МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab \vdots 2^8 3^{14} 5^{12}$ (1)

$bc \vdots 2^{12} 3^{20} 5^{17}$ (2)

$ac \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$ (3)

Заметим, что если a, b, c делятся ещё на какие-то простые числа, кроме 2, 3, 5, то их можно разделить на эти числа и условия не перестанут выполняться.

Значит, для мин. произв-я a, b, c делятся только на степени 2, 3, 5.

$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$

$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$

$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$

Тогда из (1): $a_1 + b_1 \geq 8$ (2): $b_1 + c_1 \geq 12$

$a_2 + b_2 \geq 14$ $b_2 + c_2 \geq 20$

$a_3 + b_3 \geq 12$ $b_3 + c_3 \geq 17$

(3): $a_1 + c_1 \geq 14$

$a_2 + c_2 \geq 21$

$a_3 + c_3 \geq 39$

Рассмотрим степени 2:

Заметим, что при $a_1 = 5, b_1 = 3, c_1 = 9$ все рав-ва выполняются, т.е. достигаются наименьшие степени 2 $\Rightarrow a_1 = 5, b_1 = 3, c_1 = 9$

Степени 3:

Заметим, что если все три рав-ва выполняются, то $2a_2 + 2b_2 + 2c_2 = 55$, что противоречит тому, что число нечётное

Тогда увеличим $a_2 + c_2$ на 1, т.е. $a_2 + c_2 = 22$ тогда $a_2 + c_2 + 2b_2 = 14 + 20 = 34$

$\Rightarrow b_2 = 7$

$\Rightarrow a_2 = 7 \Rightarrow c_2 = 13$

т.к. равенства (минимального варианта) не достигаются, а это превышает минимальный лишь на 1, то это наилучший

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Рассмотрим степени 5:

Заметим, что если ~~выполняется~~ достигается равенство в третьем ~~в~~ случае, т.е. ~~третье равен~~

$a_3 + c_3 = 39$, то при $a = 12$, $c = 27$, $b = 0$

первое и второе рав-ство верно, а если взять меньшие суммы, то не выполняется третье $\Rightarrow$ это лучший вариант.

Получаем, что:

$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{12}$

$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3} = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^0 = 2^3 \cdot 3^7$

$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3} = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{27}$ и это наилучший вариант

тогда $abc = 2^{(5+3+9)} \cdot 3^{7+7+13} \cdot 5^{12+27} = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$

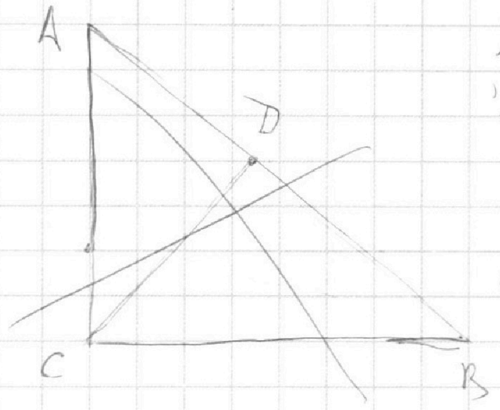
Ответ: $2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$

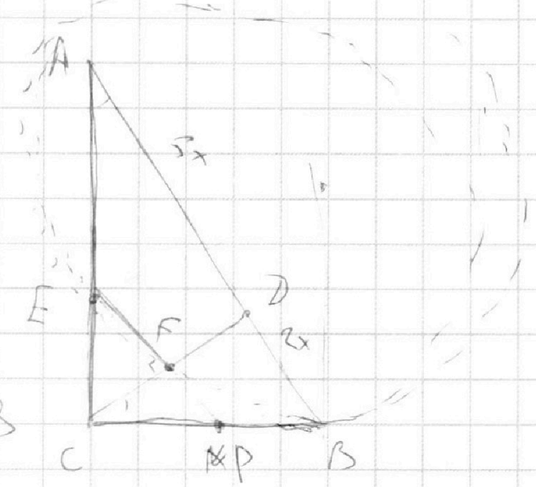
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.





