МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, $bc$ делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, $ac$ делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник $ABC$. Окружность, касающаяся прямой $BC$ в точке $B$, пересекает высоту $CD$, проведённую к гипотенузе, в точке $F$, а катет $AC$ – в точке $E$. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника $ABC$ к площади треугольника $CEF$.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа $x$ и $y$ удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения $xy$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы $AA_1, BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Сфера $\Omega$ касается ребра $AS$ в точке $L$ и касается плоскости основания пирамиды в точке $K$, лежащей на отрезке $AM$. Сфера $\Omega$ пересекает отрезок $SM$ в точках $P$ и $Q$. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника $ABC$ равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан $AA_1, BB_1$ и $CC_1$.

   б) Найдите двугранный угол при ребре $BC$ пирамиды, если дополнительно известно, что $\Omega$ касается грани $BCS$ в точке $N$, $SN = 4$, а радиус сферы $\Omega$ равен 5.

$2\beta_3 = 21$ ; $\beta_3 = \frac{21}{2}$ ; $\beta_1 = \beta_3 - 3 \overset{12}{=} \frac{21-6}{2} = \frac{15}{2}$

$\beta_2 = 10 \overset{12}{-} \beta_1 = \frac{20-15}{2} = \frac{5}{2}$ , однако такое невозможно, т.к. $a, b, c \in N$.

$$\begin{cases} \beta_1+\beta_2 \geqslant 10 \\ \beta_2+\beta_3 \geqslant 13 \\ \beta_1+\beta_3 \geqslant 18 \end{cases} + \quad ; \quad 2(\beta_1+\beta_2+\beta_3) \geqslant 41$$

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant 20,5$$

$abc_{min}$ достигается при $(\beta_1+\beta_2+\beta_3)_{min}$, где $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$ и $\geqslant 0$

Пусть $\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 21$

$10+\beta_3 = 21$

$\beta_3 = 11$

$\beta_1 = 18-\beta_3 = 7$ ; $\beta_2 = 13-\beta_3 = 2$ ,

такое возможно

$$\begin{cases} \gamma_1+\gamma_2 \geqslant 10 \\ \gamma_1+\gamma_3 \geqslant 30 \\ \gamma_2+\gamma_3 \geqslant 13 \end{cases} \Rightarrow 2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) \geqslant 53$$

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geqslant 26,5$$

Пусть $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = 27$ − min

$\gamma_3 = 27-10 = 17$ ; $\gamma_2 = 27-30 = -3$ −

такое невозм., ~~тогда предположим, что~~

~~$\gamma_2 \leq 30$; $\gamma_3 = 27-(\gamma_1+\gamma_2) = 17$~~

~~$\gamma_1 = 27-(\gamma_2+\gamma_3) = 27-13 = 14$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$a, b, c \in N$ ; $ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

$bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

$abc_{min} - ?$

$ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

$abc$ будет наименьшим, если ед. ~~делители~~ множители $a, b, c$ - степени 2, 3 и 5

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$ ; $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$, при этом

Из усл: (если числа минимальные) и равенство возможно

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 = 9 \\ \alpha_2+\alpha_3 = 14 \\ \alpha_1+\alpha_3 = 19 \end{cases} ; \begin{cases} \alpha_2 = 9-\alpha_1 \\ 9-\alpha_1+\alpha_3 = 14 \\ \alpha_1+\alpha_3 = 19 \end{cases} +$$

$9 + 2\alpha_3 = 33$

$2\alpha_3 = 24$ ; $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 7+2+12 = 21$

$\alpha_3 = 12$

$\alpha_1 = 9+\alpha_3-14 = 9-2 = 7$

$\alpha_2 = 9-\alpha_1 = 2$

аналогично:
$$\begin{cases} \beta_1+\beta_2 = 10 \\ \beta_2+\beta_3 = 13 \\ \beta_1+\beta_3 = 18 \end{cases}$$

$\beta_3 - \beta_1 = 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | | | | | | |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

т.к. $\gamma_2 \in Z$, $\gamma_2 \geq 0$ ; ~~при~~ $\gamma_2 = 0$:

$$\Downarrow$$

$(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)_{min} = 30$, такое возможно при $\gamma_2 = 0$

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_3 = 30 \\ \gamma_1 \geq 10 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 30 \\ \gamma_3 \geq 13 \end{cases}$$

Такое может быть при $\gamma_1 = 10$, $\gamma_3 = 20$, при этом произведение a, b и c будет min,

$$(abc)_{min} = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} = 6^{21} \cdot 5^{30}$$

Ответ: $6^{21} \cdot 5^{30}$.

