



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

✓ 3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

✓  $\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$ , и  $\log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5$ .

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = a_1 \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$$

$$a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{N}$$

$$a_1, b_1, c_1 \in \{2, 3, 5\}$$

$$b = b_1 \cdot 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$$

$$\forall i \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{Z}$$

$$c = c_1 \cdot 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$$

$$\forall i \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 \geq 6 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 16 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 9 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 25 \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 28 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{53}{2} \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 28 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 28 \end{array} \right.$$

абсолютно

$$abc = a_1 b_1 c_1 \cdot 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2}$$

$$\cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

~~Решение~~

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 4 \\ \beta_1 = 2 \\ \gamma_1 = 12 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 = 6 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 14 \\ \alpha_1 + \gamma_1 = 16 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = 8 \\ \beta_2 = 5 \\ \gamma_2 = 17 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 + \beta_2 = 13 \\ \beta_2 + \gamma_2 = 22 \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 25 \end{array} \right.$$

~~Решение~~

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 = 11 \\ \gamma_3 = 17 \\ \beta_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 + \beta_3 = 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 17 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 28 \end{array} \right.$$

maximalen Output:  $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

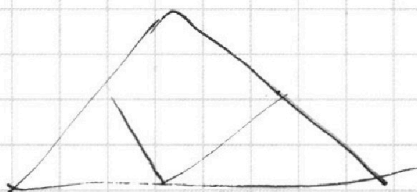
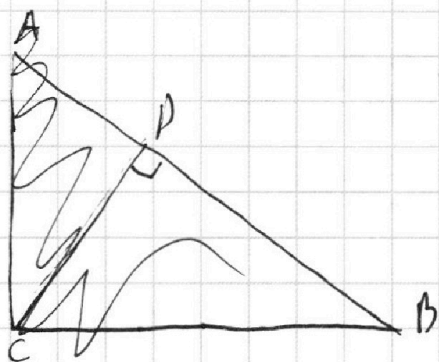
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$EF \parallel AB \Rightarrow$   
 $\angle DEF = 90^\circ$

Пусть  $AC = a$

$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$

$\frac{AD}{BD} = \frac{2}{5} \Rightarrow BD = \frac{5}{2} AD$

Пусть  $\angle CAB = \alpha$

$\tan \alpha = \frac{CD}{AD}$

$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{CD}{BD} = \frac{CD}{\frac{5}{2} AD} =$

$= \frac{2}{5} \tan \alpha$

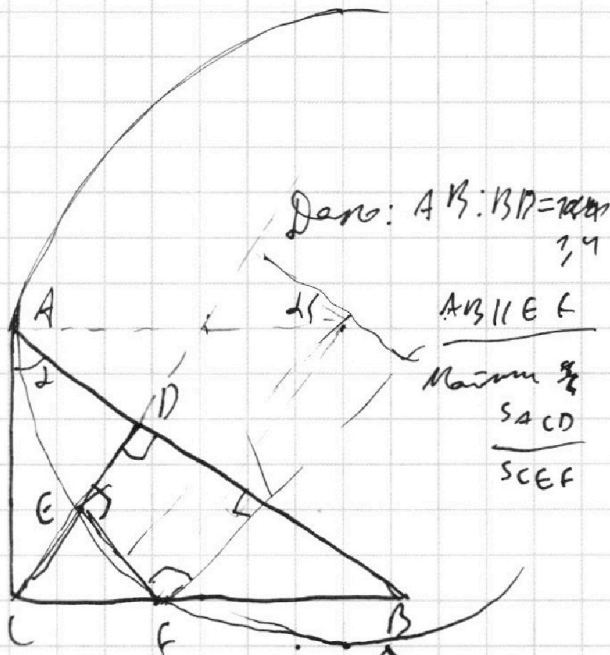
$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$

$\tan^2 \alpha = \frac{5}{2}$

$\tan \alpha > 0$

$\tan \alpha = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{7}}$      $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$   
 $\sin \alpha = \sqrt{\frac{5}{7}}$      $\frac{7}{2} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$



Дано:  $AB:BD = 7:5$

$AB \parallel EF$   
 Максим  $\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

Сделаем замену  ~~$x$~~   $x = \frac{\pi}{2} - t$ . Тогда  $t = \frac{\pi}{2} - x$ .