Дано:
$\triangle ABC$,
$\angle ACB = 90^\circ$,
$CD \perp AB$, $D \in AB$,
Окр-сть $\omega \cap BC = B$ (кас.),
$\omega \cap CD = F$,
$\omega \cap AC = E$
$AB \parallel EF$,
$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$
Найти: $\frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle CEF)}$

Решение: 1) Пусть $AD = 5x$, тогда $DB = 2x$

2) ~~т.к. CB - касательная к ω,~~
~~...~~
т.к. $EF \parallel AB$, то $CD \perp EF \Rightarrow \angle CFE = 90^\circ$,
$\angle CEF = \angle CAD$ как соотв. при $EF \parallel AB$, секущ. AE

3) По св-ву ~~пропорц.~~ пропорц. отрезков в прямоуг. тр-ке,
$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = x\sqrt{10}$
Тогда $CB = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = x\sqrt{14}$ (в $\triangle DBC$ по теореме Пифагора)
$AC = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = x\sqrt{35}$ (в $\triangle ACD$ по теор. Пифагора)

4) $EF \cap BC = P$

5) $\triangle PCE \sim \triangle BCA$ (по 2 углам, т.к. $AB \parallel EF$)
$\Rightarrow \frac{PE}{AB} = \frac{CP}{BC}$, пусть $\frac{CP}{BC} = k$
тогда $PE = k \cdot 7x$, ~~FP=~~
~~△FCE ~ △DCA~~ $\triangle PCF \sim \triangle BCD$ (по 2 уг., -"-)
$\Rightarrow \frac{PF}{DB} = \frac{CP}{CB} = k$
$\Rightarrow PF = k \cdot 2x$

6) $PB = BC - CP = BC - BC \cdot k = BC \cdot (1-k)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

7) Заметим, что PB — кас. к ω, $P-F-E$ — секущ. к ω $\Big\}$ из точки P

$\Rightarrow$ $PB^2 = PF \cdot PE$

$BC \cdot (1-k)^2 = k^2 \cdot 2x \cdot 7x$

$14x^2 \cdot (1-k)^2 = 14x^2 \cdot k^2$

$14x^2 \cdot \left(k^2 - (1-k)^2\right) = 0$

т.к. $x \neq 0$ (иначе $AB = 0$), то

$k^2 = (1-k)^2$

$k^2 = k^2 - 2k + 1$

$1 - 2k = 0$

$k = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $CP = \frac{BC}{2}$ $\Rightarrow$ т.к. $PE \parallel AB$, P — сер. BC, то PE — ср.л. в $\triangle ABC$ (по призн.)

$\Rightarrow$ ~~ЯЯ~~ E — сер. AC, $EP = \frac{7x}{2}$, $FP = \frac{2x}{2} = x$ $\Rightarrow$ $EF = \frac{7x - 2x}{2} = \frac{5x}{2}$

8) Заметим, что $S(\triangle CEF) = \frac{EF}{EP} \cdot S(\triangle PEC) = \frac{EF}{EP} \cdot S(\triangle ABC) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$

$= \frac{5}{7 \cdot 4} \cdot S(\triangle ABC) = \frac{5}{28} S(\triangle ABC)$

$\Rightarrow$ $\frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle CEF)} = \frac{28}{5}$

Ответ: $\frac{28}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 3.

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

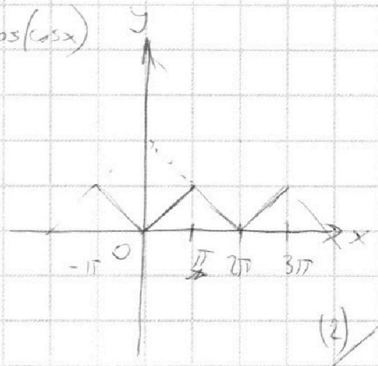
т.к. $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x)$

$10 \cdot \frac{\pi}{2} - 10\arccos(\cos x) = \pi - 2x$

$4\pi = 10\arccos(\cos x) - 2x$

$x + 2\pi = 5\arccos(\cos x)$

$y = \arccos(\cos x)$



1. $x \in \cancel{[0;\pi]}\ [0;\pi)$:

