



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- 5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
- [6 баллов] Дано треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2\beta_3 = 21 \quad ; \quad \beta_3 = \frac{21}{2} \quad ; \quad \beta_1 = \beta_3 - 3 = \frac{21-6}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\beta_2 = 10 - \beta_1 = \frac{20-15}{2} = \frac{5}{2}, \text{ однако малое}$$

невозможно, т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 13 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 18 \end{array} \right. + ; \quad 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 41$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 20,5$$

абс_{min} достигается при $(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)_{\min}$,
также $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 21$$

$$10 + \beta_3 = 21$$

$$\beta_3 = 11$$

$$\beta_1 = 18 - \beta_3 = 7; \quad \beta_2 = 13 - \beta_3 = 2,$$

малое возможное

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 10 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 10 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 13 \end{array} \right. \Rightarrow 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geq 53$$
$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 26,5$$

также $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 27 - \min$

$$\gamma_3 = 27 - 10 = 17; \quad \gamma_2 = 27 - 30 = -3 -$$

малое невозможное, ~~также~~ ~~недопустимо~~, ~~также~~

~~$$\gamma_3 \neq 30; \quad \gamma_3 \neq 13 - (\gamma_1 + \gamma_2) = 13 - 17 = -4$$~~

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 27 - 3 = 24$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N} ; \quad N_1. \quad \begin{array}{c} 9 & 10 & 10 \\ ab : 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ bc : 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ ac : 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}$$

$a b c_{\min} ?$

$a b c$ будет наименьшим, если $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ^{нечетные} ~~нечетные~~

a, b, c - степенны 2, 3 и 5

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} ; \quad b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}, \text{ при этом}$$

из ул: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 9 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 14 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 19 \end{cases}$; $\begin{cases} \alpha_2 = 9 - \alpha_1 \\ 9 - \alpha_1 + \alpha_3 = 14 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 19 \end{cases}$

(если ^{нечетные} ~~четные~~
^{минимальные}
и равенство возможно)

$$9 + 2\alpha_3 = 33$$

$$2\alpha_3 = 24$$

$$\alpha_3 = 12$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 7 + 2 + 12 =$$

$$= 21$$

$$\alpha_1 = 9 + \alpha_3 - 14 = 9 - 2 = 7$$

$$\alpha_2 = 9 - \alpha_1 = 2$$

окончательно: $\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 10 \\ \beta_2 + \beta_3 = 13 \\ \beta_1 + \beta_3 = 18 \end{cases}$

$$\begin{cases} \beta_3 - \beta_1 = 3 \\ + \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н.у. $\gamma_2 \in \mathbb{Z}$, $\gamma_2 \geq 0$; $\gamma_1, \gamma_3 \neq 0$:

$(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)_{\min} = 30$, такое возможно при $\gamma_2 = 0$

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_3 = 30 \\ \gamma_1 > 10 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 30 \\ \gamma_3 > 13 \end{cases}$$

Такое может быть при $\gamma_1 = 10$, $\gamma_3 = 20$,
при этом произведение a, b и c будет \min ,
 $(abc)_{\min} = 2^{(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} \cdot 3^{(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} \cdot 5^{(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} = 2^{10} \cdot 3^{20} \cdot 5^{30} = 6 \cdot 5^{30}$

Ответ: $6 \cdot 5^{30}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

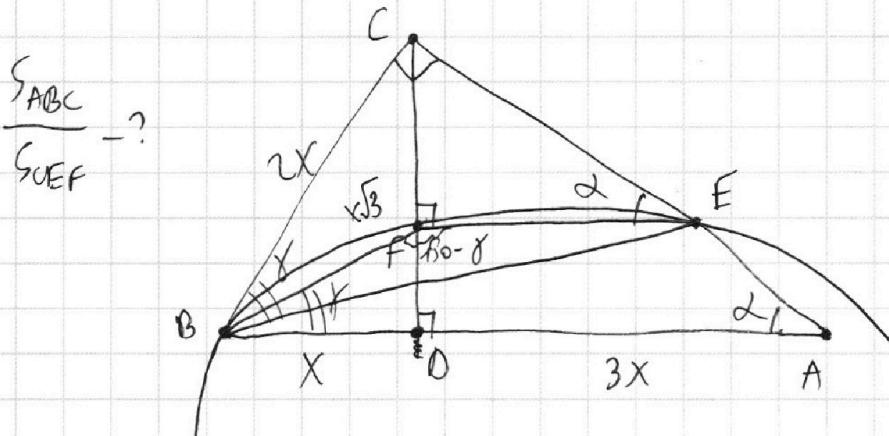
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AB \parallel FE$

