МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)\,(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

№ 1.

По условию:
a, b, c — натуральные (1) $\begin{cases} ab = 2^9\cdot 3^{10}\cdot 5^{10}\cdot k, & k\in N \\ bc = 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13}\cdot m, & m\in N \\ ac = 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}\cdot n, & n\in N \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{bc}{ab} = 2^5\cdot 3^3\cdot 5^3\,\frac{m}{k} \\ a\cdot c = 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}\cdot n \end{cases}$$

$$\begin{cases} c^2 = 2^{24}\cdot 3^{21}\cdot 5^{33}\cdot \frac{mn}{k} \\ a\cdot c = 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}\cdot n \\ b\cdot c = 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13}\cdot m \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2^{12}\cdot 3^{10}\cdot 5^{16}\cdot\sqrt{\frac{3\cdot 5\cdot mn}{k}} \\ a = 2^7\cdot 3^8\cdot 5^{14}\cdot\sqrt{\frac{nk}{3\cdot 5\cdot m}} \\ b = \frac{2^2\cdot 3^3}{5^3}\cdot\sqrt{\frac{mk}{3\cdot 5\cdot n}} \end{cases}$$

Т. к. a, b и c — натуральные, $\sqrt{\frac{mk}{3\cdot 5\cdot n}} = 5^3\cdot \ell$, $\ell\in N$;

$mk = 3\cdot 5^7\cdot n\cdot \ell^2$;

$$abc = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{27}\cdot\sqrt{\frac{3\cdot 5\cdot \cancel{m}n\cdot \cancel{n}k\cdot mk}{\cancel{3\cdot 5\cdot}\cancel{k}\cdot 3\cdot 5\cdot n}} = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{27}\sqrt{\frac{mnk}{3\cdot 5}} =$$

$$= 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{27}\sqrt{\frac{3\cdot 5^7\cdot n\cdot \ell^2\cdot n}{3\cdot 5}} = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}\,n\ell;$$

~~ab~~ Значение $a\cdot b\cdot c$ — наименьшее, когда $n = \ell = 1$; В этом случае $abc = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{27}$; Приведём пример таких чисел a, b и c, ~~при~~ для которых выполняется условие.; $m\cdot k = 3\cdot 5^7\cdot 1\cdot 1$; Пусть $m = 3, k = 5^7$;

Тогда $a = 2^7\cdot 3^8\cdot 5^{14}\sqrt{\frac{1\cdot 5^7}{3\cdot 5\cdot 3}} = 2^7\cdot 3^7\cdot 5^{17}$;

$b = \frac{2^2\cdot 3^3}{5^3}\sqrt{\frac{3\cdot 5^7}{3\cdot 5\cdot 1}} = 2^2\cdot 3^3$, $c = 2^{12}\cdot 3^{10}\cdot 5^{16}\sqrt{\frac{3\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{5^7}} =$
$= 2^{12}\cdot 3^{11}\cdot 5^{13}$

Эти a, b, c явл-ся натуральными, для них вып-ся система (1), ~~при~~ $n = 1$, $m = 3$, $k = 5^7$
сл-но, наим. знач. $a\cdot b\cdot c = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{27}$

Ответ: $2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{27}$.

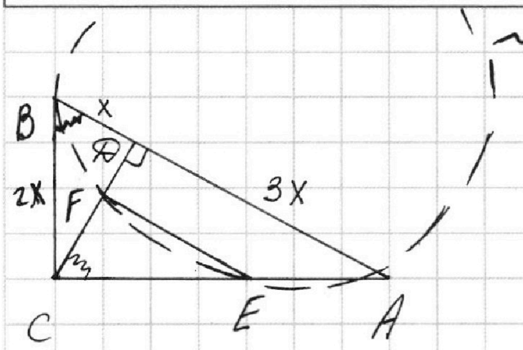
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2.



Дано: $\triangle ABC$ — прямоуг.;
$\angle C = 90^\circ$; CD — высота;
$(O;R)$ — окр-ть;
$(O;R)$ кас-ся CB в B;
$(O;R) \cap CD = F$;
$(O;R) \cap AC = E$;
$AB \parallel EF$;
$\frac{AD}{BD} = \frac{3}{1}$;

Найти: $\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}$ — ?