$\Rightarrow \arccos(\cos x) = x$

$x + 2\pi = 5x$

$2\pi = 4x$

$x = \frac{\pi}{2}$

2. $x \in [\pi; 2\pi)$

$\arccos(\cos x) = 2\pi - x$

$x + 2\pi = 10\pi - 5x$

$6x = 8\pi$

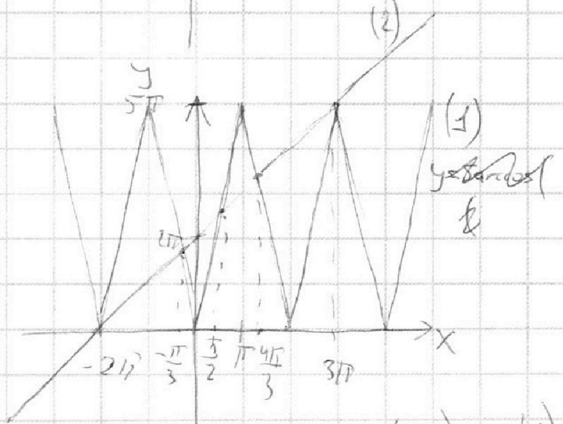
$x = \cancel{\frac{8}{6}}\ \frac{4}{3}\pi$

3. $x \in [2\pi; 3\pi)$

$x + 2\pi = 5x - 10\pi$

$12\pi = 4x$

$x = 3\pi$, не принадл. промежутку.



$\begin{cases} y = \arccos(\cos x) \cdot 5 & (1) \\ y = x + 2\pi & (2) \end{cases}$

4. $x \in [3\pi; 4\pi)$: $\arccos(\cos x) = 4\pi - x$

$x + 2\pi = \cancel{8\pi}\ 20\pi - 5x$

$6x = 18\pi$ $x = 3\pi$

5. $x \in [-\pi; 0)$: $\arccos(\cos x) = -x$

$2\pi + x = -x \cdot 5$

$\cancel{x = \frac{\pi}{6}}\ 6x = -2\pi$

$x = -\frac{\pi}{3}$

6. $x \in [-2\pi; \pi)$: $\arccos(\cos x) = x + 2\pi$

$x + 2\pi = 5 \cdot (x + 2\pi)$

$4 \cdot (x + 2\pi) = 0$

$x = -2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Заметим, что т.к. область значения
$\arccos(t)$ — $[0;\pi]$, то
область значения $5\arccos(\cos x)$ — $[0;5\pi]$

~~ex~~ при $x > 3\pi$ $x+2\pi > 5\pi$

при $x < -2\pi$ $x+2\pi < 0$

$\Rightarrow$ на $(-\infty;-2\pi)\cup(3\pi;+\infty)$ нет корней

$\Rightarrow$ т.к. мы рассмотрели

$[-2\pi;3\pi]$ и нашли все корни на нём, то ... - все корни

данного уравнения

$\Rightarrow$ Ответ: $-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases}$$

такие a, что найдутся b при которых имеет 4 решения

Заметим, что $(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \iff \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=36 \end{array}\right.$

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=36 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{ax}{3}+\frac{4b}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=36 \end{array}\right. \end{cases}$$

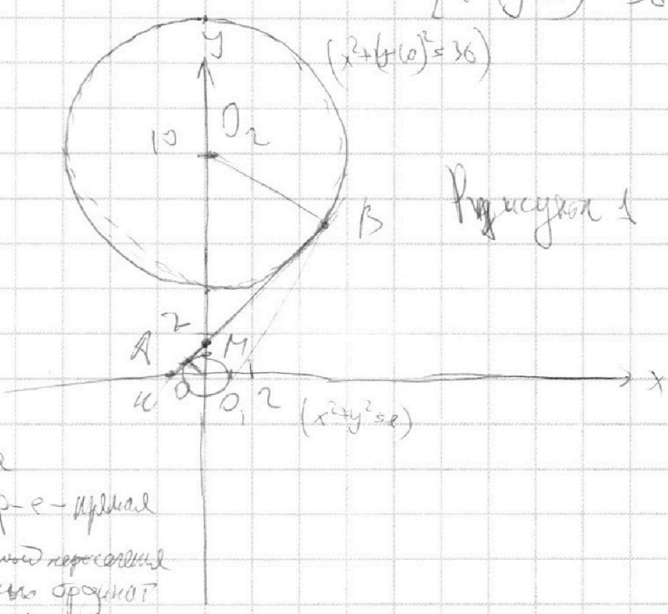


Рисунок 1

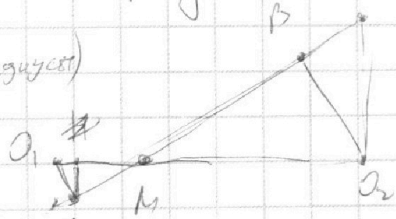
Заметим, что совокупность в системе — две окр-сти, а первое ур-е — прямая с к-том $\frac{a}{3}$ и точкой пересечения с осью ординат $(0; \frac{4b}{3})$