Решим уравнение  $10 \arccos(\sin(\frac{\pi}{2} - t)) = 9\pi - 2(\frac{\pi}{2} - x)$   
(=)

$$(2) 10 \arccos(\cos t) = 8\pi + 2t \Leftrightarrow$$

$$(2) 5 \arccos(\cos t) = 4\pi + t$$

$$5 \arccos(\cos t)$$

$$0 \leq 5 \arccos(\cos t) \leq 5\pi \Rightarrow -4\pi \leq t \leq \pi$$

1. Пусть  $0 \leq t \leq \pi$

$$5t = 4\pi + t \Leftrightarrow t = \pi$$

2. Пусть  $-\pi \leq t < 0$

$$5 \arccos(\cos t) = -5t$$

$$-5t = 4\pi + t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6t = -4\pi \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}\pi$$

3. Пусть  $-2\pi \leq t < -\pi$

$$5 \arccos(\cos t) = 5(t + 2\pi) = 5t + 10\pi$$

$$5t + 10\pi = 4\pi + t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4t = -6\pi \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2}\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4. Пусть  $-3\pi \leq t < -2\pi$

$$5 \arccos(\cos t) = 5 \arccos \cos(-t - 2\pi) = -5t - 10\pi$$

$$-5t - 10\pi = 4\pi + t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6t = 14\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{7}{3}\pi$$

5. Пусть  $-4\pi \leq t < -3\pi$

$$5 \arccos(\cos t) = 5(t + 4\pi) = 5t + 20\pi$$

$$5t + 20\pi = 4\pi + t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4t = -16\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -4\pi$$

Итак, исходные ур-е равносильны совокупности

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \pi \\ \frac{\pi}{2} - x = -\frac{2}{3}\pi \\ \frac{\pi}{2} - x = -\frac{3}{2}\pi \\ \frac{\pi}{2} - x = -\frac{4}{3}\pi \\ \frac{\pi}{2} - x = -4\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} \\ x = 2\pi \\ x = \frac{17}{6}\pi \\ x = \frac{9}{2}\pi \end{cases}$$

Ответ:  $\left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi; 2\pi; \frac{17}{6}\pi; \frac{9}{2}\pi \right\}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Существует коэффициент  $k$ ; замещение с центром  
в точке  $T$  и коэф.  $k$  превращает окружность  $O_2$

в окружность в вершине. Площадь  $-2k = S$ ,  $-\pi T O_2 =$

$$O_1 T, k = -\frac{S}{2}, \quad \frac{S}{2} T O_2 = O_1 T \Rightarrow S T O_2 = 2 O_1 T$$

$$T O_2 = \frac{2}{S} \cdot S = \frac{2S}{S}, \quad T O_1 = \frac{S}{S} \cdot S = \frac{4S}{S}. \quad \text{3 точки } T \text{ координат}$$

$$\text{нашли } (0; -\frac{4S}{S})$$

Путь угла наклона касательной равен  $\alpha$ .

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{S}{\frac{4S}{S}} = \frac{S}{4S} = \frac{1}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{32}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\tan \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Эти касательные имеют уравн-я } Y = \frac{4\sqrt{2}}{3} X - \frac{4S}{3} \text{ и } Y = -\frac{4\sqrt{2}}{3} X - \frac{4S}{3}$$

Решим систему уравнений

$$\text{Получим } \left| -\frac{S}{6a} \right| \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}. \text{ Найдем } b: \frac{b}{6a} = -\frac{4S}{3} \text{ и проверим}$$

прямую. Она пересечет обе окружности в двух точках

$$\text{Получим } \left| -\frac{S}{6a} \right| \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}. \text{ Если } b \text{ такое, то } Y = \frac{b-Sx}{6a}$$

проходит через точку  $T$ , но она пересечет каждую окружность  
не более, чем в 1 точке. Значит  $T$  не пересечет ни одной.

Значит  $T$  не пересечет вершины.

$$\left| -\frac{S}{6a} \right| > \frac{4\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow \left| \frac{S}{6a} \right| > \frac{4\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow$$

Ср. 2 стр.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + 18y + 77 = y^2 + 18y + 81 + x^2 - 4 = x^2 + (y+9)^2 - 4$$

Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \quad (1) \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

Решим и геометрически,

то есть прямая (1) пересекает обе окружности в двух точках.

Пусть  $a = 0$

$$5x - b = 0$$

$$x = \frac{b}{5} \text{ это вертикальная}$$

прямая.

$b = 0$  задает

вертикальную прямую.