Решение: 1. Пусть $BD = x$; тогда по усл. $AD = 3x$; из $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ $\angle ACD = 90^\circ - \angle CAB = \angle CBA$;
Сл-но, $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ по 2-м углам $\angle ADC = \angle ACB = 90^\circ$;

$\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}$; $CD^2 = BD \cdot AD = 3x \cdot x$;
$CD = x\sqrt{3}$;

$\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{BD} = \frac{x\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3}$; Пусть $BC = y$; тогда $AC = y\sqrt{3}$; В $\triangle ABC$ по т. Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$; $(3x+x)^2 = y^2 + (y\sqrt{3})^2$;
$4y^2 = 16x^2$; $y = 2x$;
$BC = y = 2x$; $AC = y\sqrt{3} = 2x\sqrt{3}$;
В $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $BC = 2x$, $AB = BD + AD = 4x$;
Сл-но, $AB = 2BC$, сл-но, $\angle BAC = 30^\circ$,
$\angle ABC = 60^\circ$

2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$;

$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$;

$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$

$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$

~~1) Если x в~~ $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$;

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) = 0$;

$2 \cdot \sin\left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{3x}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5} = \pi k, k \in Z \\ \frac{3x}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{3}, k \in Z \end{array}\right.$$

~~Проверим получившиеся серии подстановкой: 1)~~

$$\cancel{\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 5\pi n, n \in Z \\ k = 2n \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} + 5\pi m, m \in Z \\ k = (2m+1) \end{cases} \end{array}\right.}$$

$$\cancel{\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 5\pi n, n \in Z \\ k = 2n \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2\pi + 5\pi m, m \in Z \\ k = (2m+1) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 10\pi m, m \in Z \\ k = 4m \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 5\pi + 10\pi m, m \in Z \\ k = 2(2m+1) \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2\pi + 10\pi m, m \in Z \\ k = 4m+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2\pi + 5\pi + 10\pi m, m \in Z \\ k = 2(2m+1)+1 \end{cases} \end{array}\right.}$$

т.к. $\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$, то

$\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$ находится в I или IV четвертях;

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$

$-3\pi + 2\pi n \leq x \leq 2\pi + 2\pi n, n \in Z$ — больше $2\pi - (-3\pi) = 5\pi > 2\pi$; подходят все.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, k \in Z$; $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{3}, k \in Z$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

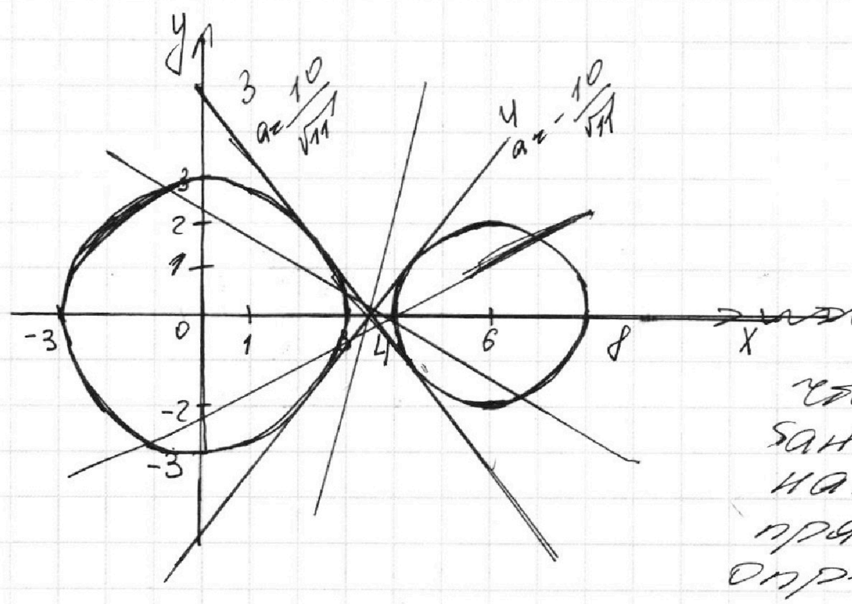
МФТИ

№ 4.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0, \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ x^2-12x+y^2=-32 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3b-ax}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right. \end{cases}$$

1. $x^2+y^2=9$ – окр-ть с центром в $(0;0)$ и радиусом 3.
2. $(x-6)^2+y^2=4$ – окр-ть с ц. в. $(6;0)$ и радиусом 2.
3. $y=\dfrac{3b-ax}{2}$ – прямая; пересеч. с Ox: $(0;\dfrac{3b}{2})$