(Рассмотрим при $a \geq 0$)

Найдем ур-е общей внутр. касательной к двум окр-стям:

O_1, O_2 — центры, A, B — точки касания, $M = O_1O_2 \cap AB$

Рисунок 2



$O_1A=1$ (радиусы)
$O_2B=6$
$O_1O_2=10$

$\triangle O_1AM \sim \triangle O_2BM$ (по 2 углам, один — прямой, другой — вертик.)

$\Rightarrow \frac{O_1M}{O_2M}=\frac{O_1A}{O_2B}=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow O_1M=\frac{1}{6+1}\cdot 10=\frac{10}{7}$

Тогда $AM=\sqrt{O_1M^2-O_1A^2}=\sqrt{\frac{100}{49}-1}=\frac{\sqrt{51}}{7}$

Тогда ~~AK~~ $\tg \angle AO_1M=\frac{AM}{AO_1}=\frac{\sqrt{51}}{7}$

$AM \cap O_2 = K$ $\angle MKO_1 = 90° - \angle MO_1A = \angle AO_1M$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Тогда т.к. коэф. при x в ур-и прямой равен tg угла между Ox и этой прямой, то

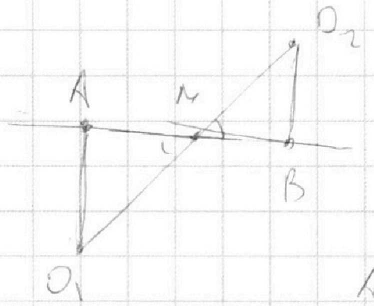
$\frac{a}{3} = tg\angle AO_1M = \frac{\sqrt{51}}{7}$, а $\frac{4b}{3} = \frac{10}{7}$ – ордината точки M

$b = \frac{30}{28}$

$\Rightarrow a = \frac{3\sqrt{51}}{7}$,

~~Заметим, что~~ Рассмотрим:

Рисунок 3.



В данном случае это не радиусы, а просто перпендикуляры

$AO_1 = O_1M \cdot \cos\angle AO_1M$

$O_2B = O_2M \cdot \cos\angle MO_2B = O_2M \cdot \cos\angle AO_1M$ т.к. углы равны

$\Rightarrow AO_1 + O_2B = \cos\angle AO_1M \cdot (O_1M + O_2M) = \cos\angle AO_1M \cdot O_1O_2 = 10\cos\angle AO_1M$

Заметим, что при $tg\angle AO_1M = \frac{\sqrt{51}}{7}$ $\cos\angle AO_1M = \frac{7}{10}$

значит, при $tg\angle AO_1M \le \frac{\sqrt{51}}{7}$ $\cos\angle AO_1M \ge \frac{7}{10}$ (т.к. $tg\uparrow$ на $[0;\frac{\pi}{2}]$, $\cos\downarrow$ на $[0;\frac{\pi}{2}]$)

Получаем, что

$AO_1 + O_2B \ge 7 =$ ~~R+r~~ сумма радиусов окр-стей

Значит какое-то из расстояний от прямой $y = \frac{ax}{3} + \frac{b \cdot 4}{3}$ ~~будет~~ до окр-стей будет больше, чем ~~или~~ равно радиус

$\Rightarrow$ будет 1 или 0 точек пересечения, а нам нужно, чтобы с каждой окр-стью было 2 точки пересечения (чтобы было 4)

Также заметим, что при $tg\angle AO_1M > \frac{\sqrt{51}}{7}$ прямая, проходящая через $M(0;\frac{10}{7})$ и имеющая tangent угла наклона ~~больше~~ равной $tg\angle AO_1M$, пересекает радиусы окр-стей с рисунка 2, т.е. пересекает обе окружности $\Rightarrow$ имеет 4 точки пер.