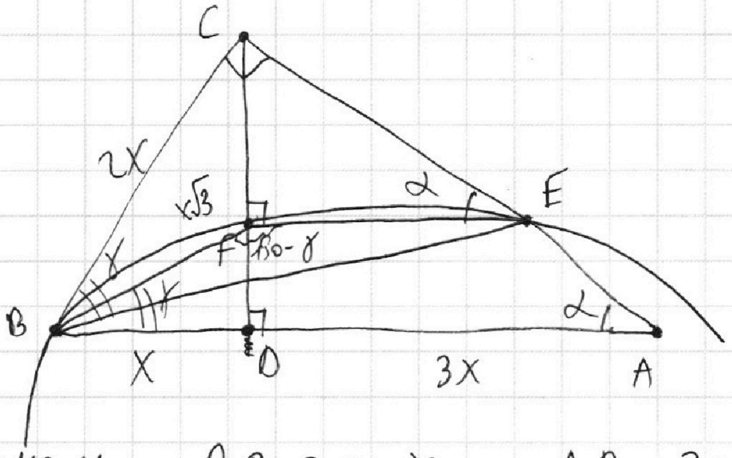
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$ — ?

AB // FE




примем BD за x, AD = 3x

по св-ву выс. к гип: $CD^2 = x \cdot 3x$

$CD = x\sqrt{3}$

$\angle CAD = \angle CEF = \alpha$; $tg\alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{x\sqrt{3}}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Downarrow$

$\alpha = 30^\circ$

(BC) - кас. к окр-ти, поэтому

$\angle CBE = \frac{\smile BE}{2}$, как угол между касат. и хордой

$\angle BFE = 180^\circ - \frac{\smile BE}{2} = 180^\circ - \angle CBE$ как впис.

$\angle EFD = 90^\circ$, тогда

$\angle BFD + 90^\circ = \angle BFE$

$\angle BFD = 180^\circ - \angle CBE - 90^\circ = 90^\circ - \angle CBE$

примем $\angle CBE$ за $\gamma$

$$\left.\begin{aligned} &\text{в } \triangle CBE: \quad tg\gamma = \frac{CE}{CB} \\ &\text{в } \triangle BFD: \quad tg\gamma = \frac{FD}{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{FD}{x}$$

по Т Пиф в $\triangle BCD$:

$$x^2+3x^2=CB^2 \Rightarrow CB=2x$$

$$\frac{CE}{2x}=\frac{FD}{x}$$

$$CE=2FD$$

Пусть $FD=t$, $CE=2t$

$CF=x\sqrt{3}-t$ ; в $\triangle CFE$:

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}=\frac{CF}{CE}$$

$$\frac{x\sqrt{3}-t}{2t}=\frac{1}{2}; \quad x\sqrt{3}-t=t$$

$$x\sqrt{3}=2t$$

$$t=\frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CF=\frac{x\sqrt{3}}{2}$$

по Т Пиф: $3x^2+9x^2=AC^2$

$$AC=2x\sqrt{3}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}x\cdot 2x\sqrt{3}=2x^2\sqrt{3}$$

~~$S_{CEF}=\frac{1}{2}$~~ $\triangle CDA\sim\triangle$ ~~CEF~~ $CFE$ по 2 ∠,

тогда $\frac{FE}{AD}=\frac{CF}{CD}=\frac{1}{2} \Rightarrow FE=\frac{3x}{2}$

$$S_{CEF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3x}{2}=\frac{3x^2\sqrt{3}}{8};$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}=\frac{2\cancel{x^2}\cancel{\sqrt{3}}\cdot 8}{3\cancel{x^2}\cancel{\sqrt{3}}}=\frac{16}{3}; \quad \text{Ответ: } \frac{16}{3}$$