Найдём знач. a, при которых прямая становится касательной к обеим окр-тям. Заметим, что a опр-ет тангенс угла наклона ~~нас~~ прямой, в опр-ет только её положение относит. осей. ~~Сл-но,~~

1) $\begin{cases} y=\dfrac{3b-ax}{2} \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$ $\quad 4x^2+(3b-ax)^2=36;$

$(a^2+4)x^2-6abx+9b^2-36=0;$

$\frac{D}{4}=9a^2b^2-(9b^2-36)(a^2+4)=9a^2b^2-9a^2b^2+36a^2-$
$-36b^2+36\cdot 4=36(a^2-b^2+4)=0;$

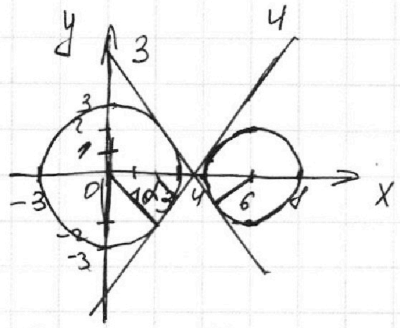
Сл-но, $b^2=a^2+4;$

2) $\begin{cases} y=\dfrac{3b-ax}{2} \\ (x-6)^2+y^2=\cancel{9} \end{cases}$ $\quad 4x^2-48x+36+9b^2-6abx+a^2x^2=16;$

$x^2(4+a^2)-2(24+3ab)x+9b^2+20=0;$

$\frac{D}{4}=(24+3ab)^2-(a^2+4)(9b^2+20)=24^2+24\cdot 6ab+9a^2b^2-$

№4 (продолжение):



Пусть угол между ~~од~~ касат. и Ox — α; тогда $tg\,\alpha = -\frac{a}{2}$;

Проведя радиусы окр-тей в т. касания, получим, что

$\frac{3}{\sin\alpha} + \frac{2}{\sin\alpha} = 6$; $\sin\alpha = \frac{5}{6}$;

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{25}{36}} = \pm\frac{\sqrt{11}}{6}$;

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\pm 5}{\sqrt{11}} = -\frac{a}{2}$;

Для прямой 3: $-\frac{a}{2} = -\frac{5}{\sqrt{11}}$; $a = \frac{10}{\sqrt{11}}$;

Для прямой 4: $-\frac{a}{2} = \frac{5}{\sqrt{11}}$; $a = \frac{-10}{\sqrt{11}}$;

Из ~~рисун~~ графика видно, что система имеет 4 корня, ~~когд~~ (учитывая, что при таких a всегда найдётся удовлетвор. усл-ю b), когда:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}\\ -\frac{a}{2} \geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}-\frac{a}{2} > -\frac{5}{\sqrt{11}}\\ -\frac{a}{2} \leq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a > \frac{-10}{\sqrt{11}}\\ a \leq 0\end{cases}\\ \begin{cases}a \geq 0\\ a < \frac{10}{\sqrt{11}}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 (продолжение).

$\log_3(5y) = m$; сл-но $5y = 3^m$; $y = \frac{3^m}{5}$;

$\log_3(x) = t$; сл-но $x = 3^t$;

$x \cdot y = \frac{3^t \cdot 3^m}{5} = \frac{3^{t+m}}{5}$; т.к. $m = -t$, то

$x \cdot y = \frac{3^{t-t}}{5} = \frac{3^0}{5} = \frac{1}{5}$.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

$$\begin{cases} (\log_3 x)^4 + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ (\log_3(5y))^4 + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \end{cases}$$

1. $$\begin{cases} x>0 \\ x \neq 1 \\ x^2 \neq 1 \\ 5y>0 \\ 5y \neq 1 \\ 25y^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ y>0 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$$

2. $(\log_3 x)^4 + 6\cdot\frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{2}\cdot 5\log_x 3 - 8;$

Пусть $\log_3 x = t$; ~~$2t^4 + \frac{12}{t} = 5t - 16$~~;

~~$\frac{2t^5 - 5t^2 + 16t + 12}{t} = 0$~~;

$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8;$

$\frac{2t^5 + 16t + 12 - 5}{2t} = 0;$ $\quad \frac{2t^5 + 16t + 7}{2t} = 0;$

3. $(\log_3(5y))^4 + 2\cdot\frac{1}{\log_3 5y} = \frac{11}{2}\cdot\frac{1}{\log_3(5y)} - 8;$

Пусть $\log_3(5y) = m$;