$\Rightarrow$ система имеет 4 решения

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Получаем, что при $a > \frac{3\sqrt{51}}{7}$

~~если~~ можно ~~взять при~~ $b = \frac{30}{28}$ и будет 4 точки пересечения,

а при $a \le \frac{3\sqrt{51}}{7}$ не получится, чтобы было 4 точки пересечения

~~Ответ:~~
Заметим, что график ~~$y = 0$~~ совокупности симметричен отн. оси ординат

Значит, при $a < 0$ будет всё то же самое, но с минусом,
т.е., если подходит a_0, то $-a_0$ тоже подходит

Значит, при $a < 0$ подходит $a < -\frac{3\sqrt{51}}{7}$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

Пусть $\log_5(2x) = t$, тогда

т.к. $\log_{2x}5 = \dfrac{1}{\log_5 2x}$, что

$t^4 - \dfrac{3}{t} = \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{t} - 3$, т.к. $\log_{8x^3}625 = \log_{(2x)^3}5^4 = \dfrac{4}{3}\log_{2x}5$

$\dfrac{3t^5 - 9 - 4 + 9t}{3t} = 0$

$\dfrac{3t^5 + 9t - 13}{3t} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^5 + 9t - 13 = 0 \quad (1) \\ 3t \neq 0 \end{cases}$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}0{,}2 - 3$

Пусть $\log_5 y = p$, тогда

$p^4 + \dfrac{4}{p} = -\dfrac{1}{3p} - 3$

$\dfrac{3p^5 + 12 + 1 + 9p}{3p} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3p^5 + 9p + 13 = 0 \quad (2) \\ p \neq 0 \end{cases}$

~~Заметим, что~~

Пусть $f(t) = 3t^5 + 9t - 13$

$g(p) = 3p^5 + 9p + 13$

тогда $f'(t) = 15t^4 + 9$

$g'(p) = 15p^4 + 9$

Заметим, что т.к. $f'(t) > 0$ при всех t, $g'(p) > 0$ при всех p, то

ф-ции возр., значит, у них не более одного корня на $\mathbb{R}$

(т.к. область значений логарифма $- \mathbb{R}$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Также заметим, что если есть $t = t_0$, является решением системы (1), то $p = -t_0$ является решением системы (2):

$3t_0^5 + 9t_0 - 13 = 0$ – первое ур-е системы (1) (пусть при t_0 верно)

Подставим в первое ур-е системы (2) $-t_0$:

$3(-t_0)^5 + 9(-t_0) + 13 = 0$

$-3t_0^5 - 9t_0 + 13 = 0$

$3t_0^5 + 9t_0 - 13 = 0$

верно из предположения.

Заметим, что $f(1) = 3 + 9 - 13 = -1 < 0$

$f(2) = 3 \cdot 32 + 9 \cdot 2 + 13 = 96 + 5 = 101 > 0$

$\Rightarrow$ в силу непрерывности f и g (т.к. это многочлен от переменной),

существует $1 < t_0 < 2$: $f(t) = 0$

Значит, $\begin{cases} \log_5 2x = t_0 \\ \log_5 y = -t_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \log_5 2x + \log_5 y = 0$

$\begin{cases} \log_5 2xy = 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 2xy = 1$

$xy = \frac{1}{2}$

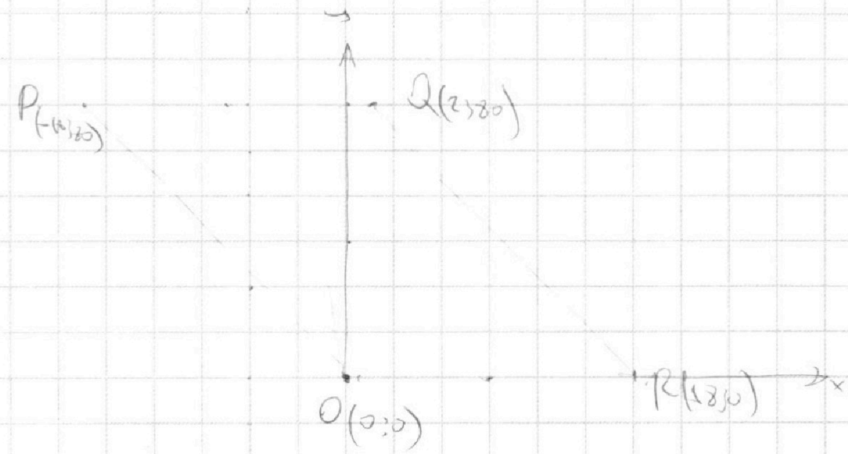
Ответ: $\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

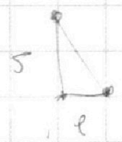
Задача 6.