при $k=-1$: $6x=-8\pi$ ; $x=-\frac{4}{3}\pi$

при $k=-2$: $6x=-18\pi$ ; $x=-3\pi$

при $k=0$: $6x=2\pi$ ; $x=\frac{\pi}{3}$

при $k=1$: $6x=12\pi$ ; $x=2\pi$

(2) $\frac{5\pi}{2}+5x+10\pi n=x+\frac{\pi}{2}$

$$4x=-2\pi-10\pi n$$

$$2x=-\pi-5\pi n$$

$$-6\pi\leq 2x\leq 4\pi$$

при $n=-1$: $2x=-\pi+5\pi=4\pi$ ; $x=2\pi$

при $n=0$: $2x=-\pi$; $x=-\frac{\pi}{2}$

при $n=1$: $2x=-\pi-5\pi=-6\pi$ ; $x=-3\pi$

Ответ: $\left\{-3\pi; -\frac{4}{3}\pi; \frac{\pi}{3}; 2\pi; -\frac{\pi}{2}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3.

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

Пусть $\arcsin(\cos x) = \alpha$, тогда:

$$\begin{cases} 5\alpha = x + \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\ \sin\alpha = \cos x \end{cases}$$

1) $-\frac{5\pi}{2} \le 5\alpha \le \frac{5\pi}{2}$

$-\frac{5\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{2}$

$\boxed{-3\pi \le x \le 2\pi}$

2) $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} & (1) \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} & (2) \end{array}\right.$$

3) (1) $\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$

$6x = 2\pi + 10\pi k$

$-18\pi \le 6x \le 12\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку рисунок симметричен отн-о $Ox$,
для прямой $l_2$ $tg\beta = tg(180-\alpha) = -tg\alpha = -\frac{5}{\sqrt{11}}$

Чтобы было 4 реш: $tg\gamma \in \left(-\frac{5}{\sqrt{11}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{5}{\sqrt{11}}\right)$,
где $tg\gamma = -\frac{a}{2}$

ранее был рассмотрен случай $tg\gamma = 0$ $(a=0)$,
поэтому достаточно решить след. систему:

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} > -\frac{5}{\sqrt{11}} \quad |\cdot(-2) \\ -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}} \quad |\cdot(-2) \end{cases} \begin{cases} a < \frac{10}{\sqrt{11}} \\ a > \frac{-10}{\sqrt{11}} \end{cases}$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

Найти $a$, при которых сущ. $b$, такое что

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 реш.

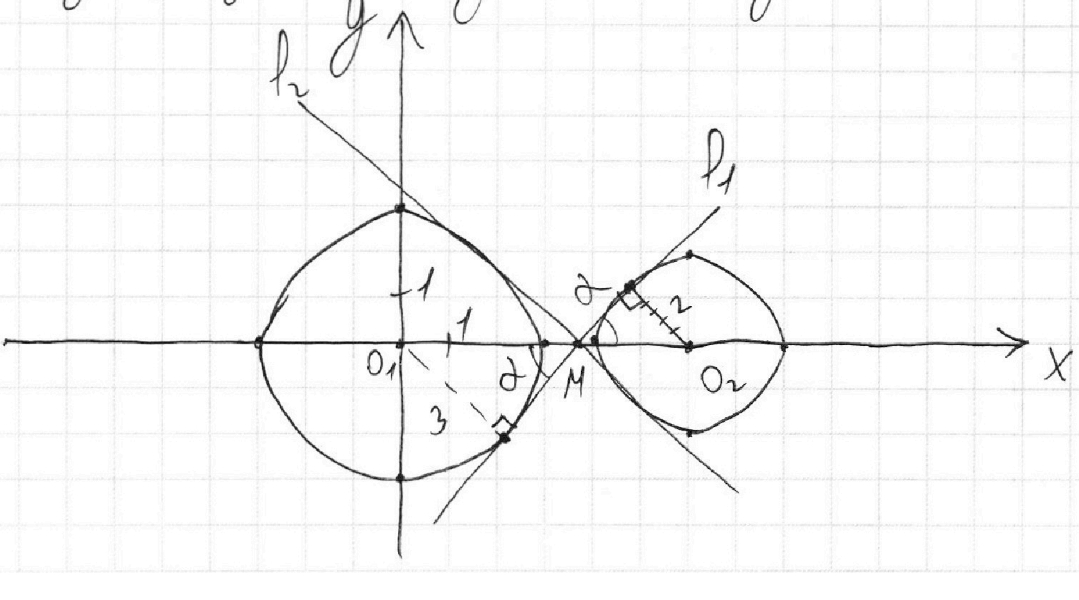
$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$2y = -ax + 3b$$

$$y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-ax}{2} + \frac{3b}{2} \\ \left[ \begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2 - 36 + y^2 + 32 = 0 \end{array} \right. \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2} \\ \left[ \begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{array} \right. \end{cases}$$

