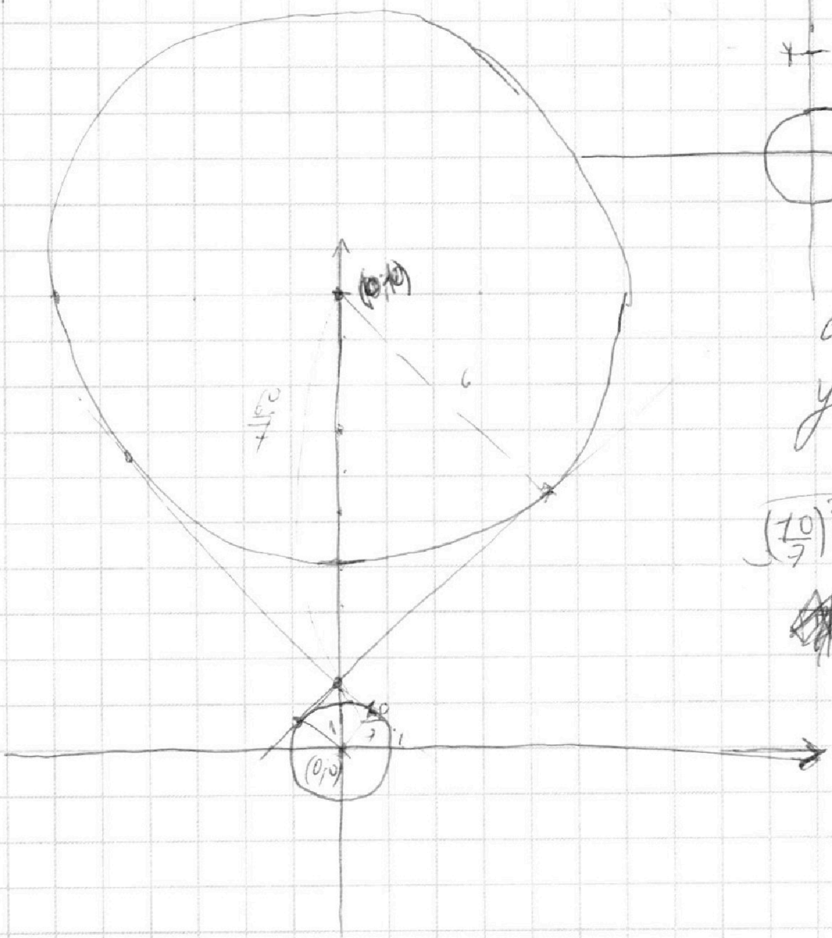


$ax-3y+4b=0$ — прямая

$y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$

$\left(\frac{10}{7}\right)^2-1=\frac{\sqrt{51}}{7}$

$\frac{7}{\sqrt{51}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~№5~~

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{2x^3}625 - 3 \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}0{,}2 - 3 \end{cases}$$

xy — ?

Зона опр.: $x, y > 0$.

Сделаем замену $\log_5 2x = z$. $3 + z^4 - \frac{3}{z} = \frac{1}{\frac{4}{3}z} = \frac{3}{4z} \Leftrightarrow$

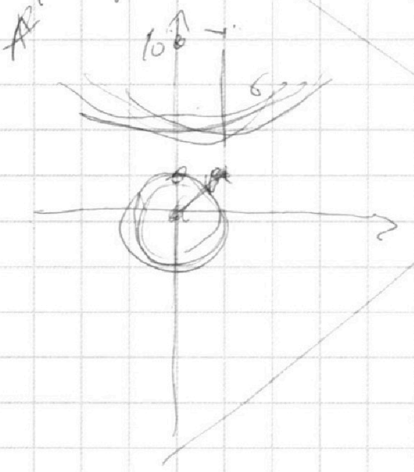
$\Leftrightarrow z^5 + 3z - \frac{15}{4} = 0$

Теперь замену $\log_5 y = v$. $v^4 + \frac{4}{v} = \frac{1}{}$

№4

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64) = 0 \end{cases}$$

$x^2 + (y-10)^2 = 36$



$ax - 3y + 4b = 0$

$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$