предположим BO за x , $AO = 3x$

но сб-бы было. к чин: $CO^2 = x \cdot 3x$

$$CO = x\sqrt{3}$$

$$\angle CAD = \angle CEF = 2, \quad \tan 2 = \frac{CO}{AD} = \frac{x\sqrt{3}}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow 2 = 30^\circ$$

(BC) -кас. к окр -ни, поэтому

$\angle CBE = \frac{\angle BE}{2}$, как угол между касан. и хордой

$\angle BFE = 180^\circ - \frac{\angle BE}{2} = 180^\circ - \angle CBE$ как бин.

$\angle EFD = 90^\circ$, тогда

$$\angle BFD + 90^\circ = \angle BFE$$

$$\angle BFD = 180^\circ - \angle CBE - 90^\circ = 90^\circ - \angle CBE$$

предположим $\angle CBE$ за γ

$$\text{б} \rightarrow \text{CBE}: \quad \tan \gamma = \frac{CE}{CB} \quad \left. \right\} \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{FO}{x}$$

$$\text{б} \rightarrow \text{BFD}: \quad \tan \gamma = \frac{FO}{x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

no Tl Тупо f₂ BC0:

$$x^2 + 3x^2 = CB^2 \Rightarrow CB = 2x$$

$$\frac{CE}{2x} = \frac{FD}{x}$$

$$CE = 2FD$$

Таким FD = t , CE = 2t

$$CF = x\sqrt{3} - t ; f_2, CFE :$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{CF}{CE}$$

$$\frac{x\sqrt{3} - t}{2t} = \frac{1}{2} ; x\sqrt{3} - t = t \\ x\sqrt{3} = 2t$$

$$t = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CF = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

no Th Тупо: $3x^2 + 9x^2 = AC^2$

$$AC = 2x\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2x\sqrt{3} = 2x^2\sqrt{3}$$

$S_{CEF} = \frac{1}{2}$ $\triangle CDA \sim \triangle CEF$ no 2c ,

$$\text{Morgan} \quad \frac{FE}{AD} = \frac{CF}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow FE = \frac{3x}{2}$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3x}{2} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{8}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2x^2\sqrt{3} \cdot 8}{3x^2\sqrt{3}} = \frac{16}{3} ; \text{Omfem: } \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{если } k = -1: \quad 6x = -8\pi; \quad x = -\frac{4}{3}\pi$$

$$\text{если } k = -2: \quad 6x = -16\pi; \quad x = -3\pi$$

$$\text{если } k = 0: \quad 6x = 2\pi; \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{если } k = 1: \quad 6x = 12\pi; \quad x = 2\pi$$

$$(2) \quad \frac{5\pi}{2} + 5x + 10\pi n = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -2\pi - 10\pi n$$

$$x = -\pi - 5\pi n$$

$$-6\pi \leq x \leq 4\pi$$

$$\text{если } n = -1: \quad x = -\pi + 5\pi = 4\pi; \quad x = 2\pi$$

$$\text{если } n = 0: \quad x = -\pi; \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{если } n = 1: \quad x = -\pi - 5\pi = -6\pi; \quad x = -3\pi$$

Ответ: $\{-3\pi; -\frac{4}{3}\pi; \frac{\pi}{3}; 2\pi; -\frac{\pi}{2}\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