Изобразим эту систему графически



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x^2+y^2=9$ – окр-ть $R=3$, $O_1(0;0)$

$(x-6)^2+y^2=4$ – окр-ть $r=2$; $O_2(6;0)$

$y=-\frac{ax}{2}+\frac{3}{2}b$ – прямая (если $a\neq 0$)

1) Рассмотрим отдельно $a=0$:

$y=\frac{3}{2}b$. Найдётся такое $b$, что 4 реш. (например, $b=0$)

$\boxed{a=0}$ в ответ

2) От $a$ зависит наклон прямой, тогда найдём предельный случай при котором нет 4 реш., – $y=-\frac{ax}{2}+\frac{3b}{2}$ является общей внутренней касательной

Пусть эта прямая $l_1$ пересекает $Ox$ в (.) $M$

$O_1M+O_2M=6$. Введём $\angle\alpha$, тогда

$\sin\alpha=\frac{2}{O_2M}=\frac{3}{O_1M}$

$\frac{2}{6-O_1M}=\frac{3}{O_1M}$; $2O_1M=18-3O_1M$

$5O_1M=18$; $O_1M=\frac{18}{5}$

$\sin\alpha=\frac{3\cdot 5}{18\cdot 6}=\frac{5}{6}$; $\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{25}{36}}=\frac{\sqrt{11}}{6}$

$tg\alpha=\frac{5}{\sqrt{11}}$

$x < 1$

(2) $\frac{7}{2}\log_{5y}3 = \log_3^4(5y) + 8 > 0$

$\log_{5y}3 > 0$

$\log_{5y}3 - \log_{5y}1 > 0$

$(5y-1)(3-1) > 0$

$5y > 1$

(*) $(\underbrace{\log_3 5y - \log_3 x}_{(<0)})\log_3 x \log_3 5y(\underbrace{\log_3^2 5y + \log_3^2 x}_{>0}) = \frac{7}{2}$

(1)+(2): $\cancel{\frac{7}{2}(\log_x 3 - \log_3 5y}$

$\frac{7}{2}(\log_x 3 - \log_{5y}3) + \log_3^4 x + \log_3^4 5y = -16$

$\log_x 3 - \log_{5y}3 = \frac{2}{7}(-16 - \log_3^4 x - \log_3^4 5y) < 0$

$\log_x 3 - \log_{5y}3 < 0$, тогда

т.к. $\log_3^2 5y + \log_3^2 x > 0$, то равенство (*)

возможно, только если $\log_3 x \log_3 5y < 0$,

но по док-му это не так

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

[ ] [ ] [ ] [ ] [X] [ ] [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5.

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$xy$ — ?

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \pm 1 \\ y > 0 \\ y \neq \pm \frac{1}{5} \end{cases}$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \frac{5}{2}\log_x 3 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2\log_{5y} 3 = \frac{11}{2}\log_{5y} 3 - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 = -8 \quad (1) \\ \log_3^4 (5y) - \frac{7}{2}\log_{5y} 3 = -8 \quad (2) \end{cases}$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 = \log_3^4 (5y) - \frac{7}{2}\log_{5y} 3$$

$$\log_3^4 (5y) - \log_3^4 x = \frac{7}{2}\left(\log_x 3 + \log_{5y} 3\right)$$

$$\left(\log_3^2 (5y) - \log_3^2 x\right)\left(\log_3^2 (5y) + \log_3^2 x\right) = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{\log_3 x}^{\log_3 5y} + \frac{1}{\log_3 5y}^{\log_3 x}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\log_3(5y)-\log_3 x)(\log_3(5y)+\log_3 x)(\log_3^2 5y+\log_3^2 x)=$$
$$=\frac{7}{2}\left(\frac{\log_3 x+\log_3 5y}{\log_3 x\log_3 5y}\right)$$

$$\log_3\left(\frac{5y}{x}\right)\cdot\log_3(5xy)\cdot(\log_3^2 5y+\log_3^2 x)=$$
$$=\frac{7}{2}\cdot\frac{\log_3(5xy)}{\log_3 x\log_3 5y}$$