Заметим, что PO:

$y = -5x$

т.е. $y + 5x = 0$



Рассмотрим прямые вида

$y + 5x = 5 \cdot n$, $0 \le n \le 18$

при $n = 0$ – OP, $n = 18$ – RQ, при $0 < n < 18$ – прямая, ей пар-ая, проходящая через целочисленные точки на OR

тогда заметим, что ~~у всегда для всех точек на прямых~~

на прямых l_1: $y + 5x = 5n$

l_2: $y + 5x = 5n + 45$ ~~Каждая которая~~ для

любых $A \in l_1$, $B \in l_2$ рав-во из условия $(5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45)$ выполняется

Значит, нам нужны все наборы таких пар прямых

l_1: $y + 5x = 5n$

$y + 5x = 5(n + 9)$ Наборы: $n = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$

таких наборов ~~9~~ 10

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Далее рассмотрим, сколько вариантов выбрать точку с ц/г координатами на каждой прямой

$y+5x=5n$

Знаем, что $0 \leq y \leq 80$, а также, что

$x = n - \frac{y}{5}$ Значит,

$\begin{cases} 0 \leq y \leq 80 \\ y \vdots 5 \end{cases}$

$y = 0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80$

17 вариантов выбрать точку с ц/г координатами на прямой

значит выбрать 2 точки (на каждой из 2 прямых по одной)

$17 \cdot 17 = 289$ вариантов

Значит, у нас ~~12~~ 10 наборов по 289 вариантов каждый, никакие из вариантов не повторяются

$\Rightarrow$ всего способов $\cancel{12} \, 10 \cdot 289 = \cancel{2601} \; 2890$

$\cancel{289 \cdot 9 = 2601}$

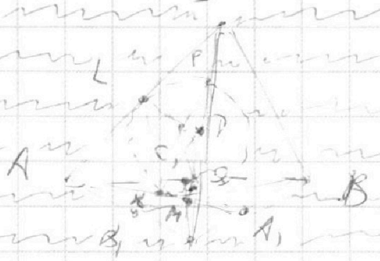
Ответ: 2890.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Дано: $SABC$ – тр. пирамида
AA_1, BB_1, CC_1 – медианы,
$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = M$,
$\Omega \cap AS = M_3 L$,
$\Omega \cap (ABC) = K$, $K \in AM$,
$\Omega \cap SM = \{P; Q\}$, $SP = MQ$,
$S(\triangle ABC) = 100$, $BC = 16$

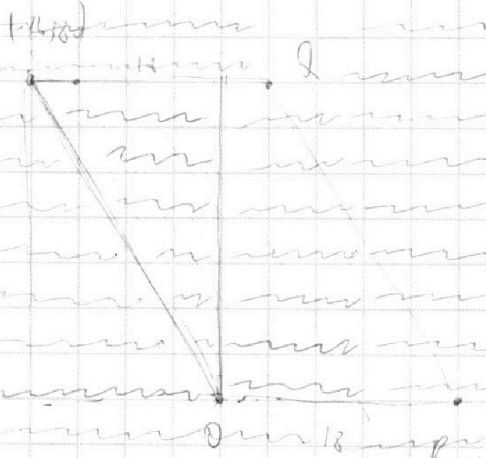
а) Найти: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$

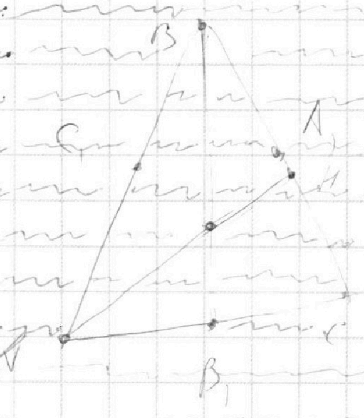
б) $\Omega \cap (BCS) = N$, $SN = 4$,
$R(\Omega) = 5$
Найти: $\cancel{\angle ABC}$ $\angle A(BC)S$

Решение:

1) т.к. $SP = MQ$, то
середина SM – середина PQ

2) D.и.: D – сер. SM





$\times 36$
36

18

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121
144 169 196 225 256 289 324 361 400 441 484 529 576 625

$5x_1 + y_1 = -5x_2 - 5y_2 = 45$

676 729 784 841 900 961 1024 1089 1156 1225 1369