Таким $\arcsin(\cos x) = 2$, тогда:

$$\begin{cases} 5\alpha = x + \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha = \cos x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad & -\frac{5\pi}{2} \leq 5\alpha \leq \frac{5\pi}{2} \\ & -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \\ & \boxed{-3\pi \leq x \leq 2\pi} \end{aligned}$$

$$2) \quad \sin \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad (1) \quad & \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2} \\ & 6x = 2\pi + 10\pi k \\ & -18\pi \leq 6x \leq 12\pi \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Также мы получаем отк-о 0_x ,
для прямой $l_2 \quad \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(180 - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{\sqrt{14}}$
Угол β в $\operatorname{tg} \beta \in (-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (0; \frac{\pi}{2})$,
тогда $\operatorname{tg} \beta = -\frac{a}{2}$

нашёл где расположек суть $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \beta = 0 \\ a = 0 \end{array} \right.$,
но такую возможность решить неизвестно.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{a}{2} > -\frac{5}{\sqrt{14}} \text{ l.(-2)} \\ -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{14}} \text{ l.(-2)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a < \frac{10}{\sqrt{14}} \\ a > -\frac{10}{\sqrt{14}} \end{array} \right\}$$

Отвем: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{14}}, \frac{10}{\sqrt{14}} \right)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найти a , при котором сумма b , такое что

$$\begin{cases} ax + y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 реш.

$$ax + y - 3b = 0$$

$$y = -ax + 3b$$

$$y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}$$

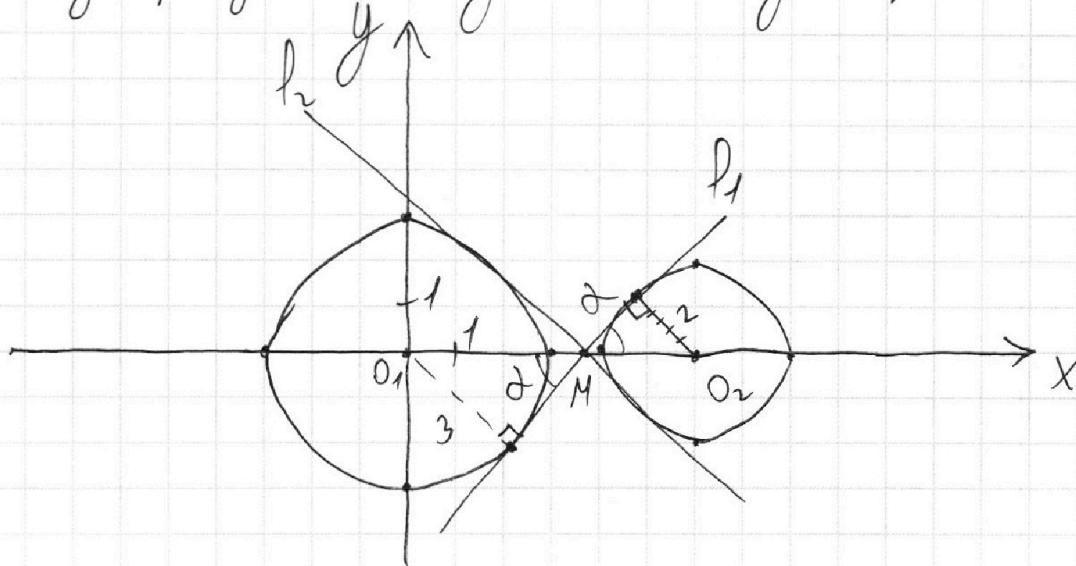
$$\begin{cases} y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2} \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 - 36 + y^2 + 32 = 0$$

$$\begin{cases} y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2} \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Изобразим эту систему графически



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = 9 \rightarrow \text{окружность } R=3, O_1(0;0)$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4 \rightarrow \text{окружность } R=2; O_2(6;0)$$

$$y = -\frac{\alpha x}{2} + \frac{3}{2}b \text{ - прямая (если } \alpha \neq 0)$$

1) Рассмотрим случай $\alpha = 0$:

$$y = \frac{3}{2}b \text{. Каноническая форма } b, \text{ если}$$

4 решения (например, $b=0$)