1) если $\log_3(5xy)=0$ :

$$\log_3(5xy)=\log_3 1$$

ф-ция $g(t)$ ~~xy~~ $=\log_3 t$ монотонна на $O(g(t))$,
тогда $5xy=1$

$$xy=\frac{1}{5}$$

2) если $\log_3(5xy)\neq 0$ :

$$\log_3\left(\frac{5y}{x}\right)\cdot\log_3 x\cdot\log_3 5y\cdot(\log_3^2 5y+\log_3^2 x)=\frac{7}{2}$$

$$\frac{7}{2}\log_x 3=-8-\log_3^4 x<0$$

(1) $\log_x 3<0$

$$\log_x 3-\log_x 1<0$$

$$(x-1)(3-1)<0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 7\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$xy - ?$ $\quad k+t-?$ $\quad k^2+t^2 = (k+t)^2 - 2tk$

$\log_3 x = t$

$\log_3 5y = k$

$3^k = 5y$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$

$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 5y} = \frac{\log_3 x + \log_3 5y}{\log_3 x \log_3 5y} = \frac{\log_3 5xy}{\log_3 \log_3 5y}$ $\quad xy - ?$

$\log_t x =$

$3^t = x$

$(\log_3 5y - \log_{3} x)(\log_3^2 5y + \log_3^2 x)$

$a^2 b^2$

$(a-b)\,ab\,(a^2+b^2)$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \frac{1}{2}\cdot 5 \log_x 3 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 7\log_{5y} 3 = \frac{1}{2}\cdot 11 \log_{5y} 3 - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x^{12} 3 - \frac{5}{2}\log_x 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 (5y) + 7\log_{5y}^{12} 3 - \frac{11}{2}\log_{5y} 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 5y - \frac{7}{2}\log_{5y} 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

$a^4 - b^4 = (a^2-b^2)(a^2+b^2) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 = \log_3^4 5y - \frac{7}{2}\log_{5y} 3$$

$\log_{\frac{x}{5y}} \log_3 5xy$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 5y = -\frac{7}{2}(\log_x 3 + \log_{5y} 3)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть $\log_3 x = t$; $\log_3 5y = k \neq 0$

$3^t = x$; $3^k = 5y$; $3^t > 0$

$\log_3 x < \log_3 5y$ $\quad 5xy = 3^{t+k}$; $xy = \frac{3^{t+k}}{5}$

$x < 5y$ перейдем к нашему ур-ю:

$(k-t)tk(k^2+t^2) = \frac{7}{2}$

$\log_x 3 < 0$ $\quad \log_x 3 < \log_x 1$; $x < 1$; $(t+k)^2 - 2tk =$

или $k + t = p$, то $(x-1)(3-1) \leq 0$

$t - k = \log_3\left(\frac{x}{5y}\right) < 1$; $p^2 = k^2 + 2tk + t^2$

$5y > 1$

$p^2 - 2tk = k^2 + t^2$

$t - k = \log_3 \frac{x}{5y}$ $\quad (k-t)tk(p^2 - 2tk) = \frac{7}{2}$

$t^3 - t^2k + tk^2 - k^3 + \frac{7}{2tk}$

$$\begin{cases} t^4 + \frac{7}{2t} = -8 \\ k^4 + \frac{7}{2k} = -8 \end{cases}$$

$= (t-k)(t^2+tk+k^2)$

$t^4 + k^4 + \frac{7}{2}(t-k) = -16$

$\frac{7}{2}(t-k) = -16 - t^4 - k^4 < 0$

$t - k < 0$ $\quad tk > 0$, $t - k < 0$

$$t^4 - k^4 + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) = 0$$

$$(t^2-k^2)(t^2+k^2) + \frac{7(k+t)}{2tk} = 0$$

$$(t-k)(t+k)(t^2+k^2) + \frac{7}{2}\frac{(t+k)}{tk} = 0$$

$$(k+t)\left((t-k)(t^2+k^2) + \frac{7}{2tk}\right) = 0$$

$k + t = 0$; $\quad (t^2+k^2)(t-k) + \frac{7}{2tk} = 0$

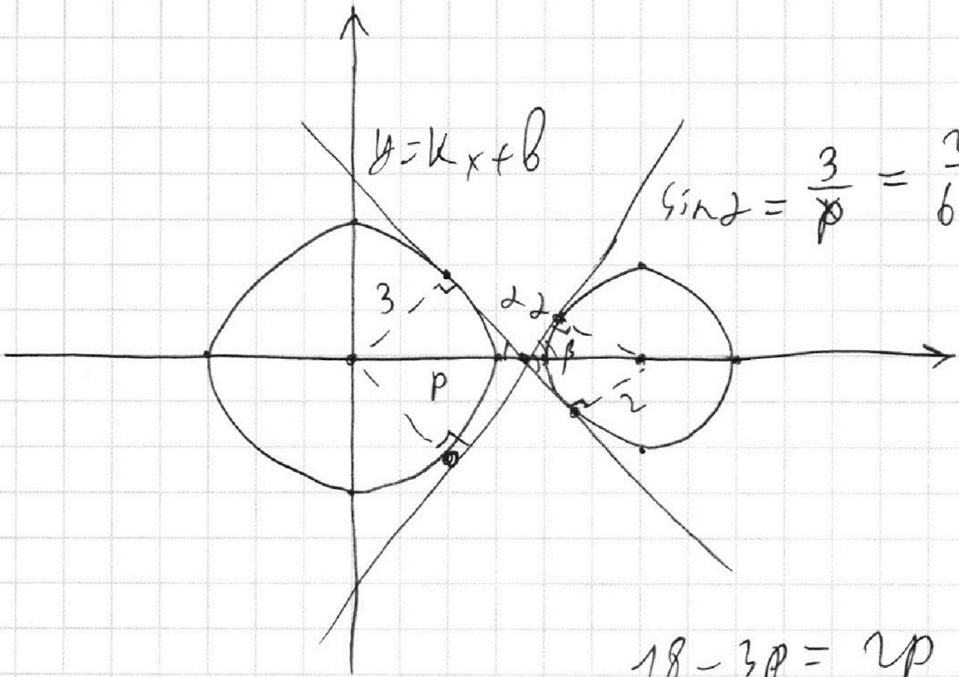
$tk(t^2+k^2)(t-k) + \frac{7}{2} = 0$

$> 0$ ? ?

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!




$\sin\alpha = \frac{3}{p} = \frac{2}{6-p}$

$18 - 3p = 2p$

$5p = 18$

$p = \frac{18}{5}$

$\sin\alpha = \frac{3}{\frac{18}{5}} = \frac{\cancel{3} \cdot 5}{\cancel{18}\, 6} = \frac{5}{6}$ ; $\frac{36 - 25}{11}$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{11}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$

~~$1 + \sin^2 = \frac{1}{\cos^2}$~~

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$

$\operatorname{tg}180 - \alpha = -\frac{5}{\sqrt{11}} = -\frac{a}{2}$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{6-k} = \frac{3}{k}$

т.к. ~~графи~~ рисунок симметричен отн-о Ox, то

$\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{\sqrt{11}}$

$= \operatorname{tg}(180 - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

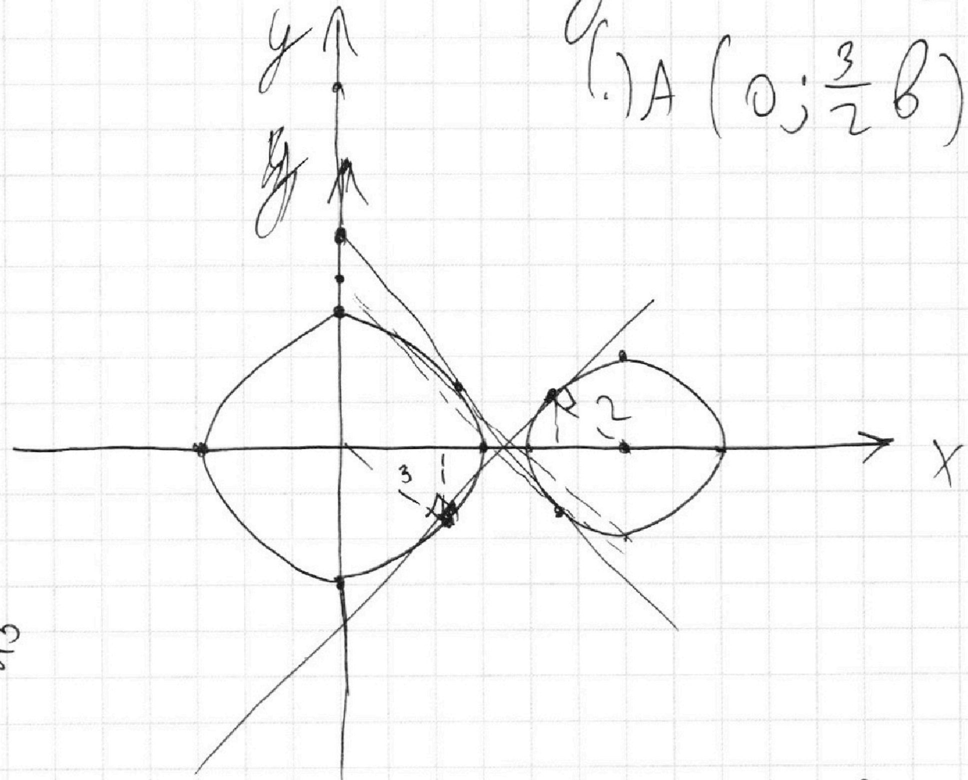
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2-36+32=0 \to (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right. \\ y=-ax+3b \to y=-\frac{ax}{2}+\frac{3}{2}b \end{cases}$$