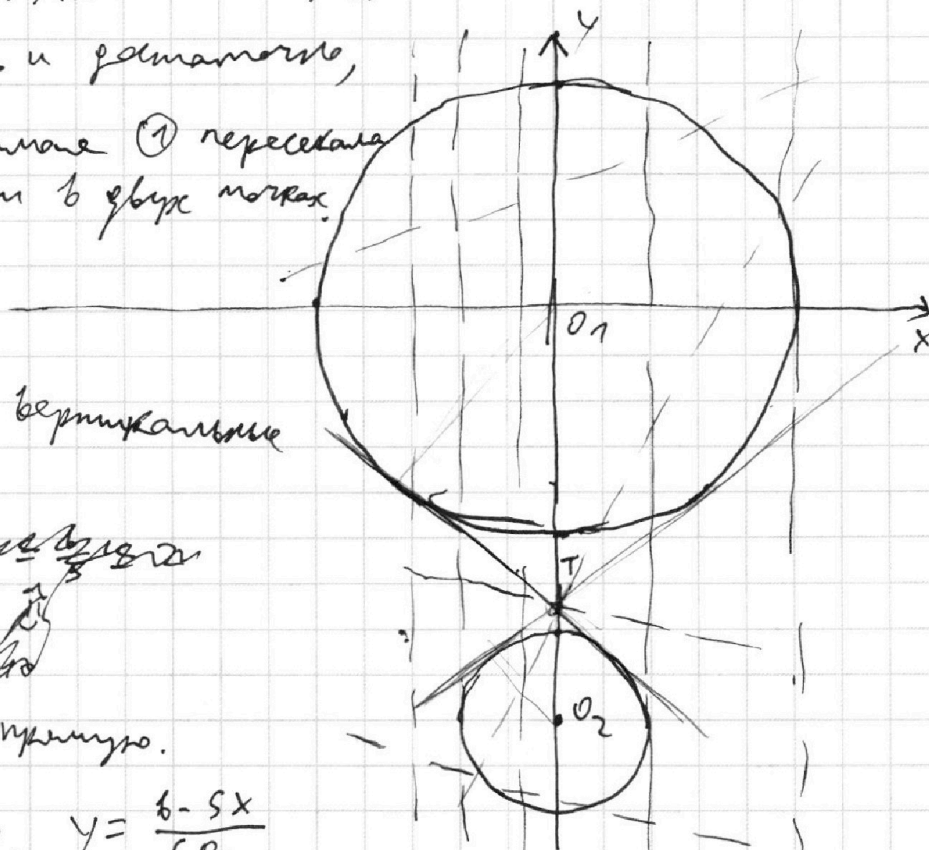
$$\text{Пусть } a \neq 0. \quad y = \frac{b - 5x}{6a}$$

Проведем к окружностям одну касательную (внутреннюю)

Пусть центр верхней окружности - точка  $O_1$ , центр

нижней -  $O_2$ , тогда заданная точка пересечения касательных

$T$  - это точка касания с окружностями



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ a > 0 \\ \frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \\ a < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ a < 0 \\ \frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{35}{24\sqrt{2}} \\ a < 0 \\ a < -\frac{35\sqrt{2}}{48} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{35}{24\sqrt{2}} \\ a < 0 \\ -\frac{5}{6} < \frac{4\sqrt{2}}{7} a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{35\sqrt{2}}{48} \\ a < 0 \\ a > -\frac{35\sqrt{2}}{48} \end{cases}$$

$a = 0$  не подходит.

Ответ:  $\left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48}\right)$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,54) + \log_{0,54} 11 = \log_{0,1254^3} (11^{-13}) - 5 \end{cases}$$

Решим  $x \neq 1, y \neq 2$

~~Решим  $x \neq 1, y \neq 2$~~

~~Используем следующие тождества~~

~~$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \log_x - \frac{2}{3} \log_x \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \\ \log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{\frac{1}{2}y} 11 = \log_{\frac{1}{2}y} - \frac{13}{3} \log_{\frac{1}{2}y} \frac{1}{11} - 5 \end{cases}$$~~

$$(2) \begin{cases} \log_{11}^4 x + \frac{16}{3 \log_{11} x} + 5 = 0 \\ \log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) + \frac{16}{3 \log_{\frac{1}{2}y} 11} - 5 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

~~$$\log_{11} x = \frac{1}{11}$$~~

$$\begin{cases} \log_x 11 \neq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}y} 11 \neq 0 \end{cases}$$