$\alpha=0$ б ответ

2) при $\alpha \neq 0$ задача зависит от b ,

если $b > 0$ прямая пересекает окружность

Когда $b < 0$ прямая не пересекает окружность

При $b = 0$ прямая y параллельна O_1O_2

$$O_1M + O_2M = 6 \text{. Тогда } \angle O_1MO_2 = 90^\circ$$

$$\sin 2\angle O_1MO_2 = \frac{1}{O_2M} = \frac{3}{O_1M}$$

$$\frac{2}{6-O_1M} = \frac{3}{O_1M}; 2O_1M = 18 - 3O_1M$$

$$5O_1M = 18; O_1M = \frac{18}{5}$$

$$\sin 2\angle O_1MO_2 = \frac{18/5}{\sqrt{36-18^2/25}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\tan 2\angle O_1MO_2 = \frac{5}{\sqrt{11}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x < 1$$

$$(2) \frac{7}{2} \log_{5y} 3 = \log_3^4(5y) + 8 > 0$$

$$\log_{5y} 3 > 0$$

$$\log_{5y} 3 - \log_{5y} 1 > 0$$

$$(5y-1)(3-1) > 0$$

$$5y > 1$$

$$(*) (\log_3 5y - \log_3 x) \log_3 x \log_3 5y / \log_3^2 5y \log_3^2 x = \frac{7}{2} > 0$$

$$(1)+(2): \cancel{\log_x 3 - \log_{5y} 5y}$$

$$\frac{7}{2}(\log_x 3 - \log_{5y} 3) + \log_3^4 x + \log_3^4 5y = -16$$

$$\log_x 3 - \log_{5y} 3 = \frac{2}{7}(-16 - \log_3^4 x - \log_3^4 5y) < 0$$

$$\log_x 3 - \log_{5y} 3 < 0, \text{ тогда}$$

$$\text{M.U. } \log_3^2 5y + \log_3^2 x > 0, \text{ но } \cancel{\log_3^2 5y + \log_3^2 x > 0}, \text{ т.к. } \log_3 x \log_3 5y < 0,$$

т.к. на 201-my эмоции не моя

Ответ: $\frac{1}{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 5.

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y^2} (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$xy - ?$

OP3: $\left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq \pm 1 \\ y > 0 \\ y \neq \pm \frac{1}{5} \end{array} \right.$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 = -8 \quad (1) \\ \log_3^4 (5y) - \frac{7}{2} \log_{5y} 3 = -8 \quad (2) \end{cases}$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 = \log_3^4 (5y) - \frac{7}{2} \log_{5y} 3$$

$$\log_3^4 (5y) - \log_3^4 x = \frac{7}{2} (\log_x 3 + \log_{5y} 3)$$

$$(\log_3^2 (5y) - \log_3^2 x)(\log_3^2 (5y) + \log_3^2 x) = \frac{7}{2} \left(\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\log_3(5y) - \log_3 x)(\log_3(5y) + \log_3 x)(\log_3^2 5y + \log_3^2 x) = \\ = \frac{7}{2} \left(\frac{\log_3 x + \log_3 5y}{\log_3 x \log_3 5y} \right)$$

$$\log_3\left(\frac{5y}{x}\right) \cdot \log_3(5xy) \cdot (\log_3^2 5y + \log_3^2 x) = \\ = \frac{7}{2} \cdot \frac{\log_3(5xy)}{\log_3 x \log_3 5y}$$

1) если $\log_3(5xy) = 0$:

$$\log_3(5xy) = \log_3 1$$

9-ая $\log_{xy}^{(t)} = \log_3 t$ показательна на $O(y^t)$,

тогда $5xy = 1$

$$xy = \frac{1}{5}$$

2) если $\log_3(5xy) \neq 0$:

$$\log_3\left(\frac{5y}{x}\right) \cdot \log_3 x \cdot \log_3 5y \cdot (\log_3^2 5y + \log_3^2 x) = \frac{7}{2}$$

$$\frac{7}{2} \log_x 3 = -8 - \log_3^2 x < 0$$

(1) $\log_x 3 < 0$

$$\log_x 3 - \log_x 1 < 0 \\ (x-1)(\frac{1}{3}-1) < 0$$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