$A\left(0;\frac{3}{2}b\right)$




1) отдельно $a=0$: $y=\frac{3b}{2}$

натдения (напр $b=0$)

2) граница - внутр обуз. кас.

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \frac{1}{2}\cdot 5\log_x 3 - 8$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 - \frac{5}{2}\log_x 3 = -8$

$\frac{81}{243}$ $3^5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

$$\begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin\alpha = \cos x \\ 5\alpha = x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\left[\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in Z \\ \alpha &= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi k, k \in Z \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \quad (1) \\ \alpha &= \frac{\pi}{2} + x + 2\pi k \quad (2) \end{aligned}\right.$$

$\cancel{(1)\ 5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2}}$

$\frac{5\pi}{2} \cancel{= 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}}$

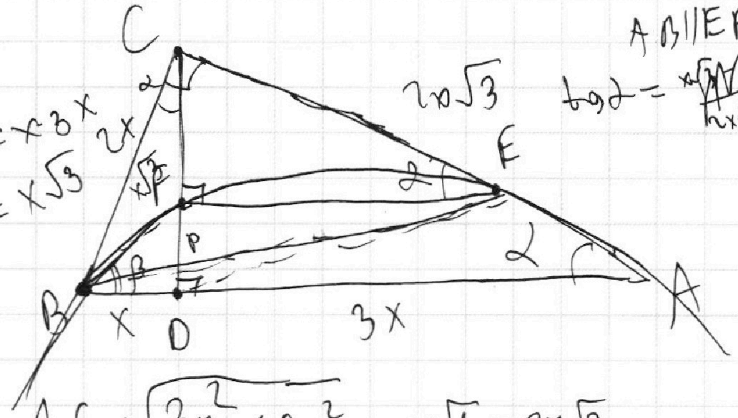
$$-\frac{5\pi}{2} \le 5\alpha \le \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{2}$$

$$\boxed{-3\pi \le x \le 2\pi}$$

(1) $\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$

$-18\pi \le 6x = 2\pi + 10\pi k \le 4\pi$




$CD^2 = x \cdot 3x$

$CD = x\sqrt{3}$

$tg\,\beta = \frac{p}{x}$

$AB \parallel EF$

$tg\,\alpha = \frac{x\sqrt{3}}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \alpha = 30°$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$ — ?

$\Delta$ — ки подобны по 2х, тогда

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2$

$AC = \sqrt{3x^2 + 9x^2} = x\sqrt{12} = 2x\sqrt{3}$

$BC = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5>2$ — $-2>0$ $31$

$7>2$

$2(\beta_1+\beta_2+\beta_3) \geq 41$

$\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 20{,}5$

пусть $\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 21$ — min

при $\beta_1+\beta_2=10$: $\beta_3=11$

$\beta_2 = 13-\beta_3 = 2$

$\beta_1 = 18-\beta_3 = 7$

$2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) \geq 10+13+30 = 53$

$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = 28$ — min

$\gamma_3 = 28-10=18$

$\gamma_2 = 28-30=-2$

$(\gamma_1+\gamma_3)_{min} = 30$

$\gamma_{2\,min} = \cancel{300}$ $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$\begin{array}{r}14\\+17\\\hline 31\end{array}$