$m^4 + \frac{2}{m} = \frac{11}{2m} - 8;$ $\quad \frac{2m^5 + 16m + 4 - 11}{2m} = 0;$

$$\begin{cases} \frac{2t^5+16t+7}{2t} = 0 \\ \frac{2m^5+16m-7}{2m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^5+16t = -7 \\ t \neq 0 \\ m \neq 0 \\ 2m^5 + 16m = 7 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 2x^5 + 16x$; она явл-ся нечётной, т. е. $f(-x) = -f(x)$; т.к. $f(m) = -f(t)$, то $m = -t$;

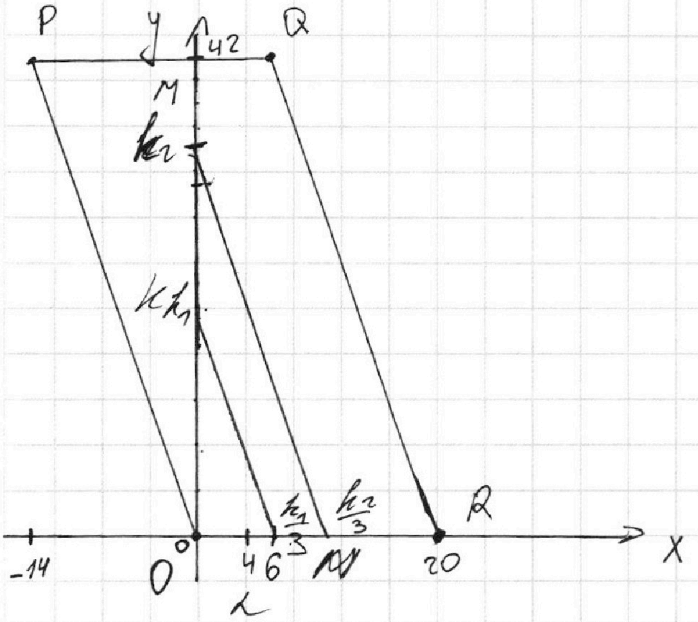
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6.



$P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$, $R(20; 0)$, $O(0; 0)$

$OPQR$ — пар-м;

$A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$;

Пусть $3x_1 + y_1 = k_1$;

$3x_2 + y_2 = k_2$;

$k_2 - k_1 = 33$;

$(3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33$;

т.к. x_1, y_1, x_2, y_2 — целые, то k_1 и k_2 — целые; $k_2 > k_1$;

(1) $y_1 = k_1 - 3x_1$ — K — т. пер. с Oy, L — т. пер. с Ox;

(2) $y_2 = k_2 - 3x_2$ — M — т. пер. с Oy, N — т. пер. с Ox;

$MN \parallel QR \parallel PO \parallel KL$

$0 \le k_1 < k_2 \le 42$;

$k_2 = k_1 + 33$;

$$\begin{cases} 0 \le k_1 \\ k_1 + 33 \le 42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 \le 9 \\ k_1 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le \frac{k_1}{3} \le 20 \\ 0 \le k_1 \le 60 \end{cases}$$

сл-но, $k_1 \in [0; 9]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 (продолжение).

$-9a^2b^2-36b^2-20a^2-4\cdot 20=$

$=(4^2\cdot 6^2-4^2\cdot 5)+24\cdot 6ab-36b^2-20a^2=$

$=4^2\cdot 31+4\cdot 36ab-4\cdot 9b^2-4\cdot 5a^2=0;$

$\begin{cases}124+36ab-9b^2-5a^2=0\\ b^2=a^2+4\end{cases}$

$\begin{cases}124+36ab-9a^2-36-5a^2=0;\\ b^2=a^2+4\end{cases}$

$\begin{cases}b=\dfrac{14a^2-88}{36a}\\ b^2=a^2+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b^2=\dfrac{(7a^2-44)^2}{18^2\cdot a^2}\\ b^2=a^2+4\end{cases}$

Пусть $a^2=t;$

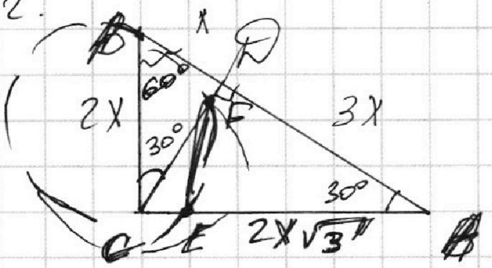
$\dfrac{(7t-44)^2}{18^2 t}=t+4;$

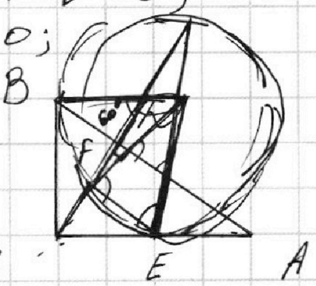
$49t^2-88\cdot 7t+44^2=18^2t^2+4\cdot 18^2\cdot t;$

$t^2\cdot 11\cdot 25+t\cdot 8\cdot 239-44^2=0;$

Черновик.