Логарифмы по основанию 3:

$$\begin{cases} \log_3 x = t \\ \log_3 5y = k \\ \log_3 243 = 5 \\ \log_3 25y^2 = 5 \\ \log_3 3^{11} = 11 \end{cases}$$

Условия для решения:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq \pm \frac{1}{5} \end{cases}$$

Логарифмы по основанию 5y:

$$\begin{cases} \log_{5y} x = ? \\ \log_{5y} 3 = ? \\ \log_{5y} 243 = 5 \\ \log_{5y} 25y^2 = 5 \\ \log_{5y} 3^{11} = 11 \end{cases}$$

Решение системы:

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{1}{2} \cdot 5 \log_3 3 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{1}{2} \cdot 11 \log_{5y} 3 - 8 \end{cases}$$

Сокращение:

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 - \frac{5}{2} \log_3 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 - \frac{11}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

Сокращение с помощью формулы разности квадратов:

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 (5y) - \frac{7}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

Сокращение с помощью формулы разности кубов:

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 = \log_3^4 5y - \frac{7}{2} \log_{5y} 3 \\ \log_3^4 x - \log_3^4 5y = -\frac{7}{2} (\log_x 3 + \log_{5y} 3) \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\log_3 x = t$; $\log_3 5y = k$; $x > 0$, $y > 0$

$\frac{t}{2} \log_3 3 = -8 - \frac{4t}{3} \Rightarrow x = 3^{-8 - \frac{4t}{3}}$; $3^k = 5y$; $3^t > 0$

$\log_3 x + \log_3 5y = t+k$; $xy = \frac{3}{5}$

$x < 5y$ перенесем в наше ур-ие:

$(k-t) + k(k^2 + t^2) = \frac{7}{2}$

$\log_3 x < 0$; $\log_3 3 < \log_3 x < \log_3 5$; $x < 1$; $(t+k)^2 - 2tk =$

или $k+t = p$; $t = p - (k+1)$

$t-k = \log_3 \left(\frac{x}{5y}\right)$; $p = k^2 + 2tk + t$

$\log_3 x + \log_3 5y > 1$; $5y > 1$; $\log_3 5y > -\log_3 x$

$\log_3 x \log_3 5y - 2tk = k^2 + t^2$

$t-k = \log_3 \frac{x}{5y}$; $(k-t) + k(p^2 - 2tk) = \frac{7}{2}$

$t^2 - t^2k + tk^2 - k^3 + \frac{7}{2}tk =$

$\begin{cases} t^4 - \frac{7}{2}t^2k = -8 \\ k^4 - \frac{7}{2}tk = -8 \end{cases}$

$t^4 = (t-k)(t^2 + tk + k^2)$

$t^4 + k^4 + \frac{7}{2}(t-k)k^2 = 0$

$t^4 - k^4 + \frac{7}{2}tk^2 = 0$

$t^4 - k^4 + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k} \right) = 0$

$\frac{t^4 - k^4}{t^2 - k^2} + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k} \right) = 0$