$\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$

$\left[\begin{array}{l}\alpha = \frac{\pi}{2}-x\\ \alpha = \pi-(\frac{\pi}{2}-x)\end{array}\right.$

$\boxed{\begin{cases}\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]\\ \sin\alpha = \cos x,\\ 5\alpha = x+\frac{\pi}{2}\end{cases}}$

$5\arcsin(\cos x) = x+\frac{\pi}{2}$

$-\frac{5\pi}{2} \leq 5\alpha \leq \frac{5\pi}{2}$ $-\frac{5\pi}{2} \leq x+\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$

$\cancel{-2\pi \leq x+\frac{\pi}{2}} \leq \cancel{\frac{5\pi}{2}} \leq 3\pi$ $-3\pi \leq x \leq 2\pi$

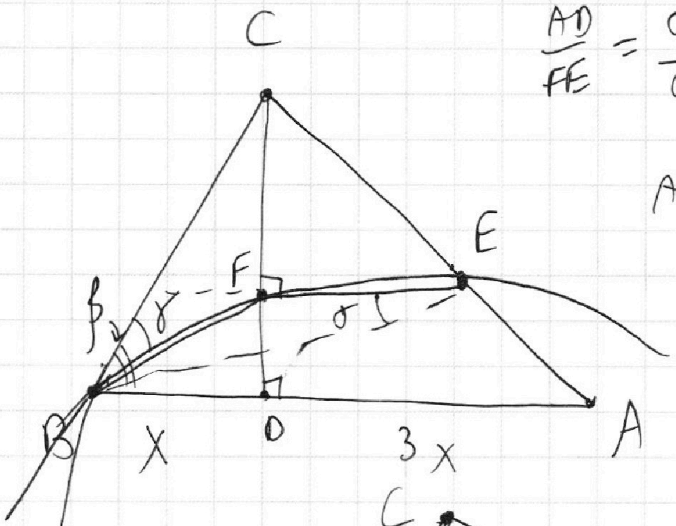
$\cancel{x+\frac{\pi}{2}}$

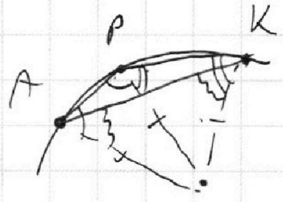
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AD}{FE} = \frac{CD}{CF} = \frac{AC}{DE}$$



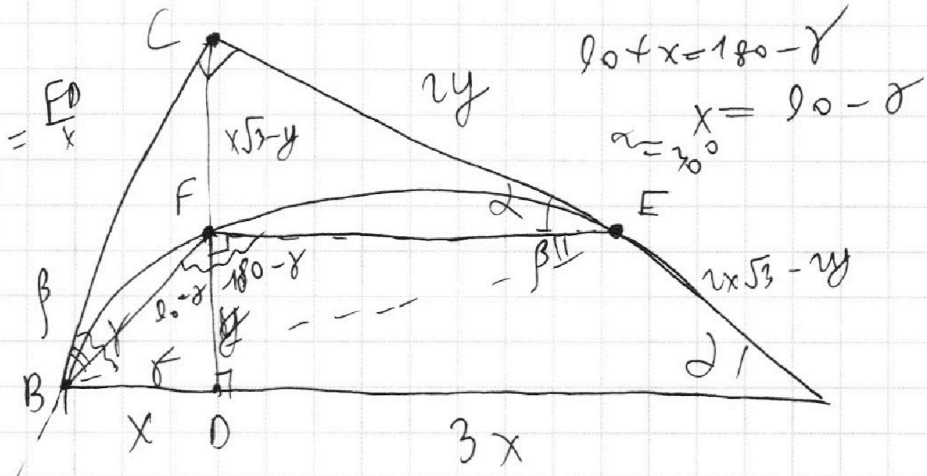

$90 + x = 180 - \gamma$

$x = 90 - \gamma$

$\alpha = 30^\circ$

$\operatorname{tg} \gamma = \frac{CE}{2x} = \frac{FD}{x}$

$CE = 2FD$




$\cancel{(x\sqrt3 - y)^2 / 4}$

$$\sin 30 = \frac{x\sqrt3 - y}{2y} = \frac12$$

$x\sqrt3 - y = y$

$x\sqrt3 = 2y$

$y = \frac{x\sqrt3}{2}$

№4.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32) = 0 \end{cases}$$

Найти a, при которых будет b, что 4 реш.