Сделаем замену  $\frac{y}{2} = y_1$  и решим систему

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11} x - 5 \\ \log_{11}^4 y_1 + \frac{1}{\log_{11} y_1} = -\frac{13}{3} \log_{11} y_1 - 5 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} \log_{11}^5 x - \frac{16}{3} = -5 \log_{11} x \\ \log_{11}^5 y_1 + \frac{16}{3} = -5 \log_{11} y_1 \end{cases}$$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~log<sub>11</sub> 8 = 26~~

Решая

сделаем

замену

$\log_{11} 11 = 1$ , и решим систему  
 $\log_{11} 11 = 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{u^4} - 6u = -\frac{2}{3}u - 5 \\ \frac{1}{u^4} + 0 = -\frac{13}{3}u - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16}{3}u = \frac{1}{u^4} + 5 \\ \frac{16}{3}u + \frac{1}{u^4} + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{u^4} - \frac{16}{3}u + 5 = 0 & (1) \\ \frac{1}{u^4} + \frac{16}{3}u + 5 = 0 & (2) \end{cases}$$

t-переменные (1) (2) ~~0~~ -t-переменные (2)

Решая

$$f(u) = 1 - \frac{16}{3}u^5 + 5u^4$$

$$\frac{df}{du} = -\frac{80}{3}u^4 + 20u^3 = -\frac{20}{3}u^3(4u - 3)$$

$$u = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$u \leq \frac{3}{4} \Rightarrow f(u) \geq 0$$

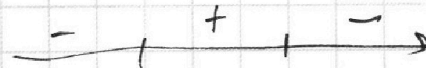
и

$f(100000) < 0 \Rightarrow f(u)$  имеет 1 корень (переходит)

$$\text{Умножив, тогда } \log_{11} X = -\log_{11} Y_1$$

$$\log_{11} XY_1 = 0 \Rightarrow XY_1 = 1 \Rightarrow XY = 2$$

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5 \quad (1)$$

$$\log_{11}^4 (0,54) + \log_{0,54} 11 = \log_{0,12543} (11^{-13}) - 5 \quad (2)$$

① ~~Ищем~~ ~~предельный~~ ~~предел~~ ~~предел~~

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5 \quad (1)$$

~~$$(1) \left(\frac{1}{\log_x 11}\right)^4 - 6 \log_x 11 = \frac{1}{\log_x^3 11} - 5 \quad (1)$$~~

~~$$(1) \frac{1}{\log_x^4 11} - 6 \log_x 11 = \frac{1}{\log_x^3 11} - 5$$~~

$$\log_x^3 \frac{1}{121} = -\frac{2}{3} \log_x 11$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 0$$

Пусть  $x = 11$

~~$$x = 11, 11, 11, 11$$~~

$$1 - 6 = -\frac{2}{3} - 5 \text{ — не выполняется.}$$

Пусть  $\log_x 11 \neq 0$

$$u^5 + \frac{15}{16} u^4 - \frac{3}{16} = 0$$

Сделаем замену  $\log_x 11 = u$  и решим ур-е

$$1 - \frac{16}{3} u^3 + 5u^4 = 0$$

$$\frac{1}{u^4} - 6u = -\frac{2}{3}u - 5 \quad (1)$$

$$\frac{1}{u^4} - \frac{16}{3}u + 5 = 0$$

$$(2) \frac{1}{u^4} - \frac{16}{3}u + 5 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{u^4} + \frac{16}{3}u^4 + 5 = 0$$

$$(2) \frac{3}{u^4} - 16u + 15 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{u^4} - \frac{1}{u} - \frac{16}{3}(u + u^4) = 0$$

$$(2) \frac{3 - 16u^5 + 15u^4}{u^4} = 0$$

$$u^4 - u^4 - \frac{16}{3}(u + u^4) = 0$$

$$(u-u)(u^3+u^4) - \frac{16}{3}(u+u^4) = 0$$

$$(u-u)(u^3+u^4) - \frac{16}{3}(u+u^4) = 0$$

$$u^3 - 0u^4 + 0u^4 - u^3 = \frac{16}{3}$$

$$f(u) = -16u^5 + 15u^4 + 3$$

$$f'(u) = -80u^4 + 60u^3 = 20u^3(4u - 3)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1