$\frac{(t^2 - k^2)(t^2 + k^2)}{(t-k)(t+k)} + \frac{7(t+k)}{2tk} = 0$

$(t-k)(t+k)(t^2 + k^2) + \frac{7(t+k)}{2tk} = 0$

$(k+t)(t-k)(t^2 + k^2) + \frac{7}{2} = 0$

$t-k=0$; $t^2 + k^2 = 1$; $(t^2 + k^2)(t-k) + \frac{7}{2}tk = 0$



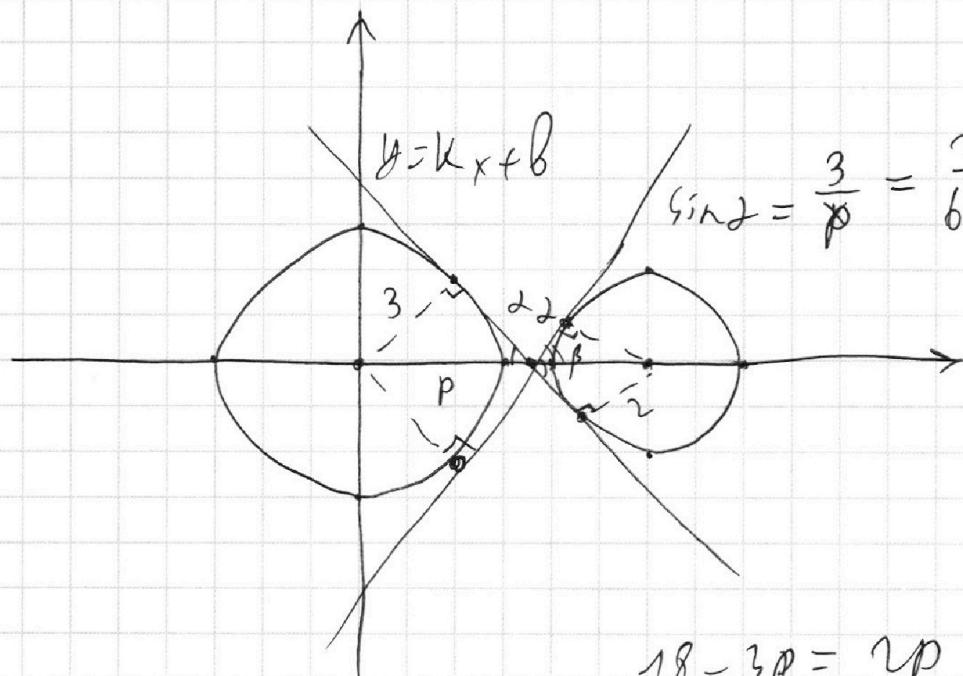
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{p^2 + 9}} = \frac{3}{6-p}$$

$$18 - 3p = 2p$$

$$5p = 18$$

$$p = \frac{18}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{p^2 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{36 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{45}} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \beta = \frac{3}{6-p} = \frac{3}{6-\frac{18}{5}} = \frac{3}{\frac{12}{5}} = \frac{15}{4}$$

множок

м.н. ~~проблем~~ ~~множок~~, то

отк - о O_x

$$\tan \beta = -\tan \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

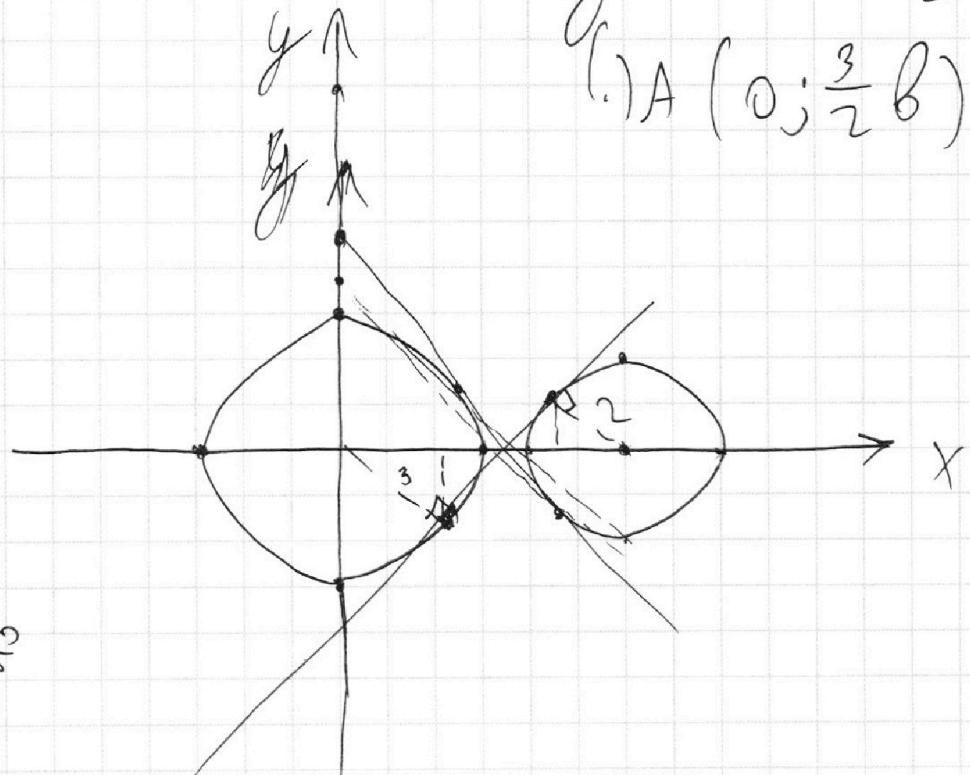
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 - 36 + 32 = 0 \rightarrow (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{array} \right.$$