№2.





$\triangle ACD \sim \triangle CBD;$

$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{AD}{CD};$

$CD=3x^2;\quad \dfrac{AC}{BC}=\dfrac{3x}{x\sqrt{3}}=\sqrt{3};$

$BC=y;\quad AC=y\sqrt{3};$

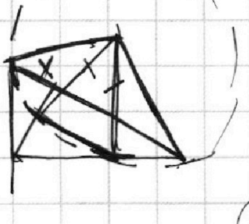
$y^2+3y^2=4y^2=16x^2;\quad y=2x;\ BC=2x;$

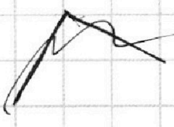
$AC=2x\sqrt{3};$

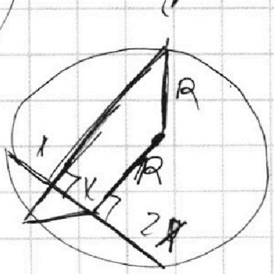
$R^2=x_0^2+(y_0-2x)^2$

$R^2=y_0^2+(x_0-x_M)^2$

$2x_Mx_0-x_M^2=2x\cdot y_0-4x^2;$





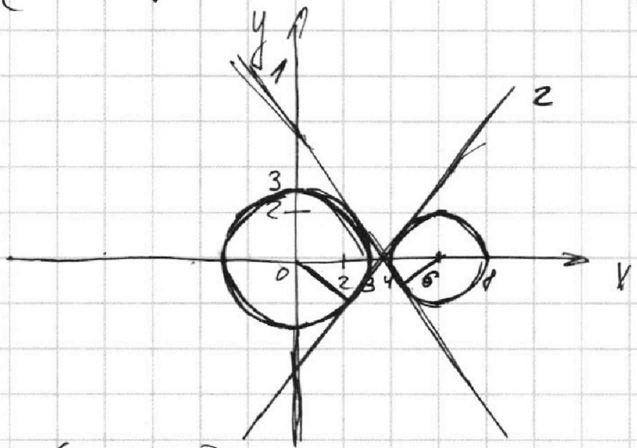


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2-12x+y^2+32=0 \\ ax+2y-3b=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \\ ax+2y=3b \end{cases}$ — 4 реш



$y=\frac{3b-ax}{2}$

1: $\begin{cases} y_1=\sqrt{9-x^2} \\ y_2=-\sqrt{4-(x-6)^2} \end{cases}$

$y_1'=\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$

$y_2'=\frac{-(4-(x-6)^2)'}{2\sqrt{4-(x-6)^2}}=$

$=\frac{+(2x-12)}{2\sqrt{4-(x-6)^2}}=\frac{x-6}{\sqrt{4-(x-6)^2}}\Rightarrow$

$\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{x-6}{\sqrt{4-(x-6)^2}}$; $\cancel{\frac{3}{\sin a_1}+}\ \frac{3}{\cos a_1}+\frac{2}{\cos a_2}=6$;

$\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}=-\frac{a}{2}$; $\frac{2x}{\sqrt{9-x^2}}=a$; $4x^2=9a^2-a^2x^2$; 11.10

$x^2(a^2-4)=9a^2$; $x^2=\frac{9a^2}{a^2-4}$;

$\begin{array}{r} 124 \\ -36 \\ \hline 88 \end{array}$

$y^2=9-\frac{9a^2}{a^2-4}=\frac{36}{a^2-4}$;

$(18-7)(18+7)=$
$=11\cdot 25$

$4x^2+(3b-ax)^2=36$;

$(a^2+4)x^2-6abx+9b^2-36=0$;

$\frac{D}{4}=9a^2b^2-9(b^2-4)(a^2+4)=9a^2b^2-9a^2b^2+$
$+36a^2-36b^2+144=0$; $\frac{9\cdot 16}{9\cdot 4}=4$