$$a = a_1 \cdot 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_4}$$

$$b = b_1 \cdot 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_4}$$

$$c = c_1 \cdot 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_4}, c_1/2$$

$$\log_2 x - \log_2 x = \frac{6}{8} = -\frac{2}{3}$$

$$\log_2 x - \frac{6}{\log_2 x} = -\frac{2}{3} - 5$$

$$\log_2 x - \frac{16}{3} = -5$$

$$\log_2 x + 5 \log_2 x - \frac{16}{3} = 0$$

$$\log_2^5 x + 5 \log_2^4 x + \frac{16}{3} = 0$$

$$\log_2^5 x + \log_2^5 \left(\frac{1}{2}y\right) + 5 \log_2^4 \left(\frac{xy}{2}\right) = 0$$

$$\log_2^5 \left(\frac{xy}{2}\right) \left( \log_2^4 \left(\frac{xy}{2}\right) - \log_2^3 x \log_2 \left(\frac{1}{2}y\right) + \log_2^2 x \log_2^2 \left(\frac{1}{2}y\right) + \log_2 x \log_2^3 \left(\frac{1}{2}y\right) + \log_2^4 \left(\frac{y}{2}\right) \neq 5 \right)$$

$$\log_2^5 \left(\frac{xy}{2}\right) \left( \log_2^4 \left(\frac{xy}{2}\right) - \log_2^3 x \log_2 \left(\frac{1}{2}y\right) + \log_2^2 x \log_2^2 \left(\frac{1}{2}y\right) - \log_2 x \log_2^3 \left(\frac{1}{2}y\right) + \log_2^4 \left(\frac{y}{2}\right) \right) = 0$$

$$\log_2 \left(\frac{xy}{2}\right) \left( \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{xy}{2}} \right)^4 +$$

$$\log_2 \left(\frac{xy}{2}\right) (t^4 - t^3 + t^2 - t + \frac{6}{3}) = 0$$

$$\log_2 \left(\frac{xy}{2}\right) \left( \log_2^4 x + \log_2^4 \left(\frac{y}{2}\right) - \log_2^3 \left(\frac{xy}{2}\right) \left( \log_2^2 x + \log_2^2 \left(\frac{y}{2}\right) \right) \right) =$$

$$12 \quad 5 \quad 12$$

$$40 \quad 2$$

$$12 \quad 5 \quad 73$$

$$10 \quad 5 \quad 15$$

$$9 \quad 6 \quad 15$$

$$16 \quad 5 \quad 28$$

$$12 \quad 5 \quad 15$$

$$9 \quad 5 \quad 147$$

$$(t-1)(t^2+1) + 2$$

$$(t-1)(t^2+1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{2}{3}$

$$\log_{11} x = u$$

$$\log_{11} y_1 = v$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{Пусть } \log_{11} x + \log_{11} y_1 = a$$

$$\log_{11} x \cdot \log_{11} y_1 = b$$

~~$\log_{11} x$~~

$$\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1 = (\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1)^2$$

$$u^4 - u^3 v + u^2 v^2 - u v^3 + v^4 =$$

$$= (u^2 + v^2)^2 - 2u^2 v^2 - u^3 v - u v^3 = (u^2 + v^2)^2 - u^3 v - u v^3 -$$

~~$$u^2 v^2 + 2u^2 v^2 + u^2 v^2 = 0$$~~

~~$$- u^2 v^2 =$$~~

~~$$(u^2 + v^2 + 2uv)^2 - u^3 v - u v^3 - 4uv^2$$~~

~~$$= (a^2 - 2b)^2 - u^3 v - u v^3 - 4uv^2$$~~

~~$$= (a^2 - 2b)^2 - b(a^2 - 2b) - b^2$$~~

~~$$= (a^2 - 2b)(a^2 - 3b) = a^4 - 5ba^2 + 6b^2 - b^2 =$$~~

~~$$= (a^2 + b)(a^2 - 6b)$$~~

~~$$= a^4 - 5ba^2 + 5b^2 = 0$$~~

~~$$a^2 = \frac{5b \pm \sqrt{20b^2}}{2} =$$~~

~~$$= \frac{5b \pm 2\sqrt{5}b}{2}$$~~

~~(или)~~

~~$$\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1 + 9 \log_{11} x \log_{11} y_1 = 0$$~~

~~$$\left(\frac{\log_{11} x}{\log_{11} y_1}\right)^2 + 9 \frac{\log_{11} x}{\log_{11} y_1} + 1 = 0$$~~