$$y = -ax + 3b \rightarrow y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$$

$$(.) A \left(0; \frac{3}{2}b \right)$$

$$(.) A \left(0; \frac{3}{2}b \right)$$



$$\log_3 x + 6 \log_x 3 = \frac{1}{2} \cdot 5 \log_x 3 - 8$$

$$\frac{2y}{3} = \frac{81}{43}$$

$$1) \text{ sought } a = 0 : y = \frac{3b}{2}$$

найдем (найдя b=0)

2) Уравнение - вспомни о лин. алг.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ \sin \alpha = \cos x \\ 5\alpha = x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sin \alpha = \sin (\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k & (1) \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi k & (2) \end{cases}$$

$$(1) \cancel{\alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} = 5x + 10\pi k \Rightarrow x + \frac{\pi}{2}$$

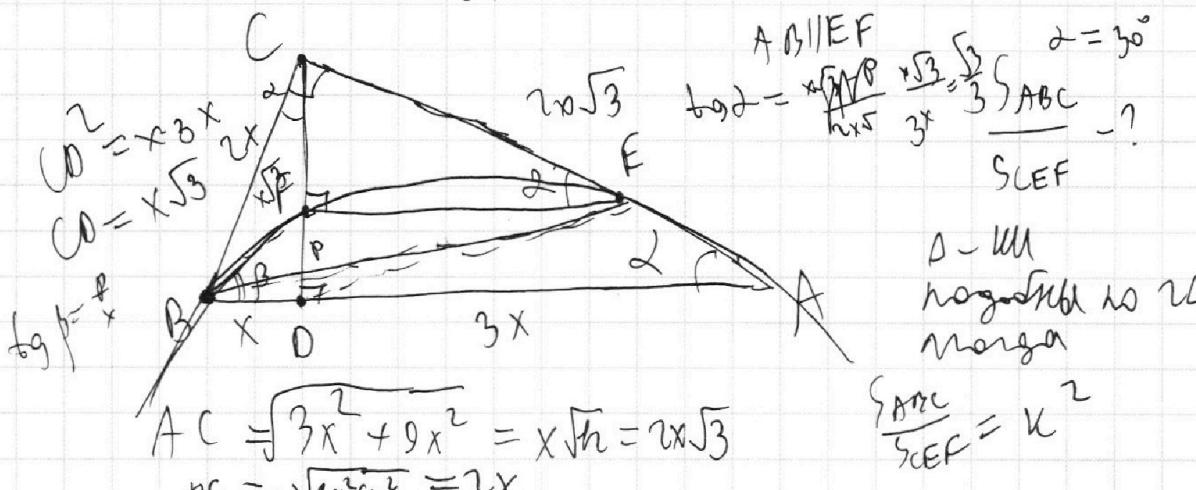
$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5\alpha \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$b) \quad \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-18\pi \leq 6x \leq 2\pi + 10\pi k \Leftarrow h\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$572 - 270 = 31$$

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 41$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 20,5$$