$a^2+4=b^2$;

$4\cdot 9^2\cdot 4+8\cdot 11\cdot 7=8(9^2\cdot 2+11\cdot 7)=8(162+77)=$
$=8\cdot 239$

$239 \mid 17$; $239 \mid 13$; $239 \mid 19$; $239 \mid 11$; $239 \mid 7$; $239 \mid 23$

$-\frac{a}{2}<\frac{-10}{\sqrt{77}}$;

~~$7\cdot(2\cdot 7^4+26\cdot 7+1)$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

1. $\begin{cases} ab = k\cdot 2^{9}\cdot 3^{10}\cdot 5^{10} \\ bc = m\cdot 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13} \\ ac = n\cdot 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{c}{a} = 2^{5}\cdot 3^{3}\cdot 5^{3}\cdot \frac{m}{k} \\ c\cdot a = n\cdot 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30} \end{cases}$

$c^2 = \frac{mn}{k}\cdot 2^{24}\cdot 3^{21}\cdot 5^{33}$

$c = 2^{12}\cdot 3^{10}\cdot 5^{16}\sqrt{\frac{mn\cdot 3\cdot 5}{k}}$

$a\cdot 2^{12}\cdot 3^{10}\cdot 5^{16}\sqrt{\frac{mn\cdot 3\cdot 5}{k}} = n\cdot 2^{19}\cdot 3^{11}\cdot 5^{30};$

$a = 2^{7}\cdot 3^{1}\cdot 5^{10}\sqrt{\frac{kn}{15m}};$

$b\cdot 2^{12}\cdot 3^{10}\cdot 5^{16}\sqrt{\frac{15mn}{k}} = m\cdot 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13};$

$b = \frac{2^2\cdot 3^3}{5^3}\cdot\sqrt{\frac{mk}{15n}};$

$abc = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{23}\sqrt{\frac{mn\cdot 15\cdot kn\cdot mk}{15m\cdot 15n\cdot k}} = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{23}\cdot\sqrt{\frac{mnk}{15}}$

~~$k=1, m=3, n=5;$ $c = 2^{12}\cdot 3^{10}\cdot 5^{16}\cdot 3\cdot 5$~~

~~$b = \frac{2^2\cdot 3^3}{5^3}\cdot\frac{1}{5}$~~ $\ominus$; $\sqrt{\frac{mk}{15n}} = 5^3\cdot l;$

$mk = 3\cdot 5^7\cdot n l^2;$ $n = 1;$ $m = 3l^2;$ $k = 5^7;$

т.к. в abc m, n, k — в числ., l — в знам.;

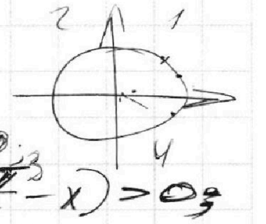
$l = 1;$

$a = 2^7\cdot 3^1\cdot 5^{10}\sqrt{\frac{5^7\cdot 1}{15\cdot 3}} = 2^7\cdot 3^1\cdot 5^{10}\cdot 5^3\cdot\frac{1}{3} = 2^7\cdot 3^7\cdot 5^{13}$

$b = \frac{2^2\cdot 3^3}{5^3}\cdot\sqrt{\frac{3\cdot 5^7}{3\cdot 5\cdot 1}} = 2^2\cdot 3^3;$

$c = 2^{12}\cdot 3^{10}\cdot 5^{16}\sqrt{\frac{3\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{5^7}} = 2^{12}\cdot 3^{11}\cdot 5^{13};$

$abc = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{23}\sqrt{\frac{3\cdot 1\cdot 5^7}{3\cdot 5}} = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{26}$



3. $5\cdot\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2};$

1) ~~$x \in$~~ x — в 1 четверти; $\cos x > 0;$

~~$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$~~ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > 0;$

$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10};$ $= \cos x$

$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right);$

$\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

~~$= \sin\frac{x}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{10} +$~~

1) x — в 1 четв.; $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right);$ $\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right);$

$x = -\frac{\pi}{2}$ $\oplus$

$2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2x}{5}\right)\cdot\cos\left(\frac{3x}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) = 0;$ $x = 2\pi;$

$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{5} + \frac{2x}{5} = \pi k, k\in\mathbb{Z} \\ \frac{3x}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$ $= \frac{5\pi}{2}$

$5\arcsin(\cos 2\pi) = 5\cdot\arcsin(1) = \frac{5\pi}{2}$