~~$$\log_{11} x \log_{11} y_1 = \log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1$$~~

~~$$\left(\log_{11} x + \log_{11} y_1\right)^2 = \left(\frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{2}\right) b \log_{11} x \log_{11} y_1$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = a_1 \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}, \quad a_{1/2}, a_{1/3}, a_{1/5}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}$$

$$b = b_1 \cdot 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}, \quad b_{1/2}, b_{1/3}, b_{1/5}, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$$

$$c = c_1 \cdot 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}, \quad c_{1/2}, c_{1/3}, c_{1/5}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{Z}$$

$$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall i \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \geq 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 6 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 16 \end{cases}$$

$$\frac{1}{u} - 6u = -\frac{2}{3}u - 5 \quad \frac{1}{u^4} - \frac{16}{3}u = 5 \Rightarrow 0$$

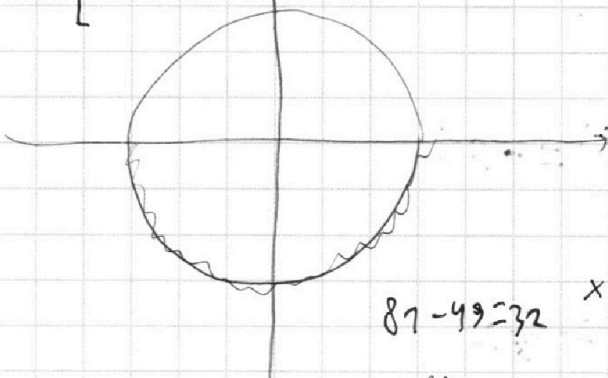
$$\frac{1}{v} + 0 = -\frac{13}{3}v - 5 \quad \frac{1}{v^4} + \frac{16}{3}v = 5 \Rightarrow 0$$

Пусть  $x = \alpha_1$ ,  $y = \beta_1$

$$\begin{cases} 5x + 6y - 6 = 0 \\ 5x = 6 \end{cases}$$

$$6ay = 6 - 5x$$

$$y = \frac{6 - 5x}{6a}$$



$$\frac{y^4 - u^4}{u^4} + \frac{16}{3}(u - 0) = 0$$

$$\frac{1}{u^4} + \frac{16}{3}(u - 0) - 10 = 0$$

$$y = -6x \quad (x=0)$$

$$102 = x + 6y$$

$$102 = t + 5y$$

$$87 - 49 = 32 \quad x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \leq \frac{3\pi + 2\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{7\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{14 + 3}{6}\pi = \frac{17\pi}{6}$$

$$\sqrt{2 + 4\gamma + 4\beta} = 6(x_2 + y_2) \quad u = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} -15a &= 30 \\ 2a + 6 &= 90 & a &= -6 \\ 13a + 6 &= 0 & a &= -108 \\ \text{или} & & b &= 108 \\ -6x + 102 &= 0 & x &= 17 \end{aligned}$$

$$3 - \frac{16 \cdot 3^5}{4^5} + \frac{15 \cdot 3^5}{4^4} =$$

$$= 3 - \frac{3^5}{2^6} + \frac{3^6 \cdot 5}{2^8} = \frac{2^8 - 3^5 \cdot 2^2 + 3^6 \cdot 5}{2^8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) & (\log_{11} x + \log_{11} y_1) (\log_{11}^2 x - \log_{11}^2 y_1 + \log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1 - \\ & - \log_{11} x \log_{11}^3 y_1 + \log_{11}^4 y_1) + 5 = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1 = (\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1) - 2 \log_{11} x \log_{11}^2 y_1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\Rightarrow) & (\log_{11} x + \log_{11} y_1) ((\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1) - \log_{11} x \log_{11} y_1 + \\ & + (\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1 + \log_{11} x \log_{11} y_1) + 5) = 0 \quad (\Rightarrow) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) & \log_{11} x + \log_{11} y_1 ((\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1) - \log_{11} x \log_{11} y_1 - \\ & - \log_{11} x \log_{11} y_1) + 5) = 0 \quad (\Rightarrow) \end{aligned}$$

$$(\Rightarrow) \log_{11} x + \log_{11} y_1 ((\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1) - \log_{11} x \log_{11} y_1)$$

следует заметить  $\log_{11} x = 4$

$$\log_{11} y_1 = 8$$

и обеим функциям  $f(t) = t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$   
 $g(t)$