нужно $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \rightarrow \min$

$$\text{при } \beta_1 + \beta_2 = 10: \quad \beta_3 = 11$$

$$\beta_2 = 13 - \beta_3 = 2$$

$$\beta_1 = 18 - \beta_3 = 7$$

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 10 + 13 + 30 = 53$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 28 - \min \quad \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\gamma_3 = 28 - 10 = 18$$

$$\gamma_2 = 28 - 30 = -2$$

$$(\gamma_1 + \gamma_3)_{\min} = 30$$

$$\gamma_{\min} = 30 \quad \text{для } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{9\pi}{2} \leq 5x \leq \frac{5\pi}{2} \quad -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-7\pi \leq x + \frac{\pi}{2} \leq 5\pi$$

$$x + \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & \sin x = \cos x, \\ & 5x = x + \frac{\pi}{2} \end{aligned}}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

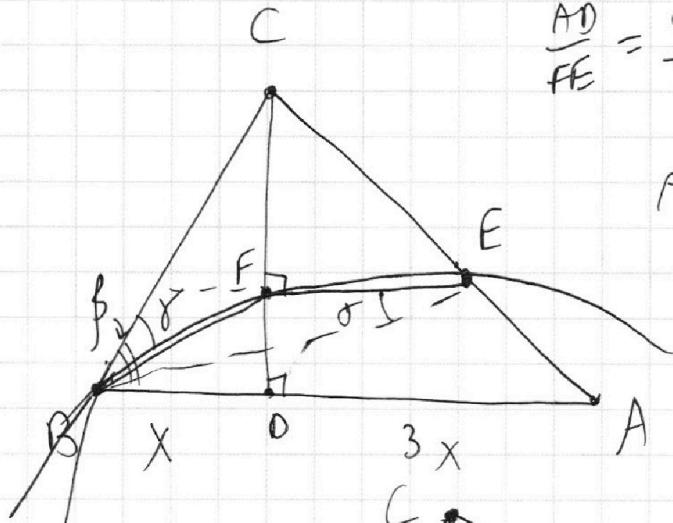
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

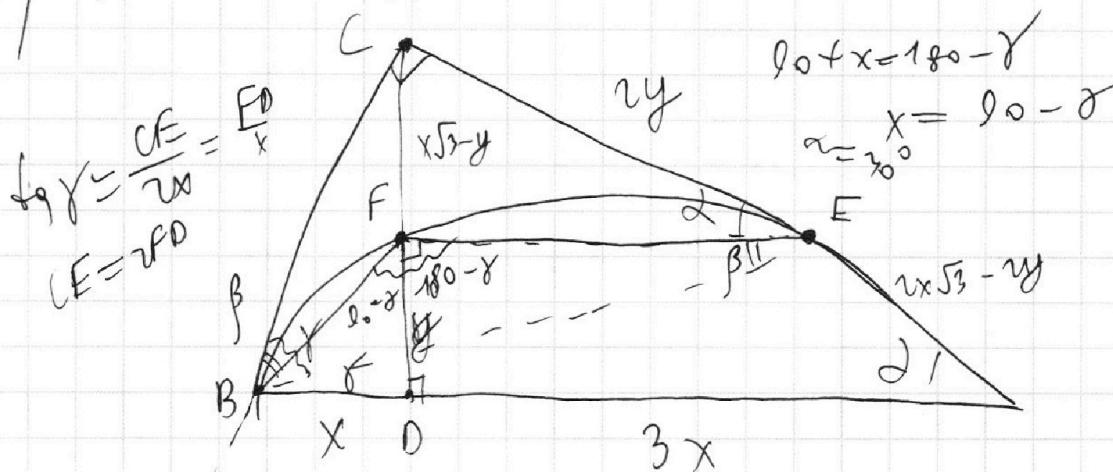
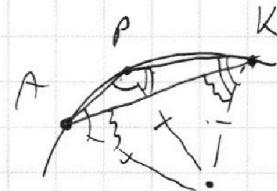
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AD}{FE} = \frac{CD}{CF} = \frac{AC}{AF}$$



$$\alpha + x = 180 - \gamma$$
$$x = 180 - \gamma - \alpha$$
$$x = 30^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \frac{x\sqrt{3} - y}{2y} = \frac{1}{2}$$
$$x\sqrt{3} - y = y$$
$$x\sqrt{3} = 2y$$
$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$
$$y = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Найти a , при
котором будем b ,